
Archiv der Mathematik
und Physik


VE
RI
TAS

anal. after p. 362.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

ZWEITER BAND

MIT 18 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 3 FIGURENTAFELN.



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Vorwort.

Die beiden bis jetzt erschienenen Bände der dritten Reihe des Archivs der Mathematik und Physik lassen erkennen, wie weit es gelungen ist, das Programm zu verwirklichen, welches wir „Zur Einführung“ im ersten Bande dargelegt hatten.

Dank der thatkräftigen Unterstützung einer grofsen Reihe bereitwilliger Mitarbeiter ist vieles erreicht worden, was damals als erstrebenswertes Ziel hingestellt wurde. Dafs nicht alle Teile des Programms gleichmäfsig zur Ausführung gelangt sind, bitten wir damit zu entschuldigen, dafs bezügliche Arbeiten leider noch nicht beschafft werden konnten.

Der Reichtum an Aufsätzen, die der Redaktion in entgegenkommender Weise zur Verfügung gestellt sind, hat es dagegen ermöglicht, jedes Doppelheft mit interessanten Untersuchungen aus den verschiedenartigsten Gebieten auszustatten; und wenn auch manche Arbeiten über den vielleicht etwas zu eng abgemessenen ursprünglichen Rahmen hinausgehen, so hat das Ganze gewifs an Mannigfaltigkeit und dadurch an Anziehungskraft gewonnen.

Wir sagen den Herren, die uns in liebenswürdiger Weise durch Lieferung von Beiträgen unterstützt oder durch einsichtsvollen Rat auf einzuschlagende Wege hingewiesen haben, unseren verbindlichen Dank und geben uns der Hoffnung hin, dafs sowohl die Mathematiker als auch die Physiker auch fernerhin ihre hilfreiche Hand uns bieten werden.

An dieser Stelle möchten wir noch auf die Aufgaben und Lehrsätze der Vermischten Mitteilungen besonders hinweisen und an die Herren Dozenten die ergebene Bitte richten, die Studierenden auf diese Rubrik des Archivs aufmerksam zu machen.

Eine bedeutsame Erweiterung des Archivs ist inzwischen, infolge einer dankenswerten Anregung des Herrn Alfred Ackermann-Teubner, nach Verhandlung mit der jüngst ins Leben gerufenen Berliner Mathematischen Gesellschaft beschlossen worden. Die Mitteilungen derselben werden als selbständig paginierter Anhang der einzelnen Hefte erscheinen. Der vorliegende Band bringt die Berichte über die drei ersten Sitzungen der Gesellschaft.

Von der Mitteilung der Preisfragen von Akademien und gelehrten Gesellschaften wollen wir in Zukunft absehen, nachdem der Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung dieselben in sein Programm aufgenommen hat.

E. Lampe. W. F. Meyer. E. Jahnke.

Inhalt.

Seite

Berichtigung

zum Inhalt des II. Bandes des Archivs der Mathematik und Physik.

Inhalt.

Rezensionen.

Vermischte Mitteilungen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
[illegible]

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN

2. BAND 1. UND 2. (DOPPEL-)HEFT

MIT [illegible] FIGURENTAFELN UND [illegible] TEXTFIGUREN

AUSGEGEBEN AM 1[illegible]. DEZEMBER 1901.



LEIPZIG UND BERLIN.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Straße 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 35, Kurfürstenstraße 139 und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrucke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 12 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

(Fortsetzung auf der 2. Seite des Umschlags.)

Über Kreise, welche Kegelschnitte doppelt berühren.

Von Rudolf Schüssler in Graz.

(Mit 3 Figurentafeln.)

I.

Die Beziehungen, welche zwischen Kegelschnitten und den sie doppelt berührenden Kreisen bestehen, hat Steiner in seinen Abhandlungen „Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte“[1]) und „Über einige neue Bestimmungsarten der Kurven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Kurven“[2]) ausführlich erörtert, aber fast alle Sätze ohne Beweis mitgeteilt. Diese sämtlichen Beweise liefert Fiedler in seiner Abhandlung „Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Achsen“[3]), indem er nach den Grundsätzen seiner Cyklographie durch räumliche Betrachtung alle Eigenschaften ableitet. Auch alle anderen mir bekannten[4]) Arbeiten, welche sich mit darauf bezüglichen Problemen beschäftigen, stützen sich auf räumliche Betrachtungen; so löst z. B. Niemtschik in seiner Abhandlung „Über die Konstruktion der einander eingeschriebenen Linien zweiter Ordnung“[5]) die Aufgaben, Kreise zu bestimmen, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren, sowie Kegelschnitte zu bestimmen, welche Kreise oder Kegelschnitte doppelt berühren, durch Projektion ebener Schnitte von Rotationsflächen zweiten Grades.

Die meisten dieser Aufgaben lassen sich auch rein planimetrisch behandeln und zwar, wie gezeigt werden soll, ganz elementar nur mit Zugrundelegung der einfachen Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte, welche in den meisten Lehrbüchern bewiesen sind.

---

1) Steiners Gesammelte Werke II, 389—420.

2) Steiners Gesammelte Werke II, 445—468.

3) Acta mathematica 5, 331—408.

4) Vgl. die Anmerkung am Schlufs der Arbeit.

5) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien: 67 (März 1873), 68 (Nov. und Dez. 1873), 71 (März 1875).

Diese planimetrische Behandlung geht von folgenden zwei Sätzen aus:

I a) *Der Ähnlichkeitskreis zweier einen Kegelschnitt doppelt berührender Kreise trennt die Brennpunkte harmonisch (schneidet den Kreis über den Brennpunkten rechtwinklig), wenn die Kreismittelpunkte auf der Hauptachse liegen*, oder

b) *geht durch die Brennpunkte, wenn die Kreismittelpunkte auf der Nebenachse liegen.*

II. *Die Chordale zweier doppelt berührender Kreise, deren Mittelpunkte auf derselben Kegelschnittsachse liegen, ist parallel zu den Berührungssehnen mit dem Kegelschnitte und gleichweit von ihnen entfernt.*[1])

Da der elementare Beweis dieser Sätze von den Brennpunktseigenschaften ausgehen soll, mufs er für Ellipse, Hyperbel und Parabel getrennt geführt werden.

A. Ellipse.

1. *Mittelpunkte der Berührungskreise auf der Nebenachse.* Legt man durch einen Punkt p der Kurve und die Brennpunkte ff_1 einen Kreis, so schneidet er die Nebenachse in zwei Punkten t und o, welche mit p verbunden die Tangente und Normale der Ellipse in p liefern. o ist dann der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Ellipse in p und in dem zur Nebenachse symmetrischen Punkte p' berührt. Fällt man von einem Brennpunkte f auf die Tangente die Normale, so hat der Fufspunkt δ derselben vom Mittelpunkte m der Ellipse die Entfernung a (grofse Halbachse), und es folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke pof und δmf (Fig. 1)

$$po : of = \delta m : mf, \quad \text{d. h.} \quad r : of = a : e,$$

der Radius eines doppelt berührenden Kreises steht zur Entfernung seines Mittelpunktes von den Brennpunkten in einem konstanten Verhältnisse $(a : e)$.[2])

---

1) Dies ist ein besonderer Fall des allgemeinen, projektivisch leicht zu erweisenden Satzes: Wenn ein veränderlicher Kegelschnitt zwei feste C_2 doppelt berührt, gehen die Berührungssehnen durch eine Diagonalecke x des Basisviereckes der beiden C_2 und sind harmonisch konjugiert zu den durch x gehenden gemeinsamen Sekanten der beiden C_2. (Steiner, II, 472.)

2) Nebenbei ist dies ein elementarer Beweis für folgende Konstruktion eines Berührungskreises bei gegebenem Mittelpunkte o auf der Nebenachse: „Die Verbindungslinie of schneidet die Tangenten in den Scheiteln der Hauptachse in Punkten des gesuchten doppelt berührenden Kreises. (Pelz: „Beiträge zur Bestimmung der Selbst- und Schlagschattengrenze von F_2 bei Centralbeleuchtung". 27. Jahresber. d. L. O. Realschule in Graz, S. 7.)

Für zwei doppelt berührende Kreise $K_1 K_2$ stehen die Entfernungen eines Brennpunktes von den Kreismittelpunkten im gleichen Verhältnis wie die Kreisradien ($o_1 f : o_2 f = r_1 : r_2$). Da nun der Ähnlichkeitskreis von $K_1 K_2$ d. i. der Kreis, welcher den inneren und äufseren Ähnlichkeitspunkt zu Endpunkten eines Durchmessers hat, alle Punkte enthält, deren Entfernungen von den Kreismittelpunkten $o_1 o_2$ sich wie die Radien verhalten, so liegen die Brennpunkte auf den Ähnlichkeitskreisen aller Paare von doppeltberührenden Kreisen, die ihre Mittelpunkte auf der Nebenachse haben.[1]) Oder der Winkel der von o_1 und o_2 nach einem Brennpunkte gerichteten Strahlen hat Halbierungsstrahlen, welche durch die Ähnlichkeitspunkte von $K_1 K_2$ gehen.

Die Berührungssehne pp' des Kreises K mit dem Mittelpunkte o und der Ellipse schneidet die Nebenachse im Punkte π (Fig. 1). Dann ist $op^2 = o\pi \cdot ot$, $of^2 = om \cdot ot$, und durch Division der beiden Gleichungen erhält man $\frac{o\pi}{om} = \frac{op^2}{of^2} = \frac{a^2}{e^2}$ oder $\frac{m\pi}{mo} = \frac{a^2 - e^2}{e^2} = \frac{b^2}{e^2}$[2]), d. h. die Abstände der Berührungssehne und des zugehörigen Kreismittelpunktes vom Ellipsenmittelpunkte m haben ein konstantes Verhältnis. Daraus folgt weiter: Schneiden die zu drei Mittelpunkten $o_1 o_2 o_3$ gehörigen Berührungssehnen die Nebenachse in den Punkten $\pi_1 \pi_2 \pi_3$, so ist $o_1 o_2 : o_2 o_3 = \pi_1 \pi_2 : \pi_2 \pi_3$; insbesondere mufs die zum Halbierungspunkte ω von $o_1 o_2$ gehörige Berührungssehne in der Mitte zwischen den zu o_1 und o_2 gehörigen Berührungssehnen liegen.

Für zwei Mittelpunkte $o_1 o_2$ auf der Nebenachse haben die doppelt berührenden Kreise die Radien $r_1 = \frac{a}{e} o_1 f = \frac{a}{e} \sqrt{\overline{o_1 m}^2 + e^2}$ und $r_2 = \frac{a}{e} o_2 f = \frac{a}{e} \sqrt{\overline{o_2 m}^2 + e^2}$. Die Chordale dieser Kreise schneide die Nebenachse im Punkte h (Fig. 2), dann ist $ho_1^2 - ho_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \frac{a^2}{e^2} (\overline{o_1 m}^2 - \overline{o_2 m}^2)$ oder $(ho_1 + ho_2)(ho_1 - ho_2) = \frac{a^2}{e^2} (o_1 m + o_2 m)(o_1 m - o_2 m)$. Ist ω der Halbierungspunkt von $o_1 o_2$, so folgt $2 \cdot h\omega \cdot o_1 o_2 = \frac{a^2}{e^2} \cdot 2 \cdot m\omega \cdot o_1 o_2$, oder $h\omega : m\omega = a^2 : e^2$, d. h. die Chordale ist die zu ω gehörige Berührungssehne, und weil ω der Halbierungspunkt von $o_1 o_2$ ist, mufs die Chordale in der Mitte der zu o_1 und o_2 gehörigen Berührungssehnen liegen, oder die Berührungspunkte zweier doppelt berührender Kreise mit einer Ellipse haben von der Chordale der beiden Kreise gleiche Entfernung.

---

1) Steiner: Ges. Werke II, S. 397 und 452.

2) Vergl. Pelz: „Construction der Axen einer Ellipse aus 2 conjugierten Diametern" (3. Programm d. St. Realschule in Teschen 1876).

Für solche Punkte $p_1 p_1' p_2 p_2'$ zweier Kreise, welche von deren Chordale gleiche Entferung besitzen, gelten bekanntlich eine Reihe von Beziehungen. Nennt man wie früher die Verbindungslinien zweier Punkte desselben Kreises Berührungssehnen und die verschiedener Kreise (z. B. $p_1 p_2$) Wechselsehnen, so kann man diese Beziehungen folgend aussprechen: Auf Wechselsehnen werden von beiden Kreisen gleiche Stücke abgeschnitten[1]); die Endpunkte der Wechselsehnen haben vom Halbierungspunkte ω der beiden Kreismittelpunkte gleiche Entfernung.[2]) Die Tangenten in den Endpunkten der Wechselsehnen schneiden sich im Ähnlichkeitskreis; die beiden Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten der Berührungssehnen sind harmonisch konjugiert zum Ähnlichkeitskreis.[3])

Man kann auch direkt aus den Brennpunktseigenschaften ableiten, dafs diese Beziehungen für die Berührungspunkte zweier doppelt berührender Kreise gelten, und daraus den Schlufs ziehen, dafs die Chordale in der Mitte der Berührungssehnen liegt.

Um z. B. zu beweisen, dafs die Endpunkte der Wechselsehnen vom Halbierungspunkte ω der Strecke $o_1 o_2$ gleich weit abstehen, zeigt man, dafs der Halbierungspunkt h' einer Wechselsehne mit ω verbunden eine Normale zur Wechselsehne liefert. Zu diesem Zwecke sucht man zuerst einen Ausdruck für die Länge der Berührungssehne: Fällt man in Fig. 1 die Normale $o\alpha$ von o auf den Radiusvektor $f_1 p$, so ist

$$\triangle op\alpha \sim \triangle ofm;$$

1) Aus der Chordaleneigenschaft $h'p_1 \cdot h'q_1 = h'p_2 \cdot h'q_2$ folgt (Fig. 3) wegen $h'p_1 = h'p_2$ auch $h'q_1 = h'q_2$ und die Gleichheit der Strecken $p_1 q_1$ und $p_2 q_2$; da die Mitten d_1, d_2 derselben von h' gleichweit entfernt sind, so geht die Normale auf die Wechselsehne in h' durch ω, den Halbierungspunkt von $o_1 o_2$ und es ist $\omega p_1 = \omega p_2$.

2) Wählt man insbesondere als einen der Berührungskreise den der Ellipse umgeschriebenen Kreis, so folgt daraus: Schneidet die Normale eines Punktes p die Nebenachse im Punkte o, so liegt der Mittelpunkt eines Kreises durch p und die Scheitel der grofsen Achse in der Mitte zwischen o und m (siehe Pelz: „Zur wissenschaftl. Behandlg. d. Axonometrie" 81. Bd. d. Sitzb. d. K. Akad. d. Wiss.).

3) In Fig. 3 sind

$$\triangle p_1 x\xi \sim \triangle o_1 p_1 d_1, \quad \text{daher} \quad xp_1 : r_1 = x\xi : p_1 d_1,$$

ferner

$$\triangle p_2 x\xi \sim \triangle o_2 p_2 d_2, \quad \text{daher} \quad xp_2 : r_2 = x\xi : p_2 d_2,$$

und wegen

$$p_1 d_1 = p_2 d_2 \quad \text{ist} \quad xp_1 : r_1 = xp_2 : r_2 \quad \text{oder} \quad xp_1 : xp_2 = r_1 : r_2 = xo_1 : xo_2;$$

d. h. x liegt im Ähnlichkeitskreis. Zeichnet man in $p_1 p_1' p_2 p_2'$ die Tangenten, so zeigt Fig. 4: Wenn die Tangenten in den Endpunkten der Wechselsehnen sich auf K_s schneiden, müssen die Schnittpunkte uu' der zur Centrallinie symmetrischen Tangenten zu K_s harmonisch konjugiert sein.

daher

$$p\alpha : mf = o\alpha : om = (op : of) = a : e;$$

daraus folgt

$$p\alpha = a \quad \text{und} \quad o\alpha = om\frac{a}{e}.$$

Nun ist

$$op^2 = p\pi^2 + o\pi^2 = p\alpha^2 + o\alpha^2 = a^2 + om^2\frac{a^2}{e^2},$$

und wegen

$$\frac{o\pi}{om} = \frac{a^2}{e^2}$$

ist

$$p\pi^2 = a^2 - \overline{om}^2\left(\frac{a^4}{e^4} - \frac{a^2}{e^2}\right) = a^2 - \overline{om}^2\frac{a^2b^2}{e^4}.$$

Dann ist für zwei Kurvenpunkte $p_1 p_2$:

$$p_2\pi_2^2 - p_1\pi_1^2 = \frac{a^2b^2}{e^4}(om_1^2 - om_2^2)$$

oder

$$(p_2\pi_2 + p_1\pi_1)(p_2\pi_2 - p_1\pi_1) = \frac{a^2}{e^2}(o_1 m + o_2 m)\cdot\frac{b^2}{e^2}(o_1 m - o_2 m)$$
$$= (o_1\pi_1 + o_2\pi_2)(m\pi_1 - m\pi_2).\text{[1]}$$

Fällt man (Fig. 5) vom Halbierungspunkte h' der Wechselsehne $p_1 p_2$ auf die Nebenachse eine Normale, so ist der Fufspunkt h der Halbierungspunkt von $\pi_1\pi_2$; die Normale von p_1 auf die Berührungssehne $\pi_2 p_2$ schneide diese in δ, dann kann man obige Gleichung in der Form schreiben:

$$2\overline{hh'}\cdot\overline{p_2\delta} = 2\overline{\omega h}\cdot\overline{\pi_1\pi_2} = 2\overline{\omega h}\cdot\overline{p_1\delta} \quad \text{oder} \quad \frac{hh'}{\omega h} = \frac{p_1\delta}{p_2\delta},$$

d. h. die Dreiecke $\omega hh'$ und $p_2\delta p_1$ sind ähnlich, und daher ist $\omega h'$ normal zu $p_1 p_2$, woraus unmittelbar folgt, dafs $\overline{\omega p_1} = \overline{\omega p_2}$ ist.[2]

---

1) Man kann dies auch anders beweisen: Wegen $o\pi\cdot mt = \frac{a^2}{e^2}mo\cdot mt = a^2$ ist $p\pi^2 = \pi o\cdot\pi t = \pi o(mt - m\pi) = a^2 - o\pi\cdot m\pi$; daher ist $p_2\pi_2{}^2 - p_1\pi_1{}^2 = o_1\pi_1\cdot m\pi_1 - o_2\pi_2\cdot m\pi_2 = (o_1\pi_1 + o_2\pi_2)(m\pi_1 - m\pi_2)$, denn $o_1\pi_1\cdot m\pi_2$ und $o_2\pi_2\cdot m\pi_1$ sind gleich wegen $\frac{o_1\pi_1}{m\pi_1} = \frac{o_2\pi_2}{m\pi_2} = \frac{b^2}{a^2}$.

2) Man kann dies auch direkt zeigen, denn der Ausdruck $\omega p_1{}^2 = p_1\pi_1{}^2 + \omega\pi_1{}^2 = a^2 - \frac{a^2b^2}{e^4}o_1m^2 + \omega\pi_1{}^2$ läfst sich durch Hinzufügen von $\omega h\cdot\pi_1\pi_2 = \frac{1}{2}(o_1\pi_1 + o_2\pi_2)(m\pi_1 - m\pi_2)$ und Wegnahme von $\frac{1}{2}(\omega\pi_1 + \omega\pi_2)(\omega\pi_1 - \omega\pi_2) = \omega h\cdot\pi_1\pi_2$ auf die Form bringen

$$\omega p_1{}^2 = a^2 - \frac{a^2b^2}{2e^4}(o_1m^2 + o_2m^2) + \frac{1}{2}(\omega\pi_1{}^2 + \omega\pi_2{}^2),$$

welche ungeändert bleibt, wenn man p_1 mit p_2 vertauscht.

Oder man kann direkt beweisen, dafs sich die Tangenten zweier Kurvenpunkte $p_1 p_2$ im Ähnlichkeitskreis der zu p_1 und p_2 gehörigen Berührungskreise schneiden: Der Schnittpunkt x der Tangenten in p_1 und p_2 (Fig. 6) liegt auf dem zu $p_1 p_2$ konjugierten Durchmesser xm, welcher also $p_1 p_2$ in μ halbiert. Da somit p_1 und p_2 von diesem Durchmesser gleiche Entfernung haben, sind die Dreiecke mxp_1 und mxp_2 inhaltsgleich, und es ist

$$xp_1 \cdot h_1 = xp_2 \cdot h_2 \quad \text{oder} \quad xp_1 : xp_2 = h_2 : h_1 .$$

Anderseits ist $h_1 = m\delta \cdot \cos\varphi = a \cdot \cos\varphi$ und $o_1 p_1 = a : \cos\varphi$, weil der Radius des Berührungskreises auf einen Radiusvektor projiziert die grofse Halbachse giebt (Fig. 1); also $h_1 \cdot o_1 p_1 = a^2 = h_2 \cdot o_2 p_2$ oder

$$h_1 : h_2 = o_2 p_2 : o_1 p_1 \quad \text{und} \quad xp_1 : xp_2 = o_1 p_1 : o_2 p_2 ,$$

d. h. x liegt im Ähnlichkeitskreis der beiden Berührungskreise. (Es ist auch Winkel $p_1 x o_1 = p_2 x o_2$, oder die Halbierungsstrahlen des Winkels zweier Tangenten und der nach den Mittelpunkten der zugehörigen Berührungskreise gerichteten Strahlen sind identisch und gehen durch die Schnittpunkte des zugehörigen Ähnlichkeitskreises mit der Nebenachse.)

2. *Mittelpunkte der Berührungskreise auf der Hauptachse.* Stützt man sich auf die bereits abgeleiteten Resultate, so ist (Fig. 7) $op : on = m\pi' : mn = b^2 : e^2$ und wegen $op \cdot on = of \cdot of_1$ ist $op^2 : of \cdot of_1 = b^2 : e^2$.

Diese Relation kann man auch leicht aus der bekannten Konstruktion einer Kurvennormale mit Hilfe der konzentrischen Kreise mit den Radien $a, b, a + b$ herleiten: (Fig. 8) $op : pn_1 = b : a$, $np : pn_1 = a : b$, also $op : np = b^2 : a^2$ und $op : on = b^2 : (a^2 - b^2) = b^2 : e^2$, woraus wie früher $\frac{op^2}{of \cdot of_1} = \frac{b^2}{e^2}$, d. h. das Verhältnis des Radius eines Berührungskreises und der durch dessen Mittelpunkt gehenden kürzesten Sehne des Brennkreises ist konstant $= b : e$.[1])

Hat man nun zwei Kreismittelpunkte $o_1 o_2$ auf der Hauptachse (welche für reelle Kreise innerhalb der Brennpunkte angenommen werden müssen), so ist (Fig. 9) $r_1 : r_2 = \sqrt{o_1 f \cdot o_1 f_1} : \sqrt{o_2 f \cdot o_2 f_1} = \sigma_1 : \sigma_2$, was zu einer einfachen Konstruktion der Ähnlichkeitspunkte $s_1 s_2$ der beiden Berührungskreise führt. Dieselbe zeigt unmittelbar, dafs s und s_1 harmonisch konjugiert sind bezüglich des Brennkreises K_φ.[2])

---

1) Steiners Ges. Werke II, 394. Man kann dies auch so aussprechen: Für alle doppelt berührenden Kreise mit den Centren auf der Hauptachse bilden die Endpunkte der zur Hauptachse normalen Radien eine Ellipse, welche die Endpunkte der Nebenachse und die Brennpunkte der gegebenen Ellipse als Scheitel besitzt. Der Satz gilt noch allgemeiner (Steiner, II, 408 u. ff.).

2) Steiners Ges. Werke II, 399.

Die weiteren Betrachtungen sind analog den früheren, wie ja schon daraus hervorgeht, dafs die Radien der zu einem Kurvenpunkte gehörigen Kreise mit den Mittelpunkten in der Haupt- oder Nebenachse in einem konstanten Verhältnisse ($b^2 : a^2$) stehen.[1] Zieht man (Fig. 7) die Berührungssehne, so ist $mo : m\pi = mn : n\pi' = e^2 : a^2$ d. h. die Entfernungen des Kurvencentrums vom Mittelpunkte eines Kreises und von der zugehörigen Berührungssehne stehen in einem konstanten Verhältnisse. Daraus folgt, dafs, wenn $o_1''\omega' = \omega' o_{21}'$ ist, die zu $o_1' \omega' o_2'$ als Kreismittelpunkten gehörigen Berührungssehnen äquidistant sind (Fig. 5), und auch $m\omega' : hh' = e^2 : a^2$; nun wurde früher bewiesen, dafs $\omega m : \omega h = e^2 : a^2$; daher liegt ω' auf der Geraden $\omega h'$, d. h. $\omega' h'$ ist normal zu $p_1 p_2$ oder $\omega' p_1 = \omega' p_2$, woraus folgt, dafs die Chordale der Berührungskreise in der Mitte der Berührungssehnen liegt.

Dies läfst sich auch direkt beweisen: Schneidet die Chordale zweier doppelt berührender Kreise mit den Mittelpunkten o_1 und o_2 die Hauptachse in h (Fig. 10), so ist

$$ho_1^2 - ho_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \frac{b^2}{e^2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = \frac{b^2}{e^2}(mo_2^2 - mo_1^2)$$

oder

$$(ho_1 + ho_2)(ho_1 - ho_2) = \frac{b^2}{e^2}(mo_2 + mo_1)(mo_2 - mo_1)$$

oder

$$o_1 o_2 \cdot 2h\omega = \frac{b^2}{e^2} \cdot o_1 o_2 \cdot 2m\omega, \quad \text{d. h.} \quad h\omega : m\omega = b^2 : e^2 \quad \text{oder} \quad hm : m\omega = a^2 : e^2,$$

daher ist die Chordale die zu ω gehörige Berührungssehne und liegt also in der Mitte der zu o_1 und o_2 gehörigen Berührungssehnen.

B. Hyperbel.

Man kann alle Beweise analog, wie bei der Ellipse, durchführen und braucht nur denselben Text auf die entsprechend geänderten Figuren (1 a, 7 a) zu beziehen. Doch können bei der Hyperbel die beiden Sätze I und II auch mit Benutzung der Asymptoten abgeleitet werden.

1. *Mittelpunkte auf der Nebenachse.* Soll für den Mittelpunkt o der Nebenachse der Berührungskreis konstruiert werden, so fällt man (Fig. 11) von o auf die beiden Asymptoten die Normalen; die Fufspunkte $\delta\delta'$ derselben geben die Berührungssehne, welche die Hyperbel in den Berührungspunkten pp' schneidet; dabei ist $\delta p \cdot \delta p' = a^2 = \delta 1 \cdot \delta 1'$,

[1] Daraus folgt z. B., dafs für Berührungskreise mit dem Centrum auf der Hauptachse die Projektion des Radius auf einen zugehörigen Radiusvektor gleich dem Krümmungsradius des Scheitels der grofsen Achse ist.

also $\delta 1 = \delta 1' = a$, d. h. jeder die Hyperbel doppelt berührende Kreis, dessen Mittelpunkt in der Nebenachse liegt, schneidet auf den Asymptoten Sehnen aus, gleich der reellen Achse der Hyperbel. Nun ist $o\delta : om = \cos\varphi = a : e$; also $o\delta : a = om : e$, daher $\Delta o\delta 1' \sim \Delta omf_1$ und $r : of = a : e$ d. h. der Radius eines Berührungskreises und des konzentrischen Kreises durch die Brennpunkte stehen im konstanten Verhältnisse $a : e$.

Für zwei doppelt berührende Kreise mit den Mittelpunkten $o_1 o_2$ ist daher $r_1 : o_1 f = r_2 : o_2 f$ oder $r_1 : r_2 = o_1 f : o_2 f$ d. h. die Brennpunkte liegen im Ähnlichkeitskreise der beiden Berührungskreise.

Schneidet die Berührungssehne die Nebenachse in π, so ist

$$\frac{o\pi}{o\delta} = \cos\varphi = \frac{o\delta}{om}\ ^{1)},\quad \text{daher}\quad \frac{o\pi}{om} = \cos^2\varphi = \frac{a^2}{e^2}\quad \text{und}\quad \frac{m\pi}{mo} = \frac{b^2}{e^2},$$

d. h. das Verhältnis der Entfernungen des Mittelpunktes des Berührungskreises und der Berührungssehne vom Hyperbelmittelpunkte ist konstant, insbesondere gehören zu drei äquidistanten Mittelpunkten drei äquidistante Berührungssehnen.

Zeichnet man zwei Berührungskreise und fällt vom Halbierungspunkte ω ihrer Mittelpunkte die Normale $\omega h'$ auf eine Asymptote, so liegt (vergl. Fig. 3) h' auf der Chordale der Kreise (weil auf der Asymptote gleiche Sehnen ausgeschnitten werden) und auf der zu ω gehörigen Berührungssehne; also liegt die Chordale der Kreise in der Mitte ihrer Berührungssehnen mit der Hyperbel.

2. *Mittelpunkte auf der Hauptachse.* Zur Bestimmung der Berührungspunkte pp' bei gegebenem Mittelpunkte o auf der Hauptachse fällt man (Fig. 12) von o die Normalen auf die beiden Asymptoten; die Verbindungslinie ihrer Fuſspunkte $\delta\delta'$ ist die Berührungssehne, welche die Hyperbel in den gesuchten Berührungspunkten pp' schneidet, so daſs $p\delta \cdot p\delta' = \delta p \cdot \delta p' = b^2$ ist, d. h. die Tangente von δ an den gesuchten Berührungskreis K ist gleich der ideellen Halbachse. Jeder Berührungskreis mit dem Mittelpunkt o in der Hauptachse schneidet, einen Kreis mit dem Radius b, dessen Mittelpunkt der Fuſspunkt der Normale von o auf eine Asymptote ist, rechtwinklig.

1) Nebenbei läſst sich hieraus folgender Satz einfach beweisen: Fällt man (Fig. 1 a) von o auf einen Radiusvektor des Berührungspunktes p die Normale $o\alpha$, so ist wie bei der Ellipse $p\alpha = a$ (wegen $\Delta o\alpha p \sim \Delta omf$), und $o\alpha = \frac{a}{e} \cdot om$, d. i. aber nach obiger Gleichung auch die Entfernung des Mittelpunktes o von den Asymptoten, d. h. legt man an den die Asymptoten berührenden Kreis mit dem Mittelpunkte o die Tangenten aus den Brennpunkten, so schneiden sich diese in den Fuſspunkten der von o an die Kurve gezogenen Normalen.

Legt man von o an den Brennkreis eine Tangente $o\tau$, so ist $\Delta o\delta t \sim \Delta o m \tau$ wegen $o\delta : om = \sin\varphi = b : e = \delta t : m\tau$; daher ist auch $ot : o\tau = b : e$, d. h. $r : \sqrt{of \cdot of_1} = b : e$; der Radius eines Berührungskreises und des konzentrischen, welcher den Brennkreis normal schneidet, haben ein konstantes Verhältnis $r : R = b : e$.

Für zwei doppelt berührende Kreise $K_1 K_2$ mit den Mittelpunkten o_1 und o_2 verhalten sich deren Radien wie die Tangenten von o_1 und o_2 an den Brennkreis. Die Kreise mit den Mittelpunkten o_1 und o_2, welche den Brennkreis normal schneiden, haben daher denselben Ähnlichkeitskreis K_s wie K_1 und K_2; dieser Kreis K_s wird also auch den Brennkreis normal schneiden, oder die Ähnlichkeitspunkte der beiden Berührungskreise sind harmonisch konjugiert zu den Brennpunkten.[1])

Schneidet die Berührungssehne eines Kreises die Hauptachse in π, so ist (Fig. 12) $o\delta : om = \sin\varphi$ und $o\pi : o\delta = \sin\varphi$ daher $o\pi : om = \sin^2\varphi = \frac{b^2}{e^2}$ oder $m\pi : mo = a^2 : e^2$, das Verhältnis der Entfernungen des Kreismittelpunktes und der Berührungssehne vom Hyperbelcentrum ist konstant.

Zeichnet man zwei Berührungskreise und fällt vom Halbierungspunkte ω ihrer Mittelpunkte die Normale $\omega h'$ auf eine Asymptote, so sind (Fig. 14) die Tangenten von h' an die beiden Kreise K_1 und K_2 gleich[2]), also $h'h$ die Chordale, welche von den durch $\delta_1 \delta_2$ gehenden Berührungssehnen der Kreise $K_1 K_2$ mit der Hyperbel gleiche Entfernung hat.

C. Parabel.

Für einen Punkt o der Achse als Mittelpunkt bestimmt sich der Berührungskreis aus den bekannten Eigenschaften, dafs die Subnormale gleich dem Parameter q (Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie) ist und der Berührungspunkt p dieselbe Entfernung δ vom Brennpunkte hat wie o. Daher ist auch (Fig. 15) $o_1 p_1 = r_1 = \sqrt{q \cdot 2\delta_1}$ und $r_1^2 : r_2^2 = \delta_1 : \delta_2$; daher ist f für irgend zwei Berührungskreise der

1) Aus Fig. 13 ist ersichtlich, dafs für zwei Kreise, welche einen dritten K_φ normal schneiden, die Ähnlichkeitspunkte harmonisch konjugiert zu K_φ sind; denn 1 3, 2 4 und 1 2, 3 4 schneiden sich in zwei zu K_φ harmonisch konjugierten Punkten s_1 und s_2; s_1 ist aber innerer Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise, weil $o_2 1'$ parallel $o_1 2$ ist ($\alpha_1 = \alpha_1'$ als Basiswinkel in einem gleichschenkligen Dreiecke, $\alpha_1 = \alpha_2$ als Peripheriewinkel); ebenso ist s_2 äufserer Ähnlichkeitspunkt.

2) Dreht man K_2 und δ_2 um $\omega h'$, bis δ_2 mit δ_1 zur Deckung kommt, so ist die Asymptote A Chordale von K_1 und (K_2), also sind die Tangenten von h' an K_1 und (K_2) und daher auch an K_2 gleich.

Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises[1]), d. h. die Ähnlichkeitspunkte aller möglichen Paare von Berührungskreisen liegen symmetrisch zum Brennpunkte (sind harmonisch konjugiert bezüglich des endlichen und unendlich fern liegenden Brennpunktes).

Dafs die Entfernung der Kreismittelpunkte von den Berührungssehnen konstant (gleich dem Parameter q) ist, wurde schon erwähnt. Entsprechen (Fig. 15) den Kreismittelpunkten $o_1 o_2$ die Berührungspunkte $p_1 p_2$ der Parabel mit den Koordinaten $y_1 y_2$, so ist $y_1^2 - y_2^2 = 2q(\delta_1 - \delta_2)$ oder $(y_1 - y_2) : (\delta_1 - \delta_2) = q : \frac{y_1 + y_2}{2}$. Ist h' der Halbierungspunkt der Wechselsehne $p_1 p_2$, ω der Halbierungspunkt von $o_1 o_2$, dann sagt die Gleichung, dafs $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ oder $\omega h'$ normal zu $p_1 p_2$ ist, d. h. p_1 und p_2 haben von ω gleiche Entfernung, also liegt (Fig. 3) die Chordale zweier Berührungskreise in der Mitte der zugehörigen Berührungssehnen.

Aus den beiden für Ellipse, Hyperbel und Parabel bewiesenen Sätzen kann man einige wichtige Folgerungen ziehen. Der erste Satz sagt, dafs jeder Ähnlichkeitskreis zweier doppelt berührender Kreise entweder die Brennpunkte enthält oder den Brennkreis normal schneidet. Derselbe ist also eindeutig bestimmt, wenn man o_1 und o_2 kennt; denn liegen $o_1 o_2$ auf der Nebenachse, so sind die Halbierungsstrahlen des Winkels $o_1 f o_2$ nach dem inneren und äufseren Ähnlichkeitspunkt s_1 und s_2 gerichtet; liegen $o_1 o_2$ auf der Hauptachse, so sind $s_1 s_2$ gleichzeitig zu $o_1 o_2$ und ff' harmonisch konjugiert.

Umgekehrt kann man jeden durch die Brennpunkte gehenden oder den Brennkreis normal schneidenden und zur Hauptachse symmetrischen Kreis als Ähnlichkeitskreis für unendlich viele Paare von doppelt berührenden Kreisen ansehen; die Mittelpunkte dieser Kreise sind diejenigen Punktepaare der betreffenden Achse, welche zum Ähnlichkeitskreis harmonisch konjugiert liegen. Die Tangenten in den Berührungspunkten des Kegelschnittes mit einem solchen Kreispaare schneiden sich auf dem Ähnlichkeitskreise und in zwei zum Ähnlichkeitskreis harmonischen Punkten der Achse. Bringt man demnach eine Tangente

---

1) Der Ähnlichkeitskreis mit dem Mittelpunkte x ist der Ort aller Punkte, welche von o_1 und o_2 Entfernungen im Verhältnisse $r_1 : r_2$ besitzen; betrachtet man besonders den Punkt σ (Fig. 16), so ist

$$\Delta x o_1 \sigma \sim \Delta \sigma o_1 o_2, \quad \text{daher} \quad x o_1 : x\sigma = o_2 \sigma : o_1 \sigma = r_1 : r_2$$

und wegen $\Delta x o_2 \sigma \sim \Delta o_2 \sigma o_1$ auch $x o_2 : x \sigma = o_1 \sigma : o_2 \sigma = r_2 : r_1$;

daher ist $$x o_1 : x o_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

eines Kegelschnittes und die zu ihr bezüglich einer Achse symmetrische Tangente mit einem beliebigen Ähnlichkeitskreis[1]), dessen Mittelpunkt auf dieser Achse liegt, zum Schnitt, so werden die Verbindungslinien der Kreisschnittpunkte, welche nicht normal der Achse sind, auch Tangenten desselben Kegelschnittes sein.

Die Halbierungsstrahleu aller Tangentenpaare, die sich in einem Ähnlichkeitskreise K_3 schneiden, gehen durch zwei feste Punkte (nämlich durch die Schnittpunkte von K_3 mit jener Achse, auf welcher der Mittelpunkt von K_3 liegt). Da durch einen beliebigen Punkt p nur ein Ähnlichkeitskreis K_3 (bezüglich jeder Achse) hindurchgeht, und dieser Kreis K_3 durch p und die Brennpunkte eindeutig bestimmt ist, mufs K_3 ein Ähnlichkeitskreis für alle mit dem gegebenen konfokalen Kegelschnitte sein. Daraus folgt der bekannte Satz: Die Tangentenpaare aus einem beliebigen Punkte p an eine Schar konfokaler Kegelschnitte haben dieselben Halbierungsstrahlen; zu den Tangentenpaaren gehören auch die von p nach den Brennpunkten gerichteten Strahlen; die Halbierungsstrahlen sind die Tangenten der beiden durch p gehenden Kegelschnitte der konfokalen Schar.

Legt man durch alle Punkte einer Geraden g die Tangenten an einen Kegelschnitt, so halbiert g das Tangentenpaar nur für jenen Punkt p, welcher auf dem Ähnlichkeitskreis K_3 durch den Schnitt s von g mit einer Achse liegt. Ist insbesondere g eine Tangente des betreffenden Kegelschnittes, so ist p der Berührungspunkt.

Durch je zwei Punkte, welche harmonisch konjugiert sind zu dem Ähnlichkeitskreis K_3 von $K_1 K_2$, gehen an die $K_1 K_2$ doppelt berührenden Kegelschnitte Tangenten, welche sich in K_3 schneiden. Hält man ein solches Punktepaar fest und legt durch dasselbe an alle $K_1 K_2$ doppelt berührenden Kegelschnitte die Tangenten, so ist der Ort der Schnittpunkte der Tangenten an denselben Kegelschnitt der Kreis K_3.

Der zweite Satz sagt: Die Chordale C zweier Berührungskreise liegt in der Mitte zwischen den Berührungssehnen, oder die Berührungspunkte $p_1 p_2$ zweier doppelt berührender Kreise sind vom Halbierungspunkte ω der Kreismittelpunkte $o_1 o_2$ gleich entfernt; C ist die zu ω gehörige Berührungssehne.

Schneidet man einen Kegelschnitt mit einem beliebigen Kreise, dessen Mittelpunkt ω auf einer Achse liegt, so liegen die Halbierungspunkte h' der zur Achse nicht normalen gemeinsamen Sehnen auf der

1) Das ist also ein Kreis, welcher seinen Mittelpunkt auf der Nebenachse hat und durch die Brennpunkte geht, oder seinen Mittelpunkt auf der Hauptachse hat und den Brennkreis normal schneidet.

zu ω gehörigen Berührungssehne.[1]) — Alle Sehnen eines Kegelschnittes, welche durch eine Gerade C (normal zu einer Achse) halbiert werden, haben Symmetralen durch denselben Punkt ω[2]); oder von allen durch den Punkt h' von C gehenden Sehnen wird diejenige in h' halbiert, welche normal zu $h'\omega$ ist. Wenn der Fufspunkt h' der Normale von einem Punkte ω einer Achse auf eine Kurvensehne s in der zu ω gehörigen Berührungssehne C liegt, so ist h' der Halbierungspunkt der Sehne. Daher mufs h' auf dem zur Sehne s konjugierten Durchmesser liegen. Läfst man h' längs desselben fortrücken und ebenso die zur Achse normale Berührungssehne C, so werden die nach den zugehörigen Mittelpunkten der Berührungskreise gerichteten Geraden $h'\omega$ wegen des konstanten Verhältnisses $m\omega : mh$ alle parallel und zwar normal zur Sehne s sein, d. h.: Um für den Berührungskreis mit dem Mittelpunkt ω die Berührungssehne zu bestimmen, bringt man einen Durchmesser mit der durch ω normal zum konjugierten Durchmesser gezogenen Geraden zum Schnitt; der Schnittpunkt h' liegt auf der gesuchten Berührungssehne, ob die durch h' gehende Sehne die Kurve in reellen Punkten schneidet oder nicht.[3])

Betrachtet man insbesondere die gemeinsame Tangente T zweier Berührungskreise mit den Mittelpunkten in derselben Achse und errichtet in ihrem Schnittpunkte h' mit der Chordale C die Normale auf T, so trifft dieselbe die Achse im Halbierungspunkte ω der Kreismittelpunkte $o_1 o_2$, so dafs C die zu ω gehörige Berührungssehne ist;

---

1) Daraus läfst sich auch eine Konstruktion der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf einer Achse liegt, ableiten. Kreis und Kegelschnitt bestimmen (Fig. 17) auf der Achse eine Involution, durch deren Doppelpunkte ef die Wechselsehnen der gesuchten Schnittpunkte gehen. Die Wechselsehnen sind bestimmt, da sie durch die Schnittpunkte $\alpha\alpha'$ resp. $\beta\beta'$ der Kreise über $e\omega$ resp. $f\omega$ mit C gehen (C wird als die zu ω gehörige Berührungssehne in bekannter Weise konstruiert). Sind die Schnittpunkte imaginär, so kann ein Paar Wechselsehnen reell bleiben; sind beide Paare imaginär, so sind die beiden zur Achse normalen Sehnen reell, welche von C gleich entfernt sind und durch ein Punktepaar der obigen Involution gehen. (Vergl. Niemtschik: **59**, Jahrg. 1869 d. Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss.)

2) D. h. für alle Paare von doppelt berührenden Kreisen mit derselben Chordale C umhüllen alle Wechselsehnen der Berührungspunkte (und alle gemeinschaftlichen Kreistangenten, wie später gezeigt wird) eine Parabel, für welche C Scheiteltangente und der gemeinsame Halbierungspunkt ω je zweier Kreismittelpunkte Brennpunkt ist.

3) Diese bekannte Konstruktion ergiebt sich projektivisch sehr einfach aus dem Satze: Wenn sich zwei Kegelschnitte doppelt berühren, so schneiden sich die Polaren eines beliebigen Punktes auf der Berührungssehne, wenn man als den beliebigen Punkt den unendlich fernen Punkt eines Diameters wählt.

daher mufs h' der Halbierungspunkt der durch T ausgeschnittenen Kurvensehne sein[1]), d. h. die Symmetrale einer Kurvensehne T schneidet eine Achse im Halbierungspunkte ω der Mittelpunkte jener Kreise welche die Kurve doppelt berühren und T zur Tangente haben. (Die Berührungspunkte dieser Kreise $K_1 K_2$ mit T haben von h' eine Entfernung gleich der Tangente von h' an den Ähnlichkeitskreis K, von K_1 und K_2, weil dieser durch die Schnittpunkte von K_1 und K_2 gehen mufs.)

Betrachtet man eine der gemeinschaftlichen Tangenten von Berührungskreis und Kegelschnitt, z. B. (Fig. 19) die in p_1', so schneidet sie die Chordale in δ und die Berührungssehne des zweiten Kreises in π_2, so dafs $\delta p_1' = \delta \pi_2$, gleich der Tangente von δ an K_2 ist, d. h. der Kreis über $p_1' \pi_2$ schneidet K_2 rechtwinklig, oder p_1' ist zu π_2 harmonisch konjugiert bezüglich K_2; da K_2 ein beliebiger Berührungskreis des Kegelschnittes ist, giebt dies den Satz: Der Berührungspunkt einer beliebigen Kurventangente und ihr Schnittpunkt mit der Berührungssehne eines Kreises K sind bezüglich K harmonisch konjugiert, oder jeder der beiden Punkte liegt auf der Kreispolare des anderen.

Die Polare von π_2 geht durch den Pol τ_2 von P_2; daher kann man die Tangente eines Punktes p_1' in zweifacher Weise bestimmen: Entweder bringt man die Polare von p_1' bezüglich eines Berührungskreises K_2 mit der Berührungssehne P_2 in π_2 zum Schnitt, oder man sucht zu $p_1' \tau_2$ den Pol π_2 bezüglich K_2; $\pi_2 p_1'$ ist die gesuchte Tangente.

Sind $p_1 p_2$ die Berührungspunkte zweier Kreise $K_1 K_2$ mit einem Kegelschnitte, also von der Chordale C der Kreise gleich weit entfernt,

---

1) Projektivisch läfst es sich beweisen auf Grund des Satzes, dafs ein Büschel von sich doppelt berührenden Kegelschnitten eine Gerade in Punktepaaren einer Involution treffen, von welcher ein Doppelpunkt auf der gemeinsamen Berührungssehne liegt, und der andere der Berührungspunkt eines Kegelschnittes des Büschels ist: Eine gemeinschaftliche Tangente zweier Berührungskreise (Fig. 18) berühre diese in $t_1 t_2$, schneide die Kurve in $\alpha_1 \alpha_2$ und die Berührungssehnen $P_1 P_2$ in β_1 und β_2. Die Chordale C liegt in der Mitte zwischen den Berührungssehnen $P_1 P_2$, so dafs ihr Schnittpunkt h' mit der Tangente gleich entfernt von $\beta_1 \beta_2$ ist; $\alpha_1 \alpha_2$ müssen nun sowohl $\beta_2 t_2$ als $\beta_1 t_1$ harmonisch trennen; da $\beta_1 t_1 = \beta_2 t_2$ ist, mufs h' auch Halbierungspunkt von $\alpha_1 \alpha_2$ sein, ob diese Punkte reell oder imaginär sind.

Bei der Hyberbel läfst sich dies direkt mit Hilfe der Asymptoten beweisen: Sind (Fig. 11ª, 12ª) α und α' die Schnittpunkte von T mit den Asymptoten, so liegen $\omega \delta h' \alpha$ in einem Kreis, und es ist $\widehat{\alpha \omega h'} = \widehat{\alpha \delta h'} = \varphi$; ferner liegen $\omega \delta' h' \alpha'$ auf einem Kreis, daher ist $\widehat{\alpha' \omega h'} = \widehat{\alpha' \delta' h'} = \varphi$, also ist $\omega \alpha \alpha'$ ein gleichschenkliges Dreieck und $\alpha h' = \alpha' h'$, d. h. die Kreisberührungspunkte mit T liegen zu h' symmetrisch, ebenso die Schnittpunkte mit den Asymptoten und daher auch die Schnittpunkte mit der Hyperbel.

so schneidet $\overline{p_1 p_2}$ aus den Kreisen gleiche Sehnen aus, so daſs (Fig. 19) $p_2 p_1 \cdot p_2 q_1 = p_1 p_2 \cdot p_1 q_2$ ist, d. h. die Tangenten von p_1 an K_2 und von p_2 an K_1 haben gleiche Länge. (Der Kreis mit dem Zentrum o_1 durch p_2 und der Kreis mit dem Zentrum o_2 durch p_1 schneiden sich auf C). Die Länge dieser Tangenten bestimmt sich, wenn man durch p_2 eine Parallele zur Achse und durch o_2 eine Parallele zur Sehne $p_1 p_2$ zieht, wie folgt:

$$l^2 = p_2 p_1 \cdot p_2 q_1 = p_2 p_1 \cdot h_2 h_1 = \frac{\pi}{\cos\varphi} \cdot d \cos\varphi = \pi d$$

(d. i. das Produkt aus der Entfernung π der Berührungssehnen in die Entfernung d der Kreismittelpunkte).

Für den Schnittpunkt c der Chordale C mit dem Kegelschnitte ist daher die Länge der Tangente an K_1 oder K_2 gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der Entfernung der Berührungssehnen CP_1 oder CP_2 in die Entfernung der zugehörigen Kreismittelpunkte ωo_1 resp. ωo_2, d. h. $\sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2}}$, die Hälfte der früher gefundenen Gröſse l, oder die Summe der Tangenten von c an K_1 und K_2 ist gleich l; man kann leicht zeigen, daſs dies für jeden Kurvenpunkt gilt: Seien xx' die in einer beliebigen zur Achse normalen Geraden x liegenden Kurvenpunkte[1]); da die Entfernungen jedes Kreismittelpunktes (auf einer Achse) und der zugehörigen Berührungssehne vom Mittelpunkte der Kurve ein konstantes Verhältnis besitzen (bei der Parabel gleich 1), so muſs der zu X als Berührungssehne gehörige Kreismittelpunkt ξ die Strecke $o_1 o_2$ in demselben Verhältnisse teilen, wie X die Entfernung der Berührungssehnen $P_1 P_2$, und ist daher gegeben. Es ist also (Fig. 20):

$$\pi_1 : \pi = d_1 : d = \varepsilon_1 \text{ und } \pi_2 : \pi = d_2 : d = \varepsilon_2, \text{ wo } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$$

ist; nach früherem ist die Tangente von x an K_1 gleich

$$\sqrt{\pi_1 \cdot d_1} = \varepsilon_1 \sqrt{\pi \cdot d} = \varepsilon_1 \cdot l,$$

---

1) Der Punkt x kann auf verschiedene Weise bestimmt werden (Fig. 20):

1. x und p_1 sind vom Halbierungspunkte ω_1 der Strecke ξo_1 gleich weit entfernt.

2. Der Berührungskreis durch x mit dem Mittelpunkte ξ hat mit K_1 eine Chordale gemein, welche in der Mitte zwischen P_1 und X liegt.

3. Der Kreis durch p_1 mit dem Mittelpunkte ξ und der Kreis durch den gesuchten Punkt x mit dem Mittelpunkte o_1 haben eine Chordale, welche in der Mitte zwischen P_1 und X liegt.

4. Auch ergiebt sich die Länge der Tangente von x an K_1 aus dem später bewiesenen Satze, daſs die Länge der Tangente t_x von jedem Kurvenpunkte x an einen doppelt berührenden Kreis zu seiner Entfernung von der Berührungssehne ein konstantes Verhältnis besitzt, also $t_x : l = \pi_1 : \pi$.

ebenso ist die Tangente von x an K_2 gleich

$$\sqrt{\pi_2 \cdot d_2} = \varepsilon_2 \sqrt{\pi \cdot d} = \varepsilon_2 \cdot l,$$

und die Summe der Tangenten ist gleich $\sqrt{\pi \cdot d}$, also für alle Punkte der Kurve zwischen P_1 und P_2 konstant.

Für die Kurvenpunkte aufserhalb $P_1 P_2$ ist die Differenz der Tangenten an die festen Kreise $K_1 K_2$ konstant, d. h. der Ort aller Punkte, deren Tangenten an zwei feste Kreise $K_1 K_2$ eine konstante Summe oder Differenz l haben, ist ein Kegelschnitt, welcher die beiden Kreise doppelt berührt.[1]) Die Berührungspunkte haben von der Kreischordale eine Entfernung $\frac{\pi}{2} = \frac{l^2}{2d}$ und können leicht bestimmt werden, weil sie auf zu K_1 und K_2 konzentrischen Kreisen liegen mit den Radien $\sqrt{r_1^2 + l^2}$ resp. $\sqrt{r_2^2 + l^2}$.

Die Relation $l = \sqrt{\pi \cdot d}$ läfst sich umformen und daraus eine Kegelschnittseigenschaft herleiten: $l : \pi = \sqrt{d : \pi}$; nach früherem ist $d : \pi$ konstant und zwar $e^2 : b^2$, wenn die Mittelpunkte auf der Nebenachse, und $e^2 : a^2$, wenn sie auf der Hauptachse liegen; daher ist das Verhältnis der Entfernung jedes Kurvenpunktes x von der Berührungssehne eines doppelt berührenden Kreises zu der Länge der Tangente von x an den Kreis konstant und zwar $b : e$ oder $a : e$, je nachdem der Kreismittelpunkt auf der Neben- oder Hauptachse liegt.

Andrerseits ist $l : d = \sqrt{\pi : d}$ ($= b : e$ oder $a : e$); für eine gegebene konstante Summe oder Differenz l der Tangenten giebt es bei einer gegebenen Kurve unendlich viele Paare von Berührungkreisen mit konstantem Zentralabstand.

---

1) Diesen Satz legt Steiner ohne Beweis seiner Abhandlung: „Über einige neue Bestimmungsarten der Kurven zweiter Ordnung" (Ges. Werke II, 445) zu Grunde. Der Beweis ist analytisch leicht zu erbringen und ergiebt sich auch durch räumliche Betrachtungen, wenn man durch den Kegelschnitt einen Rotationskegel (resp. ein einschaliges Rotationshyperboloid) legt und durch die Kreise Kugeln, welche diese Fläche längs Parallelkreisen berühren; die konstante Summe oder Differenz der Kreistangenten ist dann gleich dem Stück einer Erzeugenden der Fläche zwischen den beiden Berührungspunkten, also konstant.

Fiedler hat in der früher zitierten Abhandlung (Acta mathematica 5) einen sehr interessanten Beweis in cyklographischer Methode gegeben.

Setzt man den Satz voraus, so ergiebt sich unmittelbar, dafs eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise die Kurve in zwei Punkten schneidet, welche vom Halbierungspunkte ihrer Zentren gleiche Abstände haben; denn (Fig. 18) $\alpha_1 t_1 + \alpha_1 t_2 = \alpha_2 t_1 + \alpha_2 t_2$, daher $\alpha_1 t = \alpha_2 t_2$. Der Halbierungspunkt von $\alpha_1 \alpha_2$ ist daher identisch mit dem Halbierungspunkte von $t_1 t_2$, welcher auf der Kreischordale liegt, und ist der Fufspunkt der Normale vom Halbierungspunkte der Kreismittelpunkte auf $\alpha_1 \alpha_2$. —

Liegen die Punkte des Kegelschnittes innerhalb der beiden Berührungskreise, so behalten diese Sätze ihre Giltigkeit, nur treten an die Stelle der Kreistangenten die durch einen Kurvenpunkt gehenden halben kürzesten Kreissehnen.

Bei der Parabel gelten die früheren Schlüsse nicht, da sie keinen endlichen Mittelpunkt besitzt; es erfahren die abgeleiteten Beziehungen eine kleine Veränderung: Die Gleichung $l^2 = \pi d$ geht (wegen $\pi = d$) über in $l = \pi = d$, woraus unmittelbar folgt, dafs die Entfernung eines Kurvenpunktes x von der Berührungssehne eines doppelt berührenden Kreises gleich ist der Länge der Tangente von x an diesen Kreis, und also auch die Summe oder Differenz der Tangenten von einem Kurvenpunkte x an zwei doppelt berührende Kreise konstant, nämlich gleich der Entfernung der beiden Berührungssehnen ist.

Auf Grund dieser elementar abgeleiteten Kegelschnittseigenschaften sollen nun einige Aufgaben gelöst werden.

II.

Kreise zu bestimmen, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren.[1])

1. *Der Kreismittelpunkt o ist gegeben.*

Der Radius ergiebt sich aus $r : of = a : e$, wenn o auf der Nebenachse einer Ellipse oder Hyperbel liegt — aus $r : \sqrt{of \cdot of'} = b : e$, wenn o auf der Hauptachse einer Ellipse oder Hyperbel liegt — aus $r = \sqrt{q \cdot 2\delta}$, wenn o auf einer Parabelachse liegt. (Übrigens wurden gelegentlich eine Reihe von Konstruktionen solcher Berührungskreise erwähnt.[2]))

Liegt o auf der Nebenachse, so sind die Berührungskreise immer reell; bei der Hyperbel ist auch immer die Berührung reell, bei der Ellipse nur für die Punkte o zwischen den Krümmungsmittelpunkten der Scheitel der Nebenachse.

1) Niemtschik: Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss. II. Abt. Dez. 1873, **68**.

2) Vergl. auch Pelz: „Beiträge zur Bestimmung der Selbst- und Schlagschattengrenze von Flächen 2. Ordnung“ (27. Jahresber. d. L. O. R. Graz, 1878. S. 7.)

Pelz: „Zur wiss. Behandlung der orthog. Axonometrie“ (Sitzungsber. d. Wien. Akad. der Wiss. **81**, **90**).

Pelz: „Zum Normalenproblem der Kegelschnitte“ (Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss. **85**).

Pelz: „Zum Normalenproblem der Ellipse (Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss. März 1887, **95**).

Pelz: „Konstruktion d. Achsen einer Ellipse“ (III. Programm d. Realschule in Teschen 1876).

Liegt o auf der Hauptachse, so erhält man

bei der Ellipse: Für Punkte o innerhalb der Krümmungsmittelpunkte $\mu\mu'$ der Scheitel der Hauptachse reelle Kreise mit reeller Berührung — für Punkte o zwischen μ und f reelle Kreise mit imaginärer Berührung — für Punkte o aufserhalb der Brennpunkte imaginäre Berührungskreise;

bei der Hyperbel: Für Punkte o aufserhalb der Krümmungsmittelpunkte $\mu\mu'$ der Scheitel der Hauptachse reelle Kreise mit reeller Berührung — für Punkte o zwischen μ und f reelle Kreise mit imaginärer Berührung — für Punkte o innerhalb der Brennpunkte imaginäre Berührungskreise;

bei der Parabel: Ist o mit dem Scheitel auf derselben Seite des Brennpunktes, so erhält man imaginäre Berührungskreise, sonst reelle; von diesen sind die Berührungspunkte imaginär, wenn o zwischen f und dem Krümmungsmittelpunkte des Scheitels liegt.

2. *Der Kreisradius ist gegeben.*

Zur Bestimmung des Kreismittelpunktes können dieselben Gleichungen wie früher benutzt werden; doch giebt es noch andere Konstruktionen; z. B. ist bei der Hyperbel die Entfernung des Kreismittelpunktes von einer Asymptote gegeben $\left(\sqrt{r^2 - a^2}\right.$ oder $\left.\sqrt{r^2 + b^2}\right)$, wodurch dieser leicht bestimmt werden kann.

Soll der Kreismittelpunkt auf der Nebenachse liegen, so mufs $r > a$ sein; soll er auf der Hauptachse liegen, so mufs bei der Ellipse $r < b$, bei der Parabel $r > q$ (d. i. Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie) für reelle Kreise sein. — Bei der Ellipse und Hyperbel treten die Lösungen paarweise symmetrisch zum Mittelpunkte auf.

3. *Eine Tangente T des Kreises ist gegeben.*

Der Schnittpunkt s_1 von T mit einer Achse ist ein Ähnlichkeitspunkt der gesuchten Kreise. Der Ähnlichkeitskreis K_s mufs durch s_1 gehen und entweder die Brennpunkte enthalten, oder den Brennkreis normal schneiden, ist daher eindeutig bestimmt. — Der Halbierungspunkt h' der auf T von der Kurve ausgeschnittenen Sehne resp. wenn diese Sehne imaginär ist, der Schnittpunkt h' mit dem zu T konjugierten Durchmesser der Kurve liegt auf der Chordale der gesuchten Kreise und des Ähnlichkeitskreises K_s; daher sind die Längen der Tangenten von h' an die gesuchten Kreise und an K_s gleich, und die Berührungspunkte von T mit den gesuchten Kreisen gefunden. Oder: Die Normale in h' auf T schneidet die Achse im Halbierungspunkte ω der gesuchten Kreismittelpunkte $o_1 o_2$, welche zum Ähnlichkeitskreis harmonisch konjugiert sind; ihre Entfernungen von ω sind daher gleich der Tangente von ω an K_s.

Diese Konstruktion versagt, wenn T parallel einer Achse ist. Sollen in diesem Falle die Mittelpunkte der gesuchten Kreise auf dieser Achse liegen, so ist der Kreisradius gegeben, welche Aufgabe schon behandelt wurde. Sollen die Kreismittelpunkte auf der zu T normalen Achse liegen, dann ist T die Chordale der gesuchten Kreise, welche sich im Schnittpunkte s_1 von T mit der Achse berühren. Der Ähnlichkeitskreis wird wie früher bestimmt; der Halbierungspunkt ω der gesuchten Kreismittelpunkte $o_1 o_2$ (welche zu K_s harmonisch konjugiert sind), ist der zu T als Berührungssehne gehörige Mittelpunkt und wird aus $m\omega : ms_1 = e^2 : b^2$ (resp. $e^2 : a^2$) gefunden oder durch eine der in den früheren Betrachtungen erwähnten Konstruktionen.

Da die auf T ausgeschnittene Sehne auch gleich l, der konstanten Summe oder Differenz der Längen der Tangenten (oder halben kürzesten Sehnen) an die zu suchenden Kreise, ist, kann auch die Beziehung $x : l = e : b$ zur Bestimmung der Berührungssehnen der gesuchten Kreise dienen.[1])

Auch wenn T parallel einer Asymptote ist, kann die allgemeine Konstruktion nicht verwendet werden, weil ω unendlich fern liegt. Es giebt nur je einen Kreismittelpunkt im Endlichen auf jeder Achse, welcher identisch ist mit dem Mittelpunkte des Ähnlichkeitskreises K_s[2]),

1) Auch folgende räumliche Betrachtung führt bei der Hyperbel für Kreise mit Mittelpunkten auf der Nebenachse zum Ziel: Man sucht den Mittelpunkt einer Kugel, welche ein einschaliges Rotationshyperboloid längs eines Parallelkreises und eine Ebene e berührt; das ist identisch mit der Aufgabe, in der Rotationsachse den Mittelpunkt einer Kugel zu suchen, welche eine Erzeugende des Hyperboloides und die Ebene e berührt.

2) Dieses Resultat läfst sich auch aus einer anderen Überlegung herleiten.

1. Der Kreismittelpunkt liege auf der Nebenachse (Fig. 21): Der zu dem gesuchten konzentrische Kreis K_R mit dem Radius R, welcher durch die Brennpunkte geht, schneidet die Asymptoten in dem Punktepaare $1 1'$, dessen Verbindungslinie die Tangente im Berührungspunkte p von K mit der Hyperbel ist. Aus $r : R = a : e = \cos\varphi$ folgt, dafs $\widehat{po1} = \widehat{\varphi}$ ist; betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ons_1, so folgt aus $on = r$ und $\widehat{nos_1} = \widehat{\varphi}$, dafs $os_1 = R$ ist, d. h. o liegt auf der Symmetralen von $s_1 f_1$, ist also der Mittelpunkt des durch s_1 gehenden Ähnlichkeitskreises K_R.

2. Der Kreismittelpunkt liege auf der Hauptachse (Fig. 22): Der zu dem gesuchten konzentrische Kreis K_R mit dem Radius $R = \sqrt{of \cdot of_1}$, welcher den Brennkreis normal schneidet, trifft die Asymptoten in dem Punktepaar $1 1'$, dessen Verbindungslinie die Tangente im Berührungspunkte p von K mit der Hyperbel ist (wegen $m1 \cdot m1' = mf^2$ oder $m1'' \cdot m1 = m\varphi^2$). Aus $r : R = b : e = \cos\varphi$ folgt, dafs $\widehat{po1} = \varphi$ ist; betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ons_1, so folgt aus $on = r$ und $\widehat{nos_1} = \varphi$, dafs $os_1 = R$ ist, d. h. s_1 liegt auf K_R, und der gesuchte Mittelpunkt o ist der Mittelpunkt des durch s_1 gehenden Ähnlichkeitskreises K_R.

der durch den Achsenschnittpunkt von T geht und wie früher bestimmt wird.

Wird eine Ellipse von der gegebenen Geraden T in reellen Punkten geschnitten, so sind die Kreise mit den Mittelpunkten auf der Hauptachse reell; wird sie von T in imaginären Punkten geschnitten, so sind die Kreise mit den Mittelpunkten auf der Nebenachse reell. Wenn T eine Ellipsentangente ist, so fallen die Kreismittelpunkte paarweise auf jeder Achse zusammen.

Wenn T eine Hyperbel in reellen Punkten schneidet, sind die Kreise mit den Mittelpunkten auf der Neben- und Hauptachse reell, sonst imaginär. Ist T eine Hyperbeltangente, so giebt es je einen (doppelt zu zählenden) Kreis mit dem Mittelpunkte auf der Haupt- resp. Nebenachse. — Ist T parallel einer Asymptote, so giebt es immer nur je einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Endlichen auf der Neben- resp. Hauptachse liegt.

Bei der Parabel erhält man nur dann zwei reelle Lösungen, wenn die Parabel von T in reellen Punkten geschnitten wird. Ist T Parabeltangente, so fallen die Lösungen zusammen; ist T parallel der Hauptachse, so liegt nur eine Lösung im Endlichen.

4. *Ein Punkt q des Kreises ist gegeben.*

Die Normale durch q zu einer Achse giebt die Chordale C der gesuchten Kreise, welche die Achse in h schneidet. Der Halbierungspunkt ω der gesuchten Kreismittelpunkte $o_1 o_2$ läfst sich nach einer der früher erörterten Methoden bestimmen, z. B. aus $m\omega : mh = e^2 : b^2$ (resp. $e^2 : a^2$). Der Ähnlichkeitskreis geht durch q und enthält entweder die Brennpunkte oder schneidet den Brennkreis normal.[1])

Liegt q in einer Achse, so ist die zur Achse normale Gerade durch q auch Kreistangente, welcher Fall schon früher besprochen ist.

Bei der Ellipse und Hyperbel sind für Punkte q aufserhalb der Kurve nur die Kreise mit den Mittelpunkten auf der Nebenachse reell, — für Punkte innerhalb derselben die Kreise mit den Mittelpunkten auf der Hauptachse. — Für Kurvenpunkte fallen die Lösungen paarweise zusammen, und es liegt je ein Kreismittelpunkt auf der Haupt- und Nebenachse. — Bei der Parabel giebt es nur für Punkte innerhalb der Parabel reelle Lösungen.

5. Es sind Kreise zu konstruieren, welche zwei Kegelschnitte $C_1 C_2$, deren eine Achse in dieselbe Gerade G fällt, gleichzeitig doppelt berühren. Der Ähnlichkeitskreis K_s zweier solcher Kreise trennt die

---

1) Die Achsenschnittpunkte des Kreises K_s, welcher K_φ normal schneidet und durch q geht, liegen auf den Halbierungsstrahlen des Winkels fqf'.

Brennpunkte von C_1 und C_2 harmonisch, wenn G die Hauptachse beider Kegelschnitte ist —, geht durch die Brennpunkte von C_1 und C_2, wenn G die Nebenachse von C_1 und C_2 ist —, enthält die Brennpunkte von C_1 und schneidet den Brennkreis von C_2 normal, wenn G die Nebenachse von C_1 und die Hauptachse von C_2 ist; in jedem Falle ist der Ähnlichkeitskreis K_s eindeutig bestimmt.

Jedes zu K_s harmonische Punktepaar $o_1 o_2$ stellt die Mittelpunkte zweier Berührungskreise $K_1 K_2$ dar, welche sich auf dem Ähnlichkeitskreise schneiden und deren Chordale C die zum Halbierungspunkte ω von $o_1 o_2$ gehörige Berührungssehne des betreffenden Kegelschnittes C_1 und C_2 bedeutet. Sollen zu zwei Mittelpunkten $o_1 o_2$ dieselben Berührungskreise bezüglich beider Kurven C_1 und C_2 gehören, so mufs die zum Halbierungspunkte ω gehörige Berührungssehne C bezüglich C_1 und C_2 den Ähnlichkeitskreis K_s in denselben Punkten treffen, daher identisch sein.

Man hat also jenen Punkt ω von G zu suchen, welchem bezüglich C_1 und C_2 dieselbe Berührungssehne zugeordnet ist: Sucht man die zu einer beliebigen Richtung R konjugierten Durchmesser D_1 und D_2 in beiden Kegelschnitten und schneidet dieselben mit der Normale zu R aus ω, so erhält man Punkte s_1 und s_2 der zu ω bezüglich C_1 und C_2 gehörigen Berührungssehnen; sollen diese identisch sein, so müssen s_1 und s_2 zusammenfallen und zwar in den Schnittpunkt δ von D_1 und D_2. Daher geht die gesuchte Gerade C durch den Schnitt von D_1 und D_2, ist also eindeutig bestimmt; ω liegt in der Normale zu R durch δ. Die gesuchten, C_1 und C_2 doppelt berührenden Kreise gehen durch die Schnittpunkte von C mit K_s, und ihre Mittelpunkte sind zu K_s harmonisch konjugiert und haben von ω gleiche Abstände.

III.

Kegelschnitte zu bestimmen, welche zwei feste Kreise doppelt berühren, und zwar symmetrisch zu derselben Achse.

Die Brennpunkte liegen entweder auf dem Ähnlichkeitskreise K_s der beiden gegebenen Kreise $K_1 K_2$, oder auf ihrer Zentrallinie, und sind harmonisch konjugiert bezüglich K_s. Die gemeinsamen Berührungssehnen der Kreise und des Kegelschnittes sind normal zur Zentrallinie und haben von der Chordale gleiche Entfernung. Sind $p_1 p_1'$ die Berührungspunkte des Kreises K_1 und des Kegelschnittes, so schneiden sich die gemeinsamen Tangenten von p_1 und p_1' im Punkte t_1 der Zentrallinie, und der Kreis K durch $p_1 p_1' t_1 o_1$ geht entweder durch die Brennpunkte oder schneidet den Brennkreis rechtwinklig. Die Chordale von

K und K_s geht durch den Kurvenmittelpunkt. Dies giebt den Zusammenhang zwischen Brennpunkten und Berührungspunkten, so daſs die einen sich aus den anderen bestimmen lassen. Auch wenn man den Kurvenmittelpunkt m wählt, sind die Brennpunkte und Berührungspunkte von $K_1 K_2$ gegeben, weil sich K aus K_s und der gemeinsamen Chordale durch m bestimmen läſst. Auch wenn die konstante Summe oder Differenz l der Längen der Kreistangenten aller Kurvenpunkte gegeben ist, lassen sich nach den früheren Betrachtungen die Berührungspunkte und daher auch die Brennpunkte finden.

Steiner hat die Beziehungen der möglichen doppelt berührenden Kegelschnitte zu den beiden Kreisen ausführlich erörtert[1]; sie mögen in dem Falle, daſs die beiden Kreise 4 reelle gemeinsame Tangenten besitzen, angeführt werden. Weil die Berührungssehnen von K_1 resp. K_2 symmetrisch zu ihrer Chordale liegen, wird es genügen nur den Kreis K_1 in Betracht zu ziehen (vergl. Fig. 23): Unter den doppelt berührenden Kegelschnitten kommt eine *Parabel* vor, deren Brennpunkt f der Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises K_s ist; die zugehörigen Berührungspunkte $p_1 p_1'$ mit K_1 haben vom Brennpunkte f dieselbe Entfernung wie der Kreismittelpunkt o_1. Von dieser Berührungssehne pp' der Parabel ausgehend, entsprechen allen Berührungssehnen, welche nicht auf der Seite der Chordale liegen, *Ellipsen*, deren Mittelpunkte m die Zentrallinie vom unendlich fernen Punkte bis zum Halbierungspunkte w von $o_1 o_2$ erfüllen, und zwar jenen Teil der Zentrallinie, welcher nicht die Ähnlichkeitspunkte enthält (demnach ist auch der Mittelpunkt des gröſseren der gegebenen Kreise Mittelpunkt einer solchen Ellipse, welche zur Nebenachse den Kreisdurchmesser besitzt).

Den Berührungssehnen zwischen pp' und der Chordale entsprechen *Hyperbeln* und zwar: den Berührungssehnen zwischen den Berührungspunkten pp' der Parabel und den Berührungspunkten der äuſseren gemeinsamen Kreistangenten entsprechen Hyperbeln, deren Mittelpunkte die Zentrallinie vom unendlich fernen Punkte bis zum äuſseren Ähnlichkeitspunkt s' erfüllen; — den Berührungssehnen zwischen den Berührungspunkten der äuſseren und inneren gemeinsamen Kreistangenten entsprechen Hyperbeln, deren Hauptachse normal zur Zentrallinie ist und dieselbe zwischen dem äuſseren und inneren Ähnlichkeitspunkte trifft. Brennpunkte sind die Schnittpunkte der Hauptachse mit dem Ähnlichkeitskreis. Für den äuſseren und inneren Ähnlichkeitspunkt s und s'

---

1) Ges. Werke II, 451, 457 u. ff. Steiner leitet sie aus den verschiedenen Werten der konstanten Summe oder Differenz l der Kreistangenten aller Kurvenpunkte ab; sie ergeben sich auch leicht aus dem erwähnten Zusammenhange zwischen Brennpunkten und Berührungspunkten.

als Kurvenmittelpunkt zerfällt der Kegelschnitt in das Geradenpaar der äufseren resp. inneren Kreistangenten. — Den Berührungssehnen zwischen den Berührungspunkten der inneren Tangenten und der Chordale entsprechen Hyperbeln, deren Mittelpunkte die Zentrallinie (welche Hauptachse ist) vom inneren Ähnlichkeitspunkte bis zur Chordale durchlaufen — den Berührungssehnen, welche mit K_1 auf der entgegengesetzten Seite der Chordale liegen, entsprechen imaginäre doppelt berührende Kegelschnitte, deren Mittelpunkte zwischen der Chordale und dem Halbierungspunkt w von $o_1 o_2$ liegen.

Bei den anderen Lagen der gegebenen Kreise, in denen nur zwei oder keine reellen gemeinsamen Kreistangenten möglich sind, werden diese Beziehungen kleine Veränderungen erleiden, indem gewisse Gruppen von Kegelschnitten ausfallen. Eine neu hinzukommende Gruppe ist hervorzuheben, nämlich jene Ellipsen, deren Nebenachse die Zentrallinie ist, und deren Brennpunkte auf jenem Teile des Ähnlichkeitskreises liegen, welcher innerhalb der beiden Kreise $K_1 K_2$ sich befindet. Für einen innerhalb $K_1 K_2$ liegenden Ähnlichkeitspunkt s als Kurvenmittelpunkt fallen auch die Brennpunkte in den Punkt s; die Ellipse reduziert sich auf diesen Punkt s (oder der Kegelschnitt degeneriert in ein imaginäres Geradenpaar, das sich in s schneidet).

Wenn einer der gegebenen Kreise K_2 den Radius Null hat, so ist sein Mittelpunkt o_2 ein Brennpunkt, weil dann beide Ähnlichkeitspunkte in o_2 zusammenfallen. Da vorausgesetzt wurde, dafs die Kreismittelpunkte auf derselben Achse liegen, so ist die Zentrale Hauptachse. Die Kurve wird wie im allgemeinen Falle aus einem Berührungspunkte oder dem Kurvenmittelpunkte oder dem zweiten Brennpunkte oder der konstanten Summe oder Differenz der Tangenten (resp. halben kürzesten Sehnen) bestimmt. — Statt des Berührungspunktes von K_1 kann auch die zum Kreise K_2 mit dem Radius Null gehörige Berührungssehne gegeben sein; es ist die Polare des Brennpunktes o_2 der Kurve (die Leitlinie). Die Berührungssehne für K_1 ist symmetrisch bezüglich der Chordale, welche die Tangenten von o_2 an K_1 halbiert, dadurch ist die Aufgabe auf eine bekannte zurückgeführt.

Wenn statt eines Kreises, nur der Mittelpunkt o_2 und die zugehörige Berührungssehne P_2 gegeben sind, so läfst sich diese Aufgabe auch auf die erörterten zurückführen: Ist der Berührungspunkt p_1 von K_1 gegeben, so bestimmt sich der auf P_2 liegende Berührungspunkt p_2 aus $\omega p_1 = \omega p_2$. — Ist der Kurvenmittelpunkt m gegeben, so giebt der Satz, dafs sich ein Kurvendurchmesser und die zu m konjugierte Normale durch o_2 auf der zugehörigen Sehne P_2 schneiden, beliebig viele Paare konjugierter Durchmesser, welche auf Grund desselben Satzes

zur Bestimmung der Berührungssehne von K_1 verwendet werden können. — Ist ein Brennpunkt f gegeben, so gehört zum Halbierungspunkte μ von fo_1 als Berührungssehne M die Chordale von f und K_1 d. h. die Gerade, welche die Tangenten von f an K_1 halbiert. Daraus läfst sich P_1 bestimmen, da die Entfernungen von $P_2 M$ und der gesuchten P_1 proportional sind den Entfernungen von $o_2 \mu$ und o_1.

Im folgenden seien aufser den beiden Kreisen $K_1 K_2$ andere Bestimmungsstücke des doppelt berührenden Kegelschnittes gegeben.

1. *Ein Kurvenpunkt q ist gegeben.*[1]) Der Punkt q mufs entweder innerhalb oder aufserhalb beider Kreise liegen; im ersteren Falle ist die gesuchte Kurve eine Ellipse, deren Nebenachse mit der Zentrale der Kreise zusammenfällt. — Die Tangenten von q an die beiden Kreise $K_1 K_2$ (resp. die kürzesten Sehnen durch q) haben eine Summe l und Differenz λ; jeder dieser Gröfsen entspricht je ein doppelt berührender Kegelschnitt. Die Berührungspunkte desselben mit K_1 oder K_2 ergeben sich aus l resp. λ; so liegen z. B. die Berührungspunkte von K_1 auf einem zu K_2 konzentrischen Kreise mit dem Radius $\sqrt{r_2^2 + l^2}$ (resp. $\sqrt{r_2^2 + \lambda^2}$), wenn q aufserhalb beider Kreise liegt, und mit dem Radius $\sqrt{r_2^2 - l^2}$ (resp. $\sqrt{r_2^2 - \lambda^2}$), wenn q innerhalb derselben liegt. — Ist q auf der Chordale C der beiden Kreise gegeben, so vereinfacht sich die Lösung, da der in q berührende Kreis den Mittelpunkt ω hat und daher gegeben ist; seine Chordalen mit K_1 und K_2 liegen in der Mitte zwischen den gesuchten Berührungssehnen und der Geraden C.

Ist q auf dem Ähnlichkeitskreise von $K_1 K_2$ gegeben, so enthalten die Tangenten der beiden durch q gehenden Kegelschnitte den inneren und äufseren Ähnlichkeitspunkt von $K_1 K_2$. — Die beiden durch q gehenden Kegelschnitte haben aufser q noch drei Punkte $q_1 q_2 q_3$ gemein, welche auf dem Kreise durch q mit dem Mittelpunkte ω liegen; sie haben von der Chordale C dieselben Abstände wie q.[2]) (Zwei dieser Punkte können auch imaginär sein). Dies läfst sich auch anders aus-

1) Steiner behandelt den allgemeinen Fall, dafs ein Kegelschnitt gesucht wird, welcher zwei gegebene Kegelschnitte doppelt berührt und durch einen gegebenen Punkt geht (Ges. Werke II, 480); vergl. auch Niemtschik (69. und 71. Bd. der Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss.).

2) Sind die Punkte $q_1 q_2 q_3$ reell, so ergiebt sich folgende projektivische Bestimmung des Kegelschnittes: Die Wechselsehne qq_3 wird von K_1 und dem gesuchten Kegelschnitte C_2 in Punktepaaren einer Involution geschnitten, von deren Doppelpunkten einer durch die Berührungssehne von K_1 und C_2 ausgeschnitten wird. Sucht man daher das Punktepaar xx', welches zu qq_3 und dem Kreise K_1 gleichzeitig harmonisch konjugiert ist, so giebt die Normale zur Zentrale durch x oder x' eine gesuchte Berührungssehne von K_1; man erhält also zwei Kegelschnitte. (Natürlich kann K_2 in derselben Weise benützt werden und liefert dieselben Resultate.)

sprechen: Je zwei Kegelschnitte, welche zwei gegebene Kreise symmetrisch zur gleichen Achse berühren, schneiden sich in 4 Punkten, welche vom Halbierungspunkte ω der Kreismittelpunkte gleiche Entfernung haben.[1]) Da man zu diesen Kegelschnitten auch ein gemeinsames (inneres oder äufseres) Tangentenpaar zählen mufs, ist darin der früher abgeleitete Satz enthalten: „ω liegt auf der Symmetrale der durch eine gemeinsame Kreistangente ausgeschnittenen Kurvensehne".

Wenn statt eines Kreises K_2 ein Brennpunkt f gegeben ist, tritt nur an Stelle der einen Kreistangente aus q_1 die Entfernung des Punktes q von f. Auch die Bestimmung der noch mitgegebenen Punkte $q_1 q_2 q_3$ bleibt dieselbe, weil die Gerade, welche die Tangenten von f an den Kreis K_1 halbiert, die Stelle der Chordale C vertritt, und ω die Strecke $o_1 f$ halbiert.

Diese 3 weiteren Kurvenpunkte $q_1 q_2 q_3$ lassen sich auch bestimmen, wenn statt der beiden Kreise nur die Mittelpunkte $o_1 o_2$ und die zugehörigen Berührungssehnen $P_1 P_2$ gegeben sind, weil die Chordale C mitten zwischen P_1 und P_2 liegt. Zur Bestimmung des Kegelschnittes sucht man den in q berührenden Kreis; sein Mittelpunkt x teilt die Strecke $o_1 o_2$ im gleichen Verhältnisse wie q die Entfernung der Berührungssehnen $\pi_1 \pi_2$.[2]) Auch der Mittelpunkt m der Kurve läfst sich direkt bestimmen, da $m o_1 : m \pi_1 = m o_2 : m \pi_2$ ist; m mufs daher die Strecken $o_1 \pi_1$ und $o_2 \pi_2$ im gleichen Verhältnisse teilen[3]); mp ist dann

---

1) Da sich für zwei Kegelschnitte $C_1 C_2$, deren eine Achse in dieselbe Gerade G fällt, immer zwei Kreise bestimmen lassen, welche gleichzeitig C_1 und C_2 doppelt berühren, ist die Bestimmung der 4 Schnittpunkte zweier solcher Kegelschnitte C_1 und C_2 ermöglicht: Wie man ω, den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$, auf welchem die 4 Schnittpunkte liegen, findet, sowie die Gerade C, auf welcher die Halbierungspunkte der 4 Wechselsehnen dieser Schnittpunkte liegen, wurde gezeigt (II. Aufgabe 5). Alle Kegelschnitte durch die gesuchten 4 Punkte bestimmen auf G eine Involution, welche durch die beiden Schnittpunktepaare von C_1 und C_2 gegeben ist: Das Punktepaar dieser Involution, welches ω zum Halbierungspunkte hat, liegt auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ durch die 4 gesuchten Punkte. — Das Punktepaar der Involution, welches durch C halbiert wird, liegt auf den zu G normalen Sehnen $S_1 S_2$ der gesuchten Punkte. — Die Doppelpunkte der Involution e_1 und e_2 liegen auf den Wechselsehnen der gesuchten Punkte; diese Wechselsehnen sind bestimmbar, da sie durch die Schnittpunkte von C mit den Kreisen über $e_1 \omega$ und $e_2 \omega$ gehen. (Vergl. Niemtschik, 59. Bd. d. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. 1869.)

2) Oder mit Benutzung der Punkte $q_1 q_2 q_3$: Auf einer Wechselsehne $q q_3$ ist durch $q q_3$ und den Schnitt mit P_1 als Doppelpunkt eine Involution bestimmt, welcher auch die Schnittpunkte von K_1 angehören; da diese vom Fufspunkte der Normale aus o_1 auf $q q_3$ gleich entfernt sind, können sie bestimmt werden.

3) Man zeichnet über $o_1 \pi_1$ und $o_2 \pi_2$ ähnliche Dreiecke; auf der Verbindungslinie der dritten Ecken liegt m. Oder zwei Parallele durch o_1 und o_2 schneiden P_1 und P_2 in Punkten eines Durchmessers.

ein Durchmesser der Kurve und schneidet P_1 und P_2 in Punkten α_1 und α_2, so dafs $o_1\alpha_1$ und $o_2\alpha_2$ parallel sind und normal zur Richtung der Tangente in p. (Diese Aufgabe ist eindeutig).

Ist ein Berührungskreis K, ein Kurvenpunkt q und der Mittelpunkt m der Kurve gegeben, so läfst sich dies auf den betrachteten Fall zurückführen, weil auch der zu K bezüglich m symmetrische Kreis ein Berührungskreis der gesuchten Kurve sein mufs.

2. *Eine Kurventangente T ist gegeben.*

Man sucht den Berührungspunkt x; er hat die Eigenschaft, dafs aufser ihm auf T kein Punkt existiert, dessen Tangenten oder kürzeste Sehnen an die beiden Kreise dieselbe Summe oder Differenz besitzen. Nachdem die Kreismittelpunkte auf derselben Achse liegen sollen, mufs T mit beiden Kreisen reelle oder imaginäre Punkte gemein haben.

a) T schneidet keinen der beiden Kreise $K_1 K_2$. Fällt man (Fig. 24) von o_1 auf T eine Normale nach n_1 und trägt von n_1 auf der Normale die Länge der Tangente an K_1 nach beiden Seiten auf: $n_1 d_1 = n_1 d_1' = t_1$, so ist die Länge jeder Tangente von einem Punkte x der Geraden T an K_1 gleich xd_1 oder xd_1', wegen $t_x^2 = xo_1^2 - r_1^2 = xn_1^2 + n_1 o_1^2 - r_1^2 = xn_1^2 + t_1^2 = xd_1^2$. Ebenso bestimmt man für K_2 den Punkt d_2. Die Summe oder die Differenz l der Tangenten von den Punkten x der Geraden T an K_1 und K_2 ist daher gleich $xd_1 \pm xd_2$; nun ist x so auf T zu bestimmen, dafs es keinen anderen Punkt auf T giebt, dessen Entfernungen von d_1 und d_2 dieselbe Summe oder Differenz besitzen; d. h. es ist der Berührungspunkt desjenigen Kegelschnittes mit T zu finden, welcher d_1 und d_2 oder d_1' und d_2 zu Brennpunkten hat. Der gesuchte Berührungspunkt x liegt auf $d_1'd_2$ resp. $d_1 d_2$. Die Zentrale der Kreise ist Hauptachse der Kurve. Die Schnittpunkte $\alpha_1\alpha_2$ der Berührungssehnen mit T liegen auf den Kreispolaren von x, oder können aus der Beziehung $\widehat{xd_1'\alpha_1} = 90^0 = \widehat{xd_2\alpha_2}$ bestimmt werden.[1])

b) T schneidet die beiden Kreise $K_1 K_2$. Bestimmt man jene beiden Kreise $\varkappa_1 \varkappa_2$, welche die Schnittsehnen von T mit $K_1 K_2$ zu Durchmessern haben, so sind die Tangenten oder kürzesten Sehnen eines beliebigen Punktes von T an K_1 und $\varkappa_1$, resp. K_2 und $\varkappa_2$ gleich. Alle Kegelschnitte, welche $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ doppelt berühren, schneiden T in zwei Punkten; wir suchen jene, für welche die beiden Schnittpunkte zusammenfallen; da T eine Axe für diese Kegelschnitte ist, kann dies

1) Sei (Fig. 24) π der Pol von T, also $xo_1 \parallel \pi\alpha_1$, so ist $\triangle \alpha_1 n_1 \pi \sim \triangle o_1 n_1 x$ und daher $n_1\alpha_1 \cdot n_1 x = n_1\pi \cdot n_1 o_1 = t_1^2 = n_1 d_1^2$, daher liegen $\alpha_1 x d_1$ in einem Halbkreise.

nur eintreten, wenn auf T ein Doppelpunkt der Kurve liegt, d. h. der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt, dessen Schnittpunkt auf T liegt. Der innere und äufsere Ähnlichkeitspunkt von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind die gesuchten Berührungspunkte von T.

Dieselben sind immer reell, auch wenn das Geradenpaar imaginär ist. — Die Zentrale der gegebenen Kreise ist Nebenachse der gesuchten Kurve.

Hat einer der gegebenen Kreise den Radius Null, ist also ein Brennpunkt, so ist die Lösung analog. Da hier die Zentrale einen Brennpunkt enthält, also Hauptachse sein mufs, erhält man nur Lösungen, wenn T den gegebenen Kreis nicht schneidet.

Für einen Kegelschnitt, welcher T zur Tangente hat und $K_1 K_2$ doppelt berührt, lassen sich noch 3 andere Tangenten $T_1 T_2 T_3$ bestimmen: Bringt man T und die zur Zentrale symmetrische Tangente T_1 mit dem Ähnlichkeitskreise von $K_1 K_2$ zum Schnitt, so sind die nicht zur Zentrale normalen Verbindungslinien der 4 Schnittpunkte auch Tangenten desselben Kegelschnittes.[1]) Da es nun bei gegebener Kurventangente zwei $K_1 K_2$ doppelt berührende Kegelschnitte giebt, läfst sich dies auch so aussprechen: Je zwei Kegelschnitte, welche zwei Kreise (symmetrisch zur Zentrale) doppelt berühren, haben 4 gemeinsame Tangenten, deren Schnittpunkte auf dem Ähnlichkeitskreis von $K_1 K_2$ liegen.[2])

1) Daraus ergiebt sich eine projektivische Lösung der Aufgabe: Alle Kegelschnitte, welche 2 Gerade $G_1 G_2$ in denselben Punkten berühren, bilden eine Schar; die Tangenten an dieselben von einem beliebigen Punkte x bilden eine Involution, von welcher ein Doppelstrahl nach dem Schnittpunkte von $G_1 G_2$ gerichtet ist. Wählt man als x den Schnitt zweier Tangenten auf dem Ähnlichkeitskreise, so ist durch diese und die Tangenten an K_1 die Involution bestimmt, deren Doppelstrahlen die Zentrale in 2 Punkten x_1 x_1' schneiden; die Polare von x_1 (oder x_1') bezüglich K_1 giebt die gesuchte Berührungssehne dieses Kreises. (In gleicher Weise kann auch K_2 benützt werden.)

2) Dies giebt ein Mittel, die 4 gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte $C_1 C_2$, deren eine Achse auf derselben Geraden G liegt, zu bestimmen: Alle Kegelschnitte, welche 4 Gerade berühren, bilden eine Schar; die zu G normalen Tangenten schneiden G in einer Involution, welche durch die Schnitte von C_1 und C_2 mit G bestimmt ist; durch die Doppelpunkte $e_1 e_2$ gehen die zu G normalen Diagonalseiten des Vierseits der gesuchten Tangenten; diese schneiden den Ähnlichkeitskreis K_s (der beiden C_1 und C_2 doppelt berührenden Kreise), dessen Bestimmung früher (II, Aufg. 5) gezeigt wurde, in 2 Paaren von Gegenecken des Vierseites der 4 Tangenten; das dritte Gegeneckenpaar liegt auf G und mufs einerseits zu $e_1 e_2$, andrerseits zum Kreise K_s harmonisch konjugiert sein, ist daher bestimmbar und kann auch zur Konstruktion der Tangenten verwendet werden, weil die vom Mittelpunkte des Kreises K_s auf die gesuchten Tangenten gefällten Normalen diese in Punkten treffen, welche auf der Symmetrale von $e_1 e_2$ liegen.

Sind statt der beiden Kreise die Mittelpunkte $o_1 o_2$ und zugehörigen Berührungssehnen $P_1 P_2$ gegeben, so ist der Berührungspunkt der Tangente unmittelbar gegeben; denn die Normale von o_1 auf T mufs P_1 in einem Punkte α_1 des zu T konjugierten Durchmessers treffen, und ebenso schneidet die Normale von o_2 auf T die Sehne P_1 in einem Punkte α_2 desselben Durchmessers; $\alpha_1 \alpha_2$ schneidet daher T im gesuchten Berührungspunkte, die Zentrale im Mittelpunkte des gesuchten Kegelschnittes. (Diese Aufgabe ist eindeutig.)

Ist ein Berührungskreis K, der Kurvenmittelpunkt m und eine Kurventangente gegeben[1]), so läfst sich dies auf die erörterte Aufgabe zurückführen, da auch der zu K bezüglich m symmetrische Kreis die gesuchte Kurve doppelt berühren mufs.

3. *Ein dritter doppelt berührender Kreis K_3 ist gegeben.*

Sein Mittelpunkt mufs auf der Zentrale $o_1 o_2$ liegen, da sonst der Kurvenmittelpunkt gegeben und K_3 nicht mehr willkürlich wäre. Schneiden sich die Ähnlichkeitskreise von $K_1 K_2 K_3$ in 2 reellen Punkten, so sind dies die Brennpunkte der gesuchten Kurve, und die gemeinsame Zentrale G ist Nebenachse. Die Schnittpunkte von fo_1, fo_2, fo_3 mit den Kreisen $K_1 K_2 K_3$ liegen auf der Scheiteltangente. — Im andern Falle ist G Hauptachse und die Brennpunkte trennen die 3 Ähnlichkeitskreise gleichzeitig harmonisch.

Ist statt des dritten Kreises der Mittelpunkt o_3 und die zugehörige Berührungssehne P_3 gegeben, so benutzt man C und ω zur Bestimmung des Kurvenmittelpunktes; zwei parallele Gerade durch o_3 und ω schneiden P_3 und C in Punkten eines Durchmessers u. s. w.

Sind ein Kreis K_1 und 2 Mittelpunkte $o_2 o_3$ mit zugehörigen Berührungssehnen $P_2 P_3$ gegeben, so bestimmt man einerseits wie früher den Kurvenmittelpunkt, andrerseits P_1, welche Gerade $P_2 P_3$ in demselben Verhältnis trennt, wie o_1 die Strecke $o_2 o_3$ u. s. w.

4. *Das Verhältnis der Achsen ist gegeben.*

Dann ist auch $a : e$ resp. $b : e$ gegeben; die Brennpunkte ergeben sich aus dem Ähnlichkeitskreis mit Hilfe der Gleichungen $o_1 f = r_1 \cdot \frac{e}{a}$ resp. $\sqrt{o_1 f \cdot o_1 f'} = r_1 \frac{e}{b}$.

IV.

Die früheren Aufgaben lassen sich auch lösen, wenn die beiden gegebenen Kreise zusammenfallen, d. h. *ein Kreis K und seine Berührungssehne P mit der zu suchenden Kurve* gegeben sind:

1) Niemtschik löst diese spezielle Aufgabe durch räumliche Betrachtung im 68. Bd. d. Wien. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. II. Abt. Nov. 1873.

1ª. *Ein Kurvenpunkt q ist gegeben.*

Der zu q gehörige Berührungskreis K' läfst sich eindeutig bestimmen, da seine Chordale mit K von P und q gleiche Entfernung hat. Sind die Schnittpunkte pp' von P und K reell, so läfst sich der Kreismittelpunkt o' finden, da der Halbierungspunkt von oo' auf der Symmetrale von pq liegt. — Auch kann man direkt die Tangente T des Punktes q finden, da ihr Schnittpunkt mit P auf der Kreispolare von q liegt.

Legt man durch q eine beliebige Gerade X, so läfst sich der zweite Kurvenpunkt x auf X bestimmen, weil die Entfernungen aller Kurvenpunkte von P zu ihren Tangenten oder kürzesten Sehnen an K ein konstantes Verhältnis besitzen:

Ist q (Fig. 25) innerhalb K, und schneidet X die Sehne P in α, den Kreis K in 1 und 2, so mufs $\sqrt{q1 \cdot q2} : q\alpha = \sqrt{x1 \cdot x2} : x\alpha$ sein; zeichnet man über 12 als Durchmesser einen Kreis, so müssen die Endpunkte der zu $\overline{12}$ normalen Sehnen in q und x auf einer Geraden durch α liegen.[1]) Daraus folgt, dafs zu α bezüglich qx und bezüglich 12 derselbe Punkt β harmonisch konjugiert ist; β liegt auf der Kreispolare von α; um also x zu finden, bestimmt man zu q den harmonisch konjugierten Punkt bezüglich α und der Kreispolare von α.

Wenn q aufserhalb K liegt und X den Kreis K schneidet, kann man q und X als Mittelpunkte von Kreisen auffassen, welche K normal schneiden, und deren Radien (das sind die Tangenten von q und x an K) sich verhalten wie $q\alpha : x\alpha$, d. h. α ist ein Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise; der zweite Ähnlichkeitspunkt β mufs daher (vergl. Fig. 13) zu α bezüglich K harmonisch konjugiert sein, d. h. β liegt auf der Kreispolare von α, und die Kurvenpunkte qx werden durch α und β harmonisch getrennt.

Wenn q aufserhalb K liegt und X den Kreis K nicht schneidet, kann man q und x als Mittelpunkte von Kreisen auffassen, welche (Fig. 26) durch 2 Punkte d und d' gehen, und deren Radien (das sind die Tangenten von q und x an K) sich verhalten wie $q\alpha : x\alpha$, d. h. α ist ein Ähnlichkeitspunkt dieser Kreise; der zweite Ähnlichkeitspunkt β wird aus $\widehat{\alpha d \beta} = 90^0$ erhalten; daher liegt β auf der Kreispolare von α.[2])

Man erhält in allen Fällen das gleiche Resultat: x ist zu q harmonisch bezüglich des auf P liegenden Punktes α von X und der

1) Niemtschik leitet dieselbe Konstruktion durch räumliche Betrachtung ab.
2) Vergl. Fig. 24.

Polare von α.[1]) Hält man X fest, so sind die Schnittpunkte aller Kegelschnitte, welche K in denselben Punkten berühren, harmonisch konjugiert zu α und β; rückt q nach β, so fällt auch x nach β, woraus wieder folgt, dafs der Kegelschnitt dieses Büschels, welcher X berührt, seinen Berührungspunkt in der Kreispolare von α hat.[2]) Diese Betrachtungen sind ganz unabhängig davon, ob P den Kreis K in reellen oder imaginären Punkten schneidet.

Wählt man X durch den Pol π von P (Fig. 27), so fällt β mit π zusammen; dann schneiden sich die Polaren von q und x auf P und zwar im Pole y von $q\pi$, oder die Kegelschnittstangenten in q und x schneiden sich auf P, und $qx\alpha\pi$ sind harmonisch; d. h. „für jeden Punkt y von P treffen die Tangenten an einen Kegelschnitt des Büschels die Polare von y in Punkten, welche durch π und P harmonisch getrennt werden“, und „für jede Gerade durch π ist der Pol bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels identisch mit dem Pol bezüglich des Kreises K“.

2ª. *Eine Kurventangente T ist gegeben.*

Sind die Tangenten von π an K reell, so schneiden sie T in Punkten eines Ähnlichkeitskreises K_s; der gegebene Kreismittelpunkt o und der zu T gehörige sind zu K_s harmonisch konjugiert u. s. w.

In jedem Falle ist es aber einfacher, zuerst den Berührungspunkt t von T als harmonisch konjugiert zu P bezüglich K zu bestimmen[3]), woraus sich dann die Brennpunkte konstruieren lassen.

---

1) Liegt q insbesondere auf der Verbindungslinie von o mit dem Pole π der Geraden P, ist also ein Scheitel der gesuchten Kurve, so ist der zweite Scheitel harmonisch konjugiert zu q bezüglich P und π.

2) Dafs der Berührungspunkt β auf der Polare von α liegt, kann man auch direkt aus obigen Betrachtungen ableiten: Nach Fig. 25 erhält man die Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnittes des Büschels mit X, wenn man durch α eine Gerade zieht, sie mit dem Kreise über 12 zum Schnitt bringt und durch diese Schnittpunkte die Normalen auf X fällt. Soll X Tangente einer Kurve werden, also die beiden Scknittpunkte von X mit der Kurve zusammenfallen, so mufs dieser Berührungspunkt auf der Berührungssehne der Tangenten aus α an den Kreis über 12 liegen.

Nach Fig. 26 liegen die Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnittes des Büschels mit X auf Kreisen, welche ihre Mittelpunkte auf αd haben und αd harmonisch trennen; soll X Tangente einer Kurve sein, so mufs der erwähnte Kreis X berühren; daher liegt der Berührungspunkt auf der Normale durch d zu αd.

Nebenbei ist dies der bekannte Satz: Alle Kegelschnitte, welche zwei Gerade in denselben Punkten berühren, schneiden jede Gerade X in einer Involution; ein Doppelpunkt liegt auf der gemeinsamen Berührungssehne; im anderen wird X von einem Kegelschnitte des Büschels berührt.

3) Schneidet T die Tangenten von p und p' in den Punkten α und α', so liegt t auch auf der Verbindungslinie von π mit dem Schnittpunkt von $\alpha p'$ und $\alpha' p$.

Auch kann man weitere Tangenten der Kurve finden:

Man sucht zuerst (Fig. 28) auf einer beliebigen Geraden X durch t den zweiten Kurvenpunkt t_1 als harmonisch konjugiert bezüglich α und seiner Polare A. Sowie die Tangente in t durch den Pol y von πt geht, enthält die Tangente in t_1 den Pol y_1 von πt_1; nun sind πt und πt_1 und daher[1]) auch deren Pole y und y' harmonisch konjugiert zu α und A. Die beiden Kurventangenten yt und $y_1 t_1$ müssen sich demnach in einem Punkte x der Geraden A schneiden, welche die zu α bezüglich der Punktepaare yy_1 und tt_1 harmonisch konjugierten Punkte enthält, d. h. die durch einen beliebigen Punkt x gehenden Tangenten eines doppelt berührenden Kegelschnittes C_2 werden durch die Verbindungslinie $x\pi$ und den Schnitt α der Polare X von x bezüglich C_2 mit P harmonisch getrennt. Da nun α der Kreispol von $x\pi$, also unabhängig von C_2 ist, erhält man die beiden Sätze:

Die Polaren eines beliebigen Punktes x (d. i. die Berührungssehnen der Tangenten aus x) bezüglich aller den Kreis K in denselben 2 Punkten berührenden Kegelschnitte schneiden sich in einem Punkte α der gemeinsamen Berührungssehne; α liegt auch auf der Kreispolare von x. — Die Tangentenpaare aus x an alle den Kreis K in denselben 2 Punkten pp' berührenden Kegelschnitte werden durch die Geraden $x\pi$ und $x\alpha$ harmonisch getrennt; dabei ist π der Pol von pp' und α der Pol von $x\pi$ bezüglich K; $x\alpha$ ist daher die Tangente des durch x gehenden Kegelschnittes der Schar.

Wenn x aufserhalb K liegt, werden auch die Tangenten an K durch $x\pi$ und $x\alpha$ harmonisch getrennt; wenn x innerhalb K liegt, schneidet jedes Tangentenpaar eines Kegelschnittes den Kreis K in den Eckpunkten eines Viereckes, dessen Gegenseiten sich entweder in α oder auf $x\pi$ schneiden. Diese Betrachtungen gelten unabhängig davon, ob p und p' reell oder imaginär sind.

Es ist demnach möglich, durch jeden Punkt x der gegebenen Tangente T die zweite Kurventangente T_1 zu konstruieren; ist x insbesondere der Schnittpunkt von T mit P, so mufs T_1 und T harmonisch konjugiert sein zu P und π.

3^a^. *Ein doppelt berührender Kreis K' ist gegeben.*

Nachdem dann zwei Kreise K und K' und die Berührungssehne P von K gegeben sind, ist dies ein schon behandelter Fall.

4^a^. *Das Verhältnis der Achsen ist gegeben.*

Dann kennt man auch $a : e$ und $b : e$. Liegt o auf der Nebenachse

1) Wenn man zu jedem der 4 harmonischen Strahlen πt, πt_1, $\pi\alpha$, A bezüglich des Kreises K den harmonisch konjugierten Strahl konstruiert, erhält man wieder eine harmonische Gruppe: πy, πy_1, A, $\pi\alpha$.

der gesuchten Kurve, so enthält der Kreis über $o\pi$ die Brennpunkte, und diese haben von o die Entfernung $of = r \cdot \frac{e}{a}$; daraus können sie eindeutig bestimmt werden. — Liegt o auf der Hauptachse der gesuchten Kurve, so ist die Länge der Tangenten oder halben kürzesten Sehne von o an den Brennkreis bestimmbar: $\lambda = \sqrt{of \cdot of_1} = r \cdot \frac{e}{b}$; der Brennkreis schneidet daher den zu K konzentrischen Kreis K_λ mit dem Radius λ normal oder nach einem Durchmesser, und da er auch den Kreis $\mathfrak{K}$ über $o\pi$ normal schneidet, ist er eindeutig bestimmt.[1])

Auch können die Schnittpunkte der gesuchten Kurve mit einer beliebigen Geraden X direkt mit Hilfe des Satzes konstruiert werden, daſs für alle Kurvenpunkte das Verhältnis von l (der Länge ihrer Tangenten oder halben kürzesten Sehnen an K) zu ihrer Entfernung von der Berührungssehne P konstant ist, und zwar $e:a$ oder $e:b$, je nachdem der Mittelpunkt von K auf der Haupt- oder Nebenachse liegt. Sucht man auf einer Geraden X die Kurvenpunkte, so ist das Verhältnis von l zu ihrer Entfernung von α, dem Schnittpunkte der Geraden X und P, gegeben; es sei ε.

Wenn die gesuchten Kurvenpunkte innerhalb K liegen, muſs X den Kreis K schneiden; dann errichtet man (Fig. 25) über den Schnittpunkten 1, 2 einen Kreis $\mathfrak{K}$ und legt durch α eine Gerade G, so daſs $\operatorname{tg} \varphi = \varepsilon$ ist. G schneidet den Kreis $\mathfrak{K}$ in zwei Punkten, welche auf X projiziert die gesuchten Kurvenpunkte (x und q) geben.

Wenn die gesuchten Kurvenpunkte auſserhalb K liegen, so kann man sie als Mittelpunkte von Kreisen auffassen, welche K normal schneiden und α sowie den auf der Polare von α gelegenen Punkt β zu Ähnlichkeitspunkten haben. Alle Kreise mit Mittelpunkten auf X, welche K normal schneiden, haben (Fig. 26) die Normale D von o auf X zur gemeinsamen Chordale, also auch die gesuchten Kreise und deren Ähnlichkeitskreis K_s über $\alpha\beta$. Legt man durch α eine Gerade G, so daſs $\sin \varphi = \varepsilon$ ist, so muſs G von den gesuchten Kreisen berührt werden; bringt man demnach G zum Schnitt mit D in δ, so sind die Längen der Tangenten von δ an die gesuchten Kreise und den gegebenen K_s gleich, so daſs man die Berührungspunkte derselben mit G und daraus ihre Mittelpunkte auf X finden kann, welche die gesuchten Kurvenpunkte (q und x) darstellen.

1) Im ersteren Falle liegt der Mittelpunkt des Brennkreises auf der Chordale der beiden Kreise K_λ und $\mathfrak{K}$; im zweiten Falle verbindet man die Endpunkte des zu $o\pi$ normalen Durchmessers von K_λ mit o und π; die Halbierungsstrahlen dieser Verbindungslinien enthalten die Brennpunkte.

Diese Konstruktion ist unabhängig davon, ob X den Kreis K schneidet oder nicht; sie ist aber unmöglich, wenn $\varepsilon > 1$ ist; darum sei noch eine Konstruktion angegeben, welche in jedem Falle durchführbar ist: Wenn X den Kreis K nicht schneidet (Fig. 26), liegen die gesuchten Kurvenpunkte auf dem Kreise, dessen Punkte von d und α Entfernungen besitzen, die in dem gegebenen Verhältnisse ε stehen. — Wenn X den Kreis K schneidet, kann man ebenso den Satz benutzen, daſs der Ort aller Punkte, deren Tangenten an einen Kreis K zu ihren Entfernungen von einem Punkte α in einem constanten Verhältnisse ε stehen, ein Kreis ist. Will man davon keinen Gebrauch machen, so konstruiert man über den Schnittpunkten 1,2 von X mit K einen Kreis K_{12} und errichtet im Schnittpunkte α von X mit P eine Normale A auf X; die gesuchten Kurvenpunkte auf X sind dann die Scheitel eines Kegelschnittes C, welcher den Kreis K_{12} so doppelt berührt, daſs A die gemeinsame Berührungssehne ist; auſserdem ist für diesen Kegelschnitt C noch das Verhältnis der Achsen gegeben, da ε das Verhältnis einer Halbachse zur Exzentrizität dieses Kegelschnittes C ist. Daher kann man, wie oben, den Mittelpunkt von C und daraus die Scheitel finden.

Geht die Gerade X durch einen Berührungspunkt p der gesuchten Kurve mit K, so läſst sich der zweite auf X liegende Kurvenpunkt x aus dem bekannten Verhältnisse $\sqrt{xp \cdot xq} : xp = \varepsilon$ finden, wo q der zweite Schnittpunkt von X mit K ist. Denn es ist $xq : xp = \varepsilon^2$; dieser Gleichung entsprechen zwei Punkte $x_1 x_2$, welche pq harmonisch trennen. Der innerhalb pq liegende Punkt x_1 wird analog wie in Fig. 25 gefunden: Eine Gerade G durch p, welche mit X den Winkel φ ($\operatorname{tg} \varphi = \varepsilon$) einschlieſst, schneidet den Kreis über pq in einem Punkte, welcher, auf X projiziert, den gesuchten Punkt x_1 liefert; x_2 ergiebt sich aus dem harmonischen Verhältnisse. Da alle Kurvenpunkte entweder innerhalb oder auſserhalb von K liegen, wird jeder Aufgabe nur einer dieser Punkte x_1 oder x_2 genügen.

V.

Auch eine Reihe anderer Kegelschnittskonstruktionen lassen sich auf Grund der entwickelten Beziehungen durchführen:

1. *Gegeben sind ein doppelt berührender Kreis K mit Berührungspunkt p, sowie zwei Kurvenpunkte $a_1 a_2$.*

Der auf der Geraden $a_1 a_2$ liegende Punkt y der Berührungssehne P ist (zweideutig) bestimmbar, weil $\overline{a_1 y}$ und $\overline{a_2 y}$ sich wie die Tangenten oder kürzesten Sehnen von a_1 und a_2 an K verhalten. Die beiden

Lösungen für y sind zu $a_1 a_2$ und K harmonisch konjugiert. Die Verbindungslinie von p und y giebt die gesuchte Berührungssehne P u. s. w. Die gegebenen Punkte müssen entweder beide innerhalb oder beide aufserhalb von K liegen.

2. *Gegeben sind ein doppelt berührender Kreis K mit Berührungspunkt p und eine Kurventangente T mit Berührungspunkt t.*

Auf der Geraden pt werden durch K und den zu t gehörigen Berührungskreis K' gleiche Sehnen ausgeschnitten; dadurch ist ein Punkt von K' (eindeutig) bestimmt und K' gegeben, da sein Mittelpunkt auf der Normale in t zu T liegt.

Oder: Die Polare von t bezüglich K schneidet T in einem Punkte der gesuchten Berührungssehne P, welche auch durch P geht.

Oder: Konstruiert man die zu T bezüglich K harmonisch konjugierte Gerade durch t, so schneidet diese die Kreistangente des Punktes p in einem Punkte π der Kurvenachse, welche durch o geht.

3. *Gegeben sind ein doppelt berührender Kreis mit einem Berührungspunkte p und zwei Kurventangenten T_1 und T_2.*

Konstruiert man durch den Schnittpunkt τ von $T_1 T_2$ jene beiden Geraden XX', welche zu $T_1 T_2$ und zu K harmonisch konjugiert sind, so schneidet die eine (X) die Kreispolare von τ in einem Punkte von P, die andere (X') schneidet die Tangente von p in π (dem Pole von P). Da X und X' ihre Rollen vertauschen können, ist die Aufgabe zweideutig. T_1 und T_2 müssen K entweder beide in reellen oder beide in imaginären Punkten schneiden.

4. *Gegeben sind ein doppelt berührender Kreis K mit einem Berührungspunkte p, ein Kurvenpunkt a und eine Kurventangente T.*

Je nach der Lage von a und T gegenüber K mufs man mehrere Fälle unterscheiden.

a) Der Kurvenpunkt a liegt innerhalb K; dann mufs der Berührungspunkt t von T auch innerhalb K liegen, also T den gegebenen Kreis K in 1,2 schneiden. — Zur Bestimmung von t führt die Eigenschaft aller Kurvenpunkte, dafs die durch sie gehenden kürzesten Sehnen von K zu ihren Entfernungen von P ein konstantes Verhältnis besitzen; also mufs (Fig. 29) $s_1 : \alpha = s_2 : \tau = s : \xi$ sein, und daher ist $s_1 : ap = s : xp$ und $s_2 : ty = s : xy$; die erste Gleichung liefert s. Trägt man s in x (dem Schnittpunkte von $\overline{pa}$ mit T) normal zu T auf und zieht vom Endpunkte eine Tangente an den Kreis über 1,2, so erhält man zufolge der zweiten Gleichung t und y (zweideutig); dadurch ist P bestimmt. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn T zwischen a und p liegt.

b) Der Kurvenpunkt a liegt aufserhalb K, und T schneidet den Kreis: Jetzt treten an die Stelle der kürzesten Kreissehnen durch die

Kurvenpunkte die Kreistangenten, und es mufs (Fig. 30) $l_1 : \alpha = l_2 : \tau = l : \xi$ sein, und daher ist $l_1 : ap = l : xp$ und $l_2 : ty = l : xy$. Die erste Gleichung liefert l; um nun mit Hilfe der zweiten Gleichung t und y zu finden, errichtet man in x (dem Schnittpunkte von $p\bar{a}$ mit T) auf T eine Normale und sucht in dieser einen Punkt x_1, so dafs die Tangente von x_1 an den Kreis über 12 gleich l ist; diese Tangente schneidet T im gesuchten Berührungspunkte t, weil dann die zweite Gleichung erfüllt ist. Man erhält entsprechend den beiden Tangenten aus x_1 zwei Lösungen für t; gleichzeitig ergiebt sich y und daraus P. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn q (der zweite Schnittpunkt von $\overline{ap}$ mit K) und x das Punktepaar ap trennen.

c) Der Kurvenpunkt a liegt aufserhalb K, und T schneidet den Kreis K nicht:

Wieder geht man (Fig. 31) von der Beziehung $l_1 : \alpha = l_2 : \tau = l : \xi$ aus und erhält die Gleichungen $l_1 : ap = l : xp$ und $l_2 : ty = l : xy$. Die erste Gleichung liefert l; da für alle Punkte von T die Längen der Tangenten gleich den Entfernungen von einem Punkte d (oder d') sind und, wie früher gezeigt wurde, $\widehat{tdy} = 90^\circ$ sein mufs, kann die zweite Gleichung auch in der Form geschrieben werden $td : ty = l : xy$, d. h. der durch d gehende Kreis mit dem Mittelpunkte t und der Kreis K_x mit dem Centrum x und dem Radius l müssen y zum Ähnlichkeitspunkte haben. Daher liegt y auf einer Tangente aus d an K_x und ist dadurch (zweideutig) bestimmt; P ist die Verbindungslinie von p und y. Die Aufgabe ist nur möglich, wenn q (der zweite Schnittpunkt von $\overline{ap}$ mit K) und x das Punktepaar ap trennen.

5. *Gegeben sind ein Berührungskreis K und drei Kurvenpunkte a_1, a_2, a_3.*

Der auf der Geraden $a_1 a_2$ liegende Punkt y der Berührungssehne P ist bestimmbar, weil $a_1 y$ und $a_2 y$ sich wie die Tangenten oder kürzesten Sehnen von a_1 und a_2 an K verhalten. In derselben Weise bestimmt man den auf $\overline{a_1 a_3}$ oder $\overline{a_2 a_3}$ liegenden Punkt z der Berührungssehne P. Nachdem man für y und z je zwei Lösungen erhält, ist P vierdeutig bestimmt.[1]) Die 3 gegebenen Punkte müssen entweder alle innerhalb oder alle aufserhalb K liegen.

6. *Gegeben sind ein Berührungskreis K, zwei Kurvenpunkte $a_1 a_2$ und eine Kurventangente T.*

Zuerst bestimmt man wie früher den auf $\overline{a_1 a_2}$ liegenden Punkt z der Berührungssehne P; bringt man dann $\overline{a_1 a_2}$ mit T in x zum Schnitt,

---

1) Diese Lösung hat Fiedler in der früher zitierten Abhandlung durch räumliche Betrachtung abgeleitet.

so wird wie in 4. der Berührungspunkt von T, sowie der Schnittpunkt y der Tangente T mit der Berührungssehne P bestimmt. Da man für y und z je zwei Lösungen erhält, ist die Aufgabe vierdeutig (vergl. Fig. 32 und 33).

7. *Gegeben sind ein Berührungskreis K, eine Kurventangente T mit Berührungspunkt t und ein Kurvenpunkt a_1.*

Der Schnittpunkt y der Tangente T mit der Berührungssehne P liegt auf der Kreispolare von t. Auf der Geraden $a_1 t$ wird der Schnittpunkt mit P wie in 1. bestimmt; dadurch ist P (zweideutig) gegeben.

Man kann auch auf beliebigen Geraden X durch a_1 den zweiten Schnittpunkt a_2 und den Schnittpunkt z mit P finden: Liegt a_1 innerhalb K (Fig. 32), so folgen aus $s' : \tau = s_1 : \alpha_1 = s : \xi$ die beiden Gleichungen $s' : ty = s : xy$ und $s_1 : a_1 z = s : xz$; die erste Gleichung liefert s; nach der zweiten Gleichung bestimmt man den Schnittpunkt z von X mit P als jenen Punkt, welcher $a_1 x$ im Verhältnisse $s_1 : s$ teilt (zweideutig), und daraus a_2. — Liegt a_1 aufserhalb K (Fig. 33), so folgen aus $l' : \tau = l_1 : \alpha_1 = l : \xi$ die beiden Gleichungen $l' : ty = l : xy$ und $l_1 : a_1 z = l : xz$. Die erste Gleichung liefert l; nach der zweiten bestimmt man den Schnittpunkt z von X mit P als jenen Punkt, welcher $a_1 x$ im Verhältnisse $l_1 : l$ teilt (zweideutig), und daraus a_2. (Entweder sucht man zuerst den auf der Kreispolare von z gelegenen Punkt β und bestimmt a_2, so dafs $a_1 a_2 z \beta$ eine harmonische Gruppe bilden, oder man benutzt die Eigenschaft, dafs a_1 und a_2 Mittelpunkte von Kreisen sind, welche K normal schneiden und daher D, den auf X normalen Kreisdurchmesser von K, zur Chordale besitzen, und für welche z ein Ähnlichkeitspunkt ist. Bringt man daher die Tangente $\mathfrak{T}$ aus z an den Kreis mit dem Mittelpunkte a_1 zum Schnitt mit D und errichtet im Schnittpunkte δ die Normale auf $\mathfrak{T}$, so trifft diese die Gerade X im Halbierungspunkte ω von $a_1 a_2$.)

Insbesondere kann X parallel zu T gewählt werden (Fig. 34). Dann ist z gegeben durch die Gleichung $s' : ty = s_1 : a_1 z = \operatorname{tg} \varphi$; mit Hilfe von z bestimmt man wie früher a_2.

Oder X kann durch den Punkt y gehen (Fig. 35); dann bestimmt man zuerst den auf X liegenden Punkt β der Polare P_y von y; a_1 und der zu suchende Punkt a_2 sind harmonisch konjugiert zu $y\beta$.

Um die Tangente in a_1 zu bestimmen, sucht man zuerst den Schnittpunkt z von $a_1 t$ mit P; die Tangenten von a_1 und t schneiden sich auf der Kreispolare P_z von z (Fig. 36).

8. *Gegeben sind ein Berührungskreis K, eine Kurventangente T_1 mit Berührungspunkt t_1 und eine Kurventangente T_2.*

Der Schnittpunkt y_1 der Tangente T_1 mit P liegt auf der Kreispolare von t_1; der Berührungspunkt von T_2 sowie der Schnittpunkt y_2 von T_2 mit P werden wie in **4.** bestimmt.

Oder man sucht durch den Schnittpunkt x von $T_1 T_2$ jene Geraden, welche zu $T_1 T_2$ und K harmonisch konjugiert sind, und bringt eine derselben mit den Kreispolaren von x zum Schnitt; der Schnittpunkt gehört der Berührungssehne P an (vergl. Aufgabe **2a**).

9. *Gegeben sind ein Berührungskreis K, ein Kurvenpunkt a und zwei Kurventangenten T_1, T_2.*

Man sucht jene Geraden durch den Schnittpunkt x der Tangenten, welche zu diesen und K harmonisch konjugiert sind (Aufgabe **2a**) und bringt eine derselben mit der Kreispolare von x zum Schnitt; der Schnittpunkt y liegt auf der Berührungssehne P. Nun sucht man auf $\overline{ya}$ den zweiten Kurvenpunkt und wie in **4.** den Berührungspunkt einer der gegebenen Tangenten und ihren Schnittpunkt z mit P. Nachdem für y und z je zwei Lösungen vorhanden sind, ist die Aufgabe vierdeutig.

10. *Gegeben sind ein Berührungskreis K und drei Kurventangenten T_1, T_2, T_3.*

Man sucht für den Schnittpunkt x von $T_1 T_2$ diejenigen Geraden XX', welche zu $T_1 T_2$ und K harmonisch konjugiert sind, ebenso für den Schnittpunkt y von $T_1 T_3$ die entsprechenden Geraden YY'; der Schnitt einer Geraden X mit einer Geraden Y ist der Pol π von P und also vierdeutig bestimmt; oder: Eine Gerade X zum Schnitt gebracht mit der Kreispolare von x giebt einen Punkt der Berührungssehne P, und ebenso eine Gerade Y zum Schnitt gebracht mit der Kreispolare von y.

Auf diese Aufgabe läfst sich auch die folgende zurückführen: Gegeben sind ein Berührungskreis K, die Kurvenachse und 2 Tangenten, weil dann auch die zur Achse symmetrischen Tangenten gegeben sind: Durch den Schnittpunkt x von $T_1 T_2$ geht ein Ähnlichkeitskreis K_s, welcher auch die Schnittpunkte der Halbierungsstrahlen von $T_1 T_2$ mit der Achse enthält; dann kann man einen zweiten Berührungskreis K' bestimmen, dessen Mittelpunkt o' harmonisch zu o bezüglich K_s ist, und welcher sich mit K auf K_s schneidet u. s. w.

Oder bestimmt man, wie früher, den auf der Polare von x liegenden Punkt α der Berührungssehne P, so ist diese gegeben, da sie auf der Axe normal steht.

Die schon früher erwähnte Aufgabe, bei welcher K, der Kurvenmittelpunkt m und eine Tangente T_1 gegeben sind, läfst sich auch auf diesen Fall zurückführen: mo ist die Kurvenachse, und die zu T_1

parallele Kurventangente T_2 läfst sich mittelst m bestimmen. Da T_1 und T_2 parallel sind, also x unendlich fern ist, liegt α auf dem zu T_1 normalen Kreisdurchmesser D, und zwar ist α einer jener Punkte, welche K und $T_1 T_2$ gleichzeitig harmonisch trennen. Die Berührungssehne P geht durch α und ist zu mo normal; die Berührungspunkte von $T_1 T_2$ liegen auf $m\alpha$.[1])

Anhang.

Aufser den im vorhergehenden besprochenen Kegelschnitten, welche zwei feste Kreise symmetrisch zu derselben Achse berühren, giebt es auch noch andere Gruppen von Kegelschnitten, welche die Kreise symmetrisch zu verschiedenen Achsen berühren.[2])

Die Beziehungen, welche zwischen einem Kegelschnitte und zwei doppelt berührenden Kreisen, deren Mittelpunkte in verschiedenen Achsen liegen, bestehen, lassen sich aus den vorstehenden Betrachtungen leicht ableiten.

Einen gegebenen Kegelschnitt mit dem Mittelpunkte m und den Axen a, b mögen zwei Kreise $K_1 K_2$ doppelt berühren, und zwar liege der Mittelpunkt o_1 von K_1 auf der Nebenachse, o_2 auf der Hauptachse. (Fig. 37.) Die Berührungssehnen $P_1 P_2$ schneiden die Achsen in den Punkten π_1 und π_2; dann ist $m\pi_1 : \pi_1 o_1 = b^2 : a^2$ und $o_2\pi_2 : \pi_2 m = b^2 : a^2$, d. h. P_1 und P_2 schneiden sich in einem Punkte y der Zentrale $o_1 o_2$, so dafs $o_1 y : o_2 y = a^2 : b^2$ ist.

Bezeichnet man die Teile $o_1 y$ und $o_2 y$, in welche y den Zentralabstand $d = o_1 o_2$ teilt, mit y_1 und y_2, so folgt $y_1 : d = a^2 : e^2$ und $y_2 : d = b^2 : e^2$. (Dabei kann y auch aufserhalb $o_1 o_2$ liegen.)

Zwischen den Brennpunkten und Berührungskreisen bestehen, wie bewiesen wurde, die Beziehungen:

$$r_1^2 : o_1 f^2 = a^2 : e^2 \text{ und } r_2^2 : o_2 f \cdot o_2 f' = b^2 : e^2.$$

Nun ist $o_1 f^2 = o_1 m^2 + e^2$ und $o_2 f \cdot o_2 f' = \pm (\overline{o_2 m}^2 - e^2)$, also

$$o_1 f^2 \pm o_2 f \cdot o_2 f' = o_1 m^2 + o_2 m^2 = d^2 \text{ oder}$$

$$\frac{r_1^2 e^2}{a^2} \pm \frac{r_2^2 e^2}{b_2} = d^2 \text{ oder } \frac{r_1^2 d}{y_1} \pm \frac{r_2^2 d}{y_2} = d^2 \text{ oder } \frac{r_1^2}{y_1} \pm \frac{r_2^2}{y_2} = d;$$

d. h. y ist kein willkürlicher Punkt der Zentrale $o_1 o_2$, sondern gehört dem Punktepaare yz an, welches die gegebenen Kreise gleichzeitig har-

1) Diese Lösung hat Niemtschik durch räumliche Betrachtung abgeleitet.

2) Dies erörtert Steiner ausführlich in § 8 seiner Abhdlg. „Neue Bestimmungsarten der Kurven 2. Ordnung etc.“ (Ges. Werke II, 463 u. ff.).

monisch trennt.[1]) Es giebt also auf der Zentrale der beiden Kreise $K_1 K_2$ nur zwei Punkte y und z, von denen jeder die Eigenschaft hat, daſs zwei durch ihn gehende, zu einander normale Geraden Berührungssehnen eines $K_1 K_2$ doppelt berührenden Kegelschnittes sind. Diesen Punkten entsprechend unterscheidet man zwei Gruppen doppelt berührender Kegelschnitte $C^2 y$ und $C^2 z$; alle Kegelschnitte der Gruppe $C^2 y$ haben mit K_1 und K_2 Berührungssehnen, die sich im Punkte y schneiden, jene der Gruppe $C^2 z$ Berührungssehnen, die sich in z schneiden.[2]) Sollen Kegelschnitte dieser Gruppen existieren, dürfen sich K_1 und K_2 nicht schneiden, weil sonst die Punkte y und z nicht reell sind. Die Eigenschaften der Kegelschnitte beider Gruppen sind analog, weshalb es genügt, jene der Gruppe $C^2 y$ zu besprechen, wobei y jener Punkt des zu $K_1 K_2$ gleichzeitig harmonischen Punktepaares sein soll, welcher innerhalb des Kreises K_1 gelegen ist.

Der Ort der Mittelpunkte aller K_1 und K_2 symmetrisch zu verschiedenen Achsen berührenden Kegelschnitte ist der Kreis über $o_1 o_2$.

Die Berührungssehnen aller Kegelschnitte der Gruppe $C^2 y$ mit K_1 und K_2 schneiden sich in einem festen Punkte y der Zentrale $o_1 o_2$.

Für alle Kegelschnitte der Gruppe $C^2 y$ ist das Verhältnis der Quadrate der Achsen konstant, und zwar verhält sich das Quadrat der Hauptachse zum Quadrat der Nebenachse wie $o_1 y : o_2 y$, wo o_1 der auf der Nebenachse liegende Kreismittelpunkt ist. Für die Kegelschnitte, deren Nebenachse durch o_1 geht, ist $r_1 : o_1 f = a : e$ konstant, oder $o_1 f$ ist für alle Kegelschnitte der Gruppe $C^2 y$, welche K_1 symmetrisch der Nebenachse doppelt berühren, gleich, d. h. die Brennpunkte dieser Kegelschnitte liegen auf einem Kreise $\mathfrak{K}_1$, welcher konzentrisch ist mit jenem der gegebenen Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Nebenachse liegt. — Ebenso

1) Denn konstruiert man (Fig. 38) zu den Kreisen $K_1 K_2$, die sich ausschlieſsen sollen, das beide harmonisch trennende Punktepaar (der Kreis über yz muſs K_1 und K_2 rechtwinklig schneiden, sein Mittelpunkt liegt in der Chordale von $K_1 K_2$), so geht durch y die Berührungssehne der Tangenten aus z an K_1 und durch z die Berührungssehne der Tangenten aus y an K_2; daher ist $\frac{r_1^2}{o_1 y} = o_1 z$ und $\frac{r_2^2}{o_2 y} = o_2 z$ oder $\frac{r_1^2}{o_1 y} + \frac{r_2^2}{o_2 y} = o_1 z + o_2 z = d$. Konstruiert man zu zwei sich einschlieſsenden Kreisen (Fig. 39) die harmonisch konjugierten Punkte y und z, so bestimmen die Tangenten von z an beide Kreise dieselbe Berührungssehne durch y; daher ist $\frac{r_1^2}{o_1 y} = o_1 z$, $\frac{r_2^2}{o_2 y} = o_2 z$ oder $\frac{r_1^2}{o_1 y} - \frac{r_2^2}{o_2 y} = o_1 z - o_2 z = d$.

2) Dazu kommen als dritte Gruppe $C^2 x$ die früher besprochenen Kegelschnitte, deren Berührungssehnen sich im unendlich fernen Punkte x der Normale zur Zentrale schneiden, und es ist xyz das beiden Kreisen gemeinsame Polardreieck (Steiner, Ges. Werke II, 463).

folgt aus $r_2 : \sqrt{o_2 f \cdot o_2 f'} = b : e$, dafs $\sqrt{o_2 f \cdot o_2 f'}$, d. i. die Tangente oder kürzeste Sehne durch o_2 an alle Brennkreise dieser Kegelschnitte konstant ist, d. h. alle Brennkreise dieser Kegelschnitte schneiden einen festen Kreis $\mathfrak{K}_2$ rechtwinklig oder nach einem Durchmesser. $\mathfrak{K}_2$ ist konzentrisch mit jenem der gegebenen Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Hauptachse liegt, und wird auch von $\mathfrak{K}_1$ rechtwinklig oder nach einem Durchmesser geschnitten. Liegt o_2 auf der Nebenachse, so erhält das Verhältnis der Achsen den reziproken Wert, und es vertauschen die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ihre Rollen: $\mathfrak{K}_2$ ist der Ort der Brennpunkte dieser Kegelschnitte, und $\mathfrak{K}_1$ wird von den Brennkreisen rechtwinklig oder nach einem Durchmesser geschnitten. Aus den Figuren 38 und 39 läfst sich eine einfache Konstruktion dieser Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ableiten. Die Radien der Kreise sind nach früherem $\sqrt{\frac{r_1^2 \cdot d}{o_1 y}} = \sqrt{d \cdot o_1 z}$ und $\sqrt{\frac{r_2^2 \cdot d}{o_2 y}} = \sqrt{d \cdot o_2 z}$, d. h.: wenn z innerhalb $o_1 o_2$ liegt, gehen die Kreise $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$ durch den Schnitt der Normale in z auf $o_1 o_2$ mit dem Kreise über $o_1 o_2$; — wenn z aufserhalb $o_1 o_2$ liegt und zwar auf der Seite von o_1, so schneiden sich die Kreise $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$ auf dem Kreise über $o_2 z$ in der Normale durch o_1 zur Zentrallinie.

Auf Grund dieser Beziehungen sollen Kegelschnitte konstruiert werden, welche zwei gegebene Kreise symmetrisch zu verschiedenen Achsen doppelt berühren, wenn noch andere Bestimmungsstücke gegeben sind.

1. *Gegeben ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes.* Derselbe mufs auf dem Kreise über $o_1 o_2$ liegen; dann sind die Lagen der Achsen gegeben; die dazu normalen Berührungssehnen gehen durch y; aus diesen oder mit Hilfe der Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ lassen sich die Brennpunkte bestimmen.

Wenn sich die beiden Kreise ausschliefsen, giebt es nur Hyperbeln (sowohl in der Gruppe $C^2 y$ als $C^2 z$), weil y zwischen $o_1 o_2$ liegt (also die Berührungssehne zwischen o und m). Wählt man m auf der Polare Y des Punktes y bezüglich beider Kreise, d. i. der Normale durch z zu $o_1 o_2$ (Fig. 40), so degeneriert die Hyperbel in ein Geradenpaar, weil sich in den Schnittpunkten $\alpha_1 \alpha_2$ des Kreises über $o_1 o_2$ mit Y je eine innere und äufsere gemeinsame Kreistangente treffen, deren Berührungspunkte mit K_1 oder K_2 auf einer Geraden durch y liegen.[1]) Da in diesem Falle auch die Brennpunkte mit m identisch sind, folgt

1) Der Schnittpunkt zweier solcher Tangenten liegt auf Y, weil Y die Polare von y ist, und auf dem Kreise über $o_1 o_2$, weil die Halbierungsstrahlen der Tangenten durch o_1 und o_2 gehen müssen.

daraus wieder, dafs die zu K_1 und K_2 konzentrischen Kreise $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$, welche die Brennpunkte der Kegelschnitte C^2y enthalten, durch die Schnittpunkte $\alpha_1\alpha_2$ von Y mit dem Kreise über o_1o_2 gehen. Durch $\alpha_1\alpha_2$ wird der geometrische Ort der Kurvenmittelpunkte in zwei Teile geteilt: Liegt m auf dem Teile, welcher o_1 enthält, so liefert nur $\mathfrak{K}_1$ Brennpunkte, also geht die Nebenachse durch o_1. — Liegt m auf dem Teile, welcher o_2 enthält, so geht die Nebenachse durch o_2.

Nachdem für alle Hyperbeln das Verhältnis der Achsen gleich $\sqrt{o_1y : o_2y}$, also konstant ist, sind die Winkel φ_1 und φ_2, welche die Asymptoten mit den Achsen einschliefsen, für alle Hyperbeln gleich; da nun die Achsen durch zwei feste Punkte o_1o_2 gehen und sich auf einem Punkte m des Kreises über o_1o_2 schneiden, müssen alle Asymptoten durch zwei feste Punkte $\beta_1\beta_2$ dieses Kreises gehen; dieselben liegen auf der Normale zu o_1o_2 durch y, weil sich in dieser die Geradenpaare der degenerierten Kegelschnitte treffen (oder auch wegen $\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{a}{b} : \frac{b}{a} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{o_1y}{o_2y}$). Dies gilt für beide Hyperbelgruppen von C^2y.

Wenn sich die Kreise einschliefsen, liegt y aufserhalb o_1o_2, daher giebt es nur Ellipsen. Die Hauptachse geht immer durch den Mittelpunkt des eingeschlossenen Kreises, weil für den Mittelpunkt, welcher auf der Nebenachse liegt, $of < r$ sein mufs, oder weil (wegen $a > b$) y dem Mittelpunkte näher liegen mufs, durch den die Hauptachse geht.

2. *Gegeben ist ein Brennpunkt des Kegelschnittes.* Derselbe mufs auf einem der oben erwähnten Kreise $\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$ liegen; die Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte des anderen dieser Kreise liefert die Hauptachse. — Schliefsen sich die Kreise ein, so kann der Brennpunkt nur auf jenem Kreise $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ liegen, welcher zum einschliefsenden Kreise K_1 oder K_2 konzentrisch ist.

3. *Gegeben ist der Berührungspunkt p eines Kreises K_1 mit dem zu suchenden Kegelschnitte:* Die Verbindungslinie mit y und die dazu Normale durch y liefern die beiden Berührungssehnen, zu welchen die Achsen parallel sind.

4. *Gegeben ist eine Asymptotenrichtung.* Da die Asymptoten durch zwei feste Punkte $\beta_1\beta_2$ gehen, ist eine Asymptote und daher der Mittelpunkt auf dem Kreise über o_1o_2 gegeben.

5. *Gegeben ist ein Kurvenpunkt p.* Das Verhältnis der Entfernung π des Punktes p von der Berührungssehne P_1 mit K_1 zur Tangente oder halben kürzesten Sehne durch p an K_1 ist konstant und zwar gleich $\sqrt{o_2y : o_1o_2} = o_2\beta_2 : o_1o_2$, wenn o_1 auf der Nebenachse liegt. Da

die Berührungssehne P durch y geht, ist sie bestimmt als Tangente an den Kreis, dessen Mittelpunkt p ist, und dessen Radius π aus dem angegebenen Verhältnisse bestimmt werden kann.

Schliefsen sich die gegebenen Kreise aus, so mufs p aufserhalb der beiden Kreise liegen; schliefsen sie sich ein, mufs p innerhalb des einen und aufserhalb des anderen liegen.

6. *Gegeben ist eine Kurventangente T.* Dieselbe mufs einen Kreis K_1 in reellen, den anderen K_2 in imaginären Punkten schneiden; dann ist der Mittelpunkt o_2 von K_2 auf der Hauptachse und daher das Verhältnis der Entfernung π aller Kurvenpunkte von P_2 zu den Längen ihrer Tangenten an K_2 gleich $\sqrt{o_1 y : o_1 o_2} = o_1\beta_1 : o_1 o_2 = \varepsilon$; für den Berührungspunkt t von T mufs der Schnittpunkt y_2 von T mit der Polare des Punktes t bezüglich K_2 auf P_2 liegen. Da nun für alle Punkte von T die Längen der Tangenten an K_2 gleich ihren Entfernungen von einem festen Punkte d sind, so ist (Fig. 41) $\pi : td = \varepsilon = \sin\varphi : \sin\psi$. Nun ist $\sin\varphi = \eta : yy_2$ und $\sin\psi = \delta : dy_2$, daher $\varepsilon = \frac{\eta}{\delta} \cdot \frac{dy_2}{yy_2}$, d. h. das Verhältnis $\frac{dy_2}{yy_2} = \varepsilon \cdot \frac{\delta}{\eta}$ ist gegeben; y_2 liegt daher auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf dy liegt, und welcher dy harmonisch trennt. Man erhält für y_2 zwei Lösungen; daraus ergeben sich P_2, P_1 und dazu normal die Achsen.

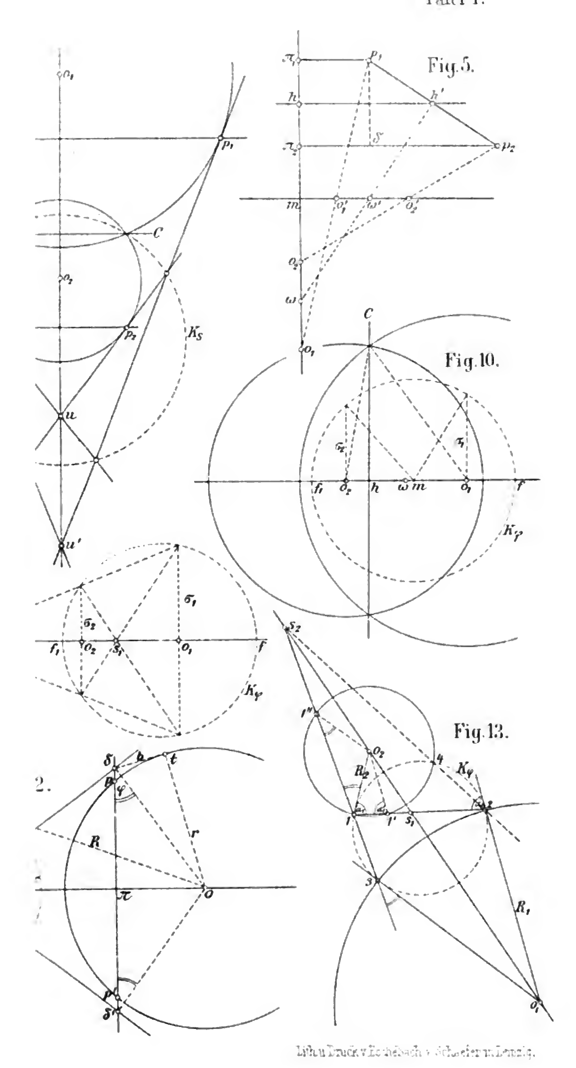
Diese Konstruktion ist unabhängig davon, ob sich die Kreise ein- oder ausschliefsen.

Wenn ein Kreis den Radius Null hat, also ein Brennpunkt gegeben ist, mufs die Nebenachse durch den Mittelpunkt des anderen Kreises K_1 gehen; dann ist y der zu f harmonisch konjugierte Punkt bezüglich K_1. — Liegt f innerhalb von K_1, so erhält man Ellipsen, sonst Hyperbeln. Es lassen sich auch hier dieselben Methoden zur Bestimmung der Kegelschnitte, wie im allgemeinen Falle anwenden, doch führt auch ein anderer Weg zum Ziel, z. B.:

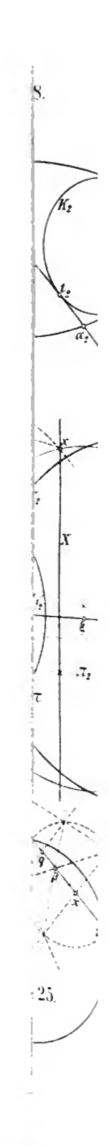
Ein Kurvenpunkt p ist gegeben. Man sucht den Mittelpunkt x des in p symmetrisch zur Nebenachse berührenden Kreises. Die Beziehung $px : xf = a : c = r_1 : o_1 f$ liefert als geometrischen Ort für x einen Kreis, welcher pf innen und aufsen im Verhältnis $r_1 : o_1 f$ teilt. Das Verhältnis der Tangente l von p an K_1 zur Entfernung der Kreismittelpunkte ist konstant und zwar $b : e$ (gleich Tangente von f an K_1 zu fo_1); das giebt als geometrischen Ort für x einen Kreis mit dem Mittelpunkte o_1. — xo_1 ist die Nebenachse. Wenn f innerhalb K_1 liegt, tritt an die Stelle der Tangente von p an K_1 die halbe kürzeste Sehne durch p.

Eine Kurventangente T ist gegeben. Fällt man von f auf T eine Normale, so liegt der Fufspunkt n im Scheitelkreis der Hauptachse; für den Kurvenmittelpunkt m erhält man als geometrischen Ort (wegen $nm : fm = a : e = r_1 : o_1 f$) einen Kreis; aufserdem liegt m auf dem Kreise über of. Diese Konstruktion gilt, ob f innerhalb oder aufserhalb K_1 liegt.

Anmerkung während der Korrektur: Während des Druckes wurde ich auf die Arbeit von Sporer: „Über Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren" (Zeitschrift f. Math. u. Physik **41**, 210—220) aufmerksam gemacht, die ich leider übersehen hatte. Ich bedaure, in meiner systematischen Zusammenstellung und elementaren Ableitung jener Kegelschnittseigenschaften, welche zur Lösung der Aufgaben in II—V dienen, den Hinweis auf einzelne Analogien mit Beweisen von Sporer (z. B. bei der Hyperbel) nicht mehr im einzelnen nachholen zu können.



Lith.u.Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.



8.
25.

Tafel II.

8.

Fig. 11a.

Fig. 21.

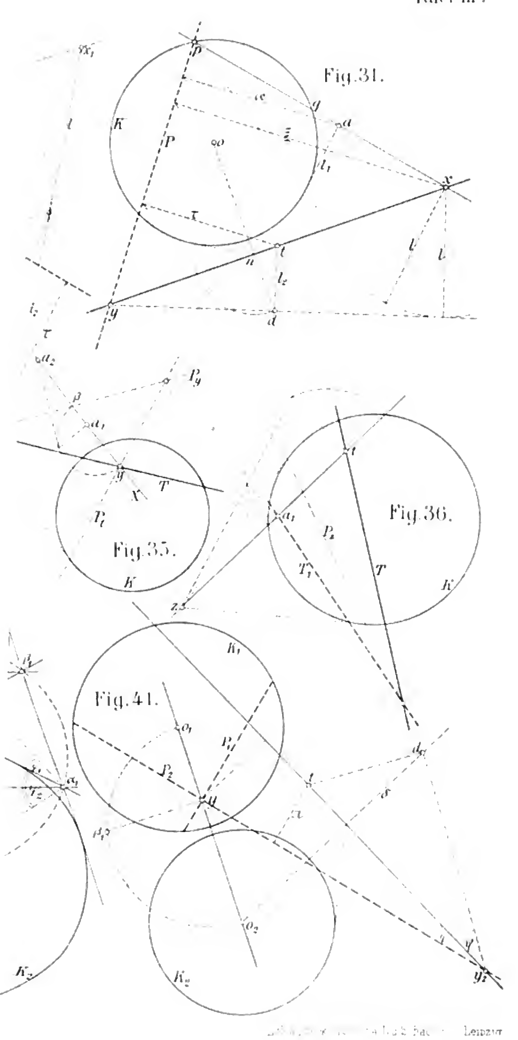
Fig. 26.

25.

Lith. u. Druck v. Forkebardt & Schaefer in Leipzig



Tafel III.



Neue Ableitung der Kugelfunktionen.

Von M. Hamburger in Berlin.

Die Gleichung

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

wird befriedigt durch

$$U = f(\alpha x + \beta y + \gamma z), \tag{2}$$

wo f eine willkürliche Funktion bedeutet und die Konstanten α, β, γ der Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \tag{3}$$

genügen. Soll die Funktion f homogen vom n^{ten} Grade in x, y, z sein, so mufs

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf$$

sein, also, indem man

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = t$$

setzt,

$$tf'(t) = nf(t),$$

welche Gleichung integriert

$$f(t) = C \cdot t^n$$

giebt. Also stellt

$$V = C(\alpha x + \beta y + \gamma z)^n$$

mit der Bedingung (3) eine homogene Funktion vom n^{ten} Grade in x, y, z dar, die der Gleichung (1) genügt, und die man nach Thomson harmonische Funktion n^{ten} Grades nennt.

Bezieht man γ in die Konstante hinein, so kann man V auch auf die Form bringen

$$V = C'(\alpha x + \beta y + z)^n,$$

wo α und β die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 = -1$$

zu erfüllen haben. Hierzu setzen wir $\alpha = i\cos\lambda$, $\beta = i\sin\lambda$ $(i = \sqrt{-1})$ und erhalten mit Weglassung der Konstante C'

$$V = (ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z)^n.$$

Denkt man sich diesen Ausdruck nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von λ entwickelt, so erhält man, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

$$(4)\qquad \begin{cases} V = A_0 + A_1 \cos\lambda + A_2 \cos 2\lambda + \cdots + A_n \cos n\lambda \\ \qquad + B_1 \sin\lambda + B_2 \sin 2\lambda + \cdots + B_n \sin n\lambda, \end{cases}$$

also einen Ausdruck von $2n + 1$ Gliedern. In diesem ist jeder der Koeffizienten A, B eine ganze homogene Funktion n^{ten} Grades von x, y, z und genügt für sich der Gleichung (1), ist also eine harmonische Funktion n^{ten} Grades.

Denn, da $\Delta V = 0$, so folgt

$$0 = \Delta A_0 + \Delta A_1 \cos\lambda + \Delta A_2 \cos 2\lambda + \cdots + \Delta A_n \cos n\lambda$$
$$+ \Delta B_1 \sin\lambda + \Delta B_2 \sin 2\lambda + \cdots + \Delta B_n \sin n\lambda.$$

Multipliziert man nun mit $\cos r\lambda$ und integriert nach λ zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhält man wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos r\lambda \cdot \cos s\lambda = 0, \quad \text{wenn } r \neq s,$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos r\lambda \cdot \sin s\lambda = 0$$

für jedes r und s:

$$0 = \Delta A_r \int_0^{2\pi} \cos^2 r\lambda = \pi \Delta A_r,$$

folglich $\Delta A_r = 0$.

In derselben Weise ergiebt die Multiplikation mit $\sin r\lambda$ und Integration zwischen 0 und 2π, dafs $\Delta B_r = 0$.

Es handelt sich darum, die Funktionen A und B auf die einfachste Weise darzustellen.

Es ist

$$ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z = \tfrac{1}{2}(ix + y)e^{\lambda i} + \tfrac{1}{2}(ix - y)e^{-\lambda i} + z.$$

Führen wir nun ein:

$$(ix + y)e^{\lambda i} = u, \quad (ix - y)e^{-\lambda i} = v,$$

so ist

$$uv = -x^2 - y^2 = z^2 - r^2,$$

wenn $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gesetzt wird, und man erhält

$$ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v + z.$$

Je nachdem wir nun v durch u oder u durch v ausdrücken, erhalten wir

$$ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z = \frac{1}{2u}((u+z)^2 - r^2) = \frac{1}{2v}((v+z)^2 - r^2),$$

folglich

$$V = (ix\cos\lambda + iy\sin\lambda + z)^n = \frac{1}{2^n}u^{-n}((u+z)^2 - r^2)^n$$

$$= \frac{1}{2^n}v^{-n}((v+z)^2 - r^2)^n.$$

Die Entwickelung nach Potenzen von u oder v giebt die Darstellung in den Formen

$$V = a_{-n}u^{-n} + a_{-(n-1)}u^{-(n-1)} + \cdots + a_{-1}u^{-1} + a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_{n-1}u^{n-1} + a_n u^n$$

$$= a_{-n}v^{-n} + a_{-(n-1)}v^{-(n-1)} + \cdots + a_{-1}v^{-1} + a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \cdots + a_{n-1}v^{n-1} + a_n v^n.$$

Die Ersetzung von v durch seinen Wert in $u: v = -\frac{x^2+y^2}{u}$ und die Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von u in vorstehender Identität giebt zwischen den a die Beziehung

$$a_{-s} = (-1)^s a_s (x^2+y^2)^s = a_s (ix+y)^s (ix-y)^s.$$

Hieraus folgt

$$a_s u^s + a_{-s}u^{-s} = a_s\{(ix+y)^s e^{s\lambda i} + (ix-y)^s e^{-s\lambda i}\},$$

also

$$V = a_0 + \sum_{s=1}^{s=n} a_s\{(ix+y)^s e^{s\lambda i} + (ix-y)^s e^{-s\lambda i}\}$$

$$= a_0 + \sum_{s=1}^{s=n} a_s\{(ix+y)^s + (ix-y)^s\}\cos s\lambda$$

$$+ i\sum_{s=1}^{s=n} a_s\{(ix+y)^s - (ix-y)^s\}\sin s\lambda.$$

Die Vergleichung mit (4) giebt

$$(5)\qquad \begin{cases} A_0 = a_0, & A_s = a_s\{(ix+y)^s + (ix-y)^s\}, \\ & B_s = ia_s\{(ix+y)^s - (ix-y)^s\}. \end{cases} \quad (s=1,2,\cdots,n)$$

a_s ist der Koeffizient von u^s in

$$\frac{1}{2^n}u^{-n}((u+z)^2 - r^2)^n$$

oder von u^{n+s} in dem Ausdruck

$$\frac{1}{2^n}((u+z)^2 - r^2)^n,$$

also

$$a_s = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{(n+s)!}\,\frac{d^{n+s}}{dz^{n+s}}(z^2 - r^2)^n, \tag{6}$$

wo bei der Differentiation r als konstant anzusehen ist. Durch (5) und (6) sind die harmonischen Funktionen n^{ten} Grades A_k und B_k dargestellt.

Aus diesen erhält man die Kugelfunktionen gleichen Grades, indem man x, y, z durch die Polarkoordinaten ausdrückt und $r = 1$ setzt. Führen wir also ein

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \cos\vartheta,$$

dann wird

$$(ix + y)^s = i^s \sin^s\vartheta\,(\cos s\varphi - i\sin s\varphi),$$

$$(ix - y)^s = i^s \sin^s\vartheta\,(\cos s\varphi + i\sin s\varphi),$$

mithin für $r = 1$

$$A_s = 2\,i^s a_s \sin^s\vartheta\cos s\varphi,$$

$$B_s = 2\,i^s a_s \sin^s\vartheta\sin s\varphi.$$

Die einzige dieser Kugelfunktionen, die von φ frei ist, ist

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\,\frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}, \qquad (z = \cos\vartheta) \tag{7}$$

die wir also hier gleich in der Jacobischen Form erhalten. Wir bezeichnen sie üblicher Weise mit $P_n(z) = P_n(\cos\vartheta)$.

Aus (6) folgt dann, indem wir $r = 1$ setzen:

$$a_s = \frac{n!}{(n+s)}\,\frac{d^s P_n(z)}{dz^s} \qquad (z = \cos\vartheta)$$

und demnach

$$\left\{\begin{aligned} A_s &= 2\,i^s \frac{n!}{(n+s)!}\sin^s\vartheta\,\frac{d^s P_n(z)}{dz^s}\cos s\varphi, \\ B_s &= 2\,i^s \frac{n!}{(n+s)!}\sin^s\vartheta\,\frac{d^s P_n(z)}{dz^s}\sin s\varphi. \end{aligned}\right. \qquad (z = \cos\vartheta) \tag{8}$$

Die explizite Entwickelung von (7) giebt

$$P_n(z) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(z^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot(2n-1)}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}z^{n-4} - \cdots\right),$$

den bekannten Ausdruck für den Koeffizienten von α^n in der Ent-

wickelung von $(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach steigenden Potenzen von α, und daraus

$$\frac{d^s P_n(z)}{d z^s} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-s)} \Big(z^{n-s} - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2 \cdot (2n-1)} z^{n-s-2}$$
$$+ \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} z^{n-s-4} - \cdots \Big).$$
$$(z = \cos\vartheta)$$

Setzen wir

$$\sin^s \vartheta \frac{d^s P_n(z)}{d z^s} = P_{n,s}(\cos\vartheta),$$

so erhält man vermöge (7) und (8), wenn wir von dem konstanten Faktor $2 i^s \frac{n!}{(n+s)!}$ absehen, in den Ausdrücken

$$P_n(\cos\vartheta),\quad P_{n,1}(\cos\vartheta)\cos\varphi,\quad P_{n,2}(\cos\vartheta)\cos 2\varphi,\ \cdots,\ P_{n,n}(\cos\vartheta)\cos n\varphi,$$
$$P_{n,1}(\cos\vartheta)\sin\varphi,\quad P_{n,2}(\cos\vartheta)\sin 2\varphi,\ \cdots,\ P_{n,n}(\cos\vartheta)\sin n\varphi$$

$2n+1$ Kugelfunktionen n^{ten} Grades.

Diese Ausdrücke sind von einander linear unabhängig, denn eine Gleichung

$$\alpha_0 P_n + \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_s P_{n,s} \cos s\varphi + \sum_{s=1}^{s=n} \beta_s P_{n,s} \sin s\varphi = 0$$

könnte nicht bestehen, ohne daſs $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \beta_2 \cdots = \beta_n = 0$ wäre, wie eine Multiplikation mit $\cos r\varphi$ oder $\sin r\varphi$ und Integration nach φ zwischen 0 und 2π ergeben würde, mit Rücksicht darauf, daſs die $P_{n,s}$ nicht identisch verschwinden.

Daſs nicht mehr von einander unabhängige Kugelfunktionen existieren, erkennt man daraus, daſs nicht mehr als $2n+1$ harmonische Funktionen n^{ten} Grades von x, y, z vorhanden sein können; denn eine beliebige homogene Funktion V n^{ten} Grades enthält $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ Konstanten. Die Bedingung $\Delta V = 0$ ergiebt, da ΔV vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ist, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen zwischen den Konstanten, so daſs bloſs $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 2n+1$ unabhängige Konstanten übrig bleiben. Die allgemeinste Kugelfunktion n^{ten} Grades ist also

$$\alpha_0 P_n + \sum_{s=1}^{s=n} (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi) P_{n,s},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ willkürliche Konstanten bedeuten. Aus der oben erhaltenen Beziehung

$$a_{-s} = (-1)^s a_s (x^2 + y^2)^s = a_s (z^2 - r^2)^s$$

folgt mit Hülfe von (6), wenn man $r = 1$ setzt,

$$\frac{1}{(n-s)!} \frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}} (z^2 - 1)^n = \frac{(z^2-1)^s}{(n+s)!} \cdot \frac{d^{n+s}(z^2-1)^n}{dz^{n-s}},$$

welches der Jacobische Satz ist.

Berlin, den 22. Februar 1900.

Über den Konvergenzbereich der Bernoullischen Reihe.

Von G. MITTAG-LEFFLER in Stockholm.

Schon im Jahre 1694[1]), also mehr als zwanzig Jahre, ehe Brook Taylor[2]) die nach ihm benannte Reihe veröffentlichte, hat Joh. Bernoulli die folgende Formel angegeben:

$$f(u) - f(0) = f'(u) \cdot u - f''(u)\frac{u^2}{1 \cdot 2} + f'''(u)\frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots.$$

Ein berühmter Satz von Cauchy[3]) erlaubt uns, den Konvergenzbereich der Taylorschen Reihe festzustellen. Es liegt daher nahe, sich die folgende Frage vorzulegen. Giebt es einen Konvergenzbereich der Bernoullischen Reihe, d. h. einen Bereich E von der Art, dass die Reihe für jeden im Innern von E gelegenen Bereich gleichmäſsig konvergiert, dagegen für jeden auſserhalb E liegenden Punkt divergiert? Was ist in diesem Fall der Bereich E?

Die Aufgabe ist ganz elementar und läſst sich ohne Schwierigkeit lösen. Dennoch hat sie ein gewisses Interesse wegen ihrer Beziehung zu den Lehrsätzen, die ich kürzlich bewiesen habe in meinen Arbeiten: „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène“.[4])

Ich will zunächst die Bernoullische Reihe in einer etwas anderen Form schreiben, die ihre Beziehung zur Taylorschen Reihe in das rechte Licht setzt.

Schreibt man

$$f(u) = F(z + u),$$

---

1) Acta Erud. 1694 p. 438 (= Opera T. I p. 126).

2) Methodus incrementorum directa et inversa (Londini 1715). Wegen der Beziehung zwischen den Reihen von Taylor und Bernoulli vergleiche die Arbeit von Alfred Pringsheim: Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes. Bibl. math. Dritte Folge **1**, p. 433 etc.

3) Cauchy: Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. Prem. partie. Anal. Algebr. Paris 1821 Chap. 9 § 2 Théor. 1. p. 286.

4) Acta math. **23**, 43—62; **24**, 183—204, 205—244.

so hat man

$$F(z+u)-F(z)=F'(z+u)u-F''(z+u)\frac{u^2}{1\cdot 2}+F'''(z+u)\frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots$$

oder, indem man $z+u=x$ setzt:

$$F(x)-F(z)=F'(x)(x-z)-F''(x)\frac{(x-z)^2}{\underline{|2}}+F'''(x)\frac{(x-z)^3}{\underline{|3}}-\cdots.$$

Mithin

$$F(z)-F(x)=F'(x)(z-x)+F''(x)\frac{(z-x)^2}{\underline{|2}}+F'''(x)\frac{(z-x)^3}{\underline{|3}}+\cdots,$$

was nichts Anderes ist als die Taylorsche Reihe.

Man kann sagen, daſs diese Reihe die Taylorsche Reihe ist, wenn x als konstant und z als veränderlich betrachtet wird, daſs sie dagegen die Bernoullische Reihe darstellt, wenn z als konstant und x als veränderlich betrachtet wird.

Wenn man x als konstant ansieht und z als veränderlich, so verlangt die Konvergenz der Reihe, daſs die Konstanten $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ... der Bedingung von Cauchy unterworfen sind, nämlich daſs die obere Grenze der Grenzwerte von $\left|\sqrt[\nu]{\frac{1}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(x)}\right|$ endlich sei.[1]) Bezeichnet man diese obere Grenze mit $\frac{1}{r_x}$, so ist bekanntlich der Konvergenzbereich der Reihe der Kreis mit dem Mittelpunkt $z=x$ und dem Radius r_x.

Meine Aufgabe ist es nun, die Konvergenz der Reihe zu untersuchen unter der Voraussetzung, daſs z konstant ist, während x sich verändert. Ich nehme an, daſs die Konstanten $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$, ... der Bedingung von Cauchy unterworfen sind, und konstruiere den Hauptstern A mit dem Mittelpunkt z, der zu diesen Konstanten[2]) gehört. Ferner schreibe ich die Bernoullische Reihe in der folgenden Form:

$$F(z+x-z-(x-z))=F(z+x-z)+$$
$$F'(z+x-z)\frac{-(x-z)}{\underline{|1}}+F''(z+x-z)\frac{(-(x-z))^2}{\underline{|2}}+F'''(z+x-z)\frac{(-(x-z))^3}{\underline{|3}}+\cdots$$

Indem man sich auf dieselben Erwägungen stützt, die ich Acta Math. **24** p. 191—192 gemacht habe, sieht man leicht, daſs diese Reihe denselben Konvergenzstern besitzt wie die Reihe:

$$F(z+2(x-z))=F(z+x-z)+$$
$$F'(z+(x-z))\frac{x-z}{\underline{|1}}+F''(z+x-z)\frac{(x-z)^2}{\underline{|2}}+F'''(z+x-z)\frac{(x-z)^3}{\underline{|3}}+\cdots$$

1) Sur la représentation etc. Prem. Note p. 43, Acta Math. **23**.

2) Sur la représentation etc. Prem. Note p. 48, Acta Math. **23**. Sur la représentation etc. Seconde Note p. 200, Acta Math. **24**.

Diesen Stern erhält man auf die folgende Weise. Man denke sich einen Vektor l der von dem Punkt z ausgeht. Beschränkt man nun den Vektor auf eine Länge r und versteht unter r eine hinreichend kleine positive Zahl, so kann man erreichen, dass ein Kreis vom Radius r, der von dem Endpunkt des so beschränkten Vektors als Mittelpunkt beschrieben wird, zu dem Gebiet A gehört. Es sei ϱ die obere Grenze von r. Läfst man nun den Vektor l eine ganze Umdrehung um den Punkt z machen und giebt ihm in jeder Stellung die Länge ϱ, die dieser Stellung entspricht, so erhält man einen Stern E, welcher der Konvergenzstern der Bernoullischen Reihe ist.

Man setze zum Beispiel

$$F(x) = \log(1 + x); \; z = 0.$$

Die Taylorsche Entwickelung giebt

$$\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Der Konvergenzkreis hat den Mittelpunkt $x = 0$ und geht durch den singulären Punkt $x = -1$.

Die Bernoullische Entwickelung giebt

$$\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}.$$

Der Konvergenzstern E, der ebenfalls den Punkt $x = 0$ zum Zentrum hat, besteht aus dem Teil der Ebene x zur Rechten der geraden Linie, die auf der reellen Achse senkrecht steht und durch den Punkt $x = -\frac{1}{2}$ läuft.

Man setze zweitens

$$F(x) = (1 + x)^{\alpha}; \; z = 0.$$

Die Taylorsche Entwickelung giebt

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(\nu-1))}{\underline{|\nu}} x^{\nu}$$

mit demselben Konvergenzkreis wie im vorhergehenden Fall.

Die Bernoullische Entwickelung giebt:

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\quad -1)\ldots(\alpha-(\quad -1))}{\underline{|\nu}} (1 + x)^{\alpha-\nu}(-x)^{\nu}.$$

Folglich:

$$(1 + x)^{-\alpha} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(\nu-1))}{\underline{|\nu}} \left(\frac{-x}{1+x}\right)^{\nu}$$

oder, indem man das Vorzeichen von α in das entgegengesetzte verwandelt,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{\underline{|\nu}} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\nu}.$$

Der Konvergenzstern ist derselbe wie in dem Falle von

$$F(x) = \log(1+x).$$

Wir haben gesehen, dafs die Reihe:

$$F(z+2(x-z)) = F(z+x-z) + F'(z+x-z)(x-z) + F''(z+x-z)\frac{(x-z)^2}{1\cdot 2} + F'''(z+x-z)\frac{(x-z)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

denselben Konvergenzstern E besitzt wie die **Bernoullische** Reihe.

Setzt man $\frac{1}{2}(x-z)$ an Stelle von $x-z$, so erhält man

$$F(x) = F\left(\frac{x+z}{2}\right) + F'\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{x-z}{2}\right) + \frac{1}{1\cdot 2}F''\left(\frac{x+z}{2}\right)\cdot\left(\frac{x-z}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}F'''\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{x-z}{2}\right)^3 + \cdots$$

Indem man wieder z als konstant und x als veränderlich annimmt, erhält man offenbar den Konvergenzstern E dieser neuen Reihe aus dem Konvergenzstern E der **Bernoullischen** Reihe, wenn man dem Vektor l in jeder Lage die Länge 2ϱ statt ϱ giebt.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dafs dieser Stern E, wie Herr **Phragmén**[1]) vor kurzem gezeigt hat, zugleich der Konvergenzstern des Ausdrucks von **Laplace**[2]) ist:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(z)}{\underline{|\nu}} \frac{(\alpha(x-z))^{\nu}}{\underline{|\nu}} e^{-\alpha}\, d\alpha,$$

der in den letzten Jahren der Gegenstand so mannigfaltiger Untersuchungen zuerst von Herrn **Poincaré**[3]) und dann von Herrn **Borel**[4]) gewesen ist.

---

1) Comptes Rendus. Paris. Tome **132** p. 1396—1399.

2) Oeuvres. T. VII p. 121 etc.

3) „Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies." Amer. Journal of Math. **7**.

„Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires." Acta Math. **8**.

4) „Fondements de la théorie des séries divergentes sommables." Journal de Math. (5) **2**. — „Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure." Journal de Math. (5) **2**. — „Mémoire sur les séries divergentes." Annales de l'École Normale (3) **16**. — „Leçons sur les séries divergentes." Paris 1901.

Man kann die Bernoulli-Taylorsche Reihe in der Form eines Grenzausdrucks schreiben:

$$F(z) - F(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} F^{(\nu)}(x) \frac{(z-x)^\nu}{\lfloor \nu}.$$

Wir haben gesehen, daſs, wenn man eine der beiden Gröſsen x, z als konstant, die andere als veränderlich betrachtet, sich immer ein Konvergenzstern ergiebt, daſs aber dieser Stern in den beiden Fällen sehr verschieden ist.

Dasselbe gilt von andern die Bernoulli-Taylorsche Reihe als speziellen Fall umfassenden Grenzausdrücken, die ich in früheren Arbeiten gegeben habe. Aber ich habe noch andere Grenzausdrücke

$$F(z) - F(x) = \lim_{\alpha=0} S_\alpha(z \mid x)$$

gebildet von noch allgemeinerer Art und gültig in einem Stern, den ich mit dem Buchstaben A[1]) bezeichnet habe. Wenn man in diesen Ausdrücken die Gröſse x als konstant ansieht, so gilt der Ausdruck in dem Stern A mit dem Zentrum x. Wenn man dagegen z als konstant ansieht, so gilt der Ausdruck in dem Stern A mit dem Zentrum z.

Der Beweis, den Bernoulli für seine Entwickelung giebt und der auch für die Taylorsche Entwickelung gilt, ist höchst einfach und natürlich.

Er schreibt die Identität hin:

$$F'(x) = F'(x) + F''(x)(x-z) - F''(x)(x-z) +$$
$$+ F'''(x)\frac{(x-z)^2}{\lfloor 2} + F'''(x)\frac{(x-z)^2}{\lfloor 2} + F^{(4)}(x)\frac{(x-z)^3}{\lfloor 3} + F^{(4)}(x)\frac{(x-z)^3}{\lfloor 3} + \cdots$$

und folgert, indem er nach x integriert:

$$F(x) - F(z) =$$
$$F'(x)\frac{(x-z)}{\lfloor 1} - F''(x)\frac{(x-z)^2}{\lfloor 2} + F'''(x)\frac{(x-z)^3}{\lfloor 3} - F^{(4)}(x)\frac{(x-z)^4}{\lfloor 4} + \cdots$$

Um dieser Beweisführung die nötige Strenge zu geben, genügt es, ein Restglied einzuführen, indem man setzt:

$$F(x,z) = F(z) - F(x) -$$
$$F'(x)\frac{(z-x)}{\lfloor 1} - F''(x)\frac{(z-x)^2}{\lfloor 2} - F'''(x)\frac{(z-x)^3}{\lfloor 3} \cdots - F^{n}(x)\frac{(z-x)^n}{\lfloor n}.$$

1) Ich hatte in jeder meiner drei ersten Noten in den Acta Math. einen andern Grenzausdruck gegeben.

Man erhält alsdann durch Differentiation nach x

$$F'(x,z) = -\frac{(z-x)^n}{\underline{|n}} \cdot F^{(n+1)}(x)$$

und, da $F(z,z) = 0$ ist,

$$F(x,z) = \frac{\Theta^n (z-x)^{n+1}}{\underline{|n}} \cdot F^{n+1}(z + \Theta(x-z)); \quad 0 \leq \Theta \leq 1.$$ [1]

Stockholm, den 22. März 1901.

---

1) Vergl. z. B. Todhunter: A Treatise on the differential calculus. Cambridge and London 1864. § 109.

Sur les termes complémentaires de la série de Taylor dus à Cauchy et à Lagrange;

Par M. E. Phragmén à Stockholm.

Dans une note intéressante publiée dans ce même Recueil, M. Mittag-Leffler, en parlant de la série dite de Bernoulli, fait observer que c'est l'analyse même de Bernoulli qui se retrouve dans la démonstration moderne la plus simple de la formule de Taylor.

Le terme complémentaire qu'on obtient le plus aisément de cette manière est celui qu'on doit à Cauchy.

A ce sujet, il y a lieu de faire la remarque bien simple qui suit, et qui met en pleine lumière la supériorité que possède cette expression de Cauchy sur celle de Lagrange.[1])

Le terme complémentaire de Cauchy détermine toujours le vrai rayon de convergence de la série de Taylor, tandis que celui de Lagrange, comme il est bien connu, donne souvent un rayon de convergence trop petit.

En effet, supposons que la série de Taylor

$$F(z) = F(x) + F'(x)(z - x) + \frac{F''(x)}{2!}(z - x)^2 + \cdots$$

converge pour

$$|z - x| < \varrho$$

et choisissons arbitrairement une quantité r positive et inférieure à ϱ. Je dis que le terme complémentaire de Cauchy tend uniformément vers zéro pour

$$|z - x| \leq r.$$

En effet, nous pouvons écrire le terme complémentaire de Cauchy

$$n(1 - \theta)^{n-1} \frac{F^{(n)}(x + \theta(z - x))}{n!}(z - x)^n \qquad (0 < \theta < 1).$$

---

1) Man vergleiche hierzu auch die Abhandlung von A. Pringsheim: „Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für Funktionen einer reellen Variablen“ in Math. Ann. 42, 153, 1893. Red.

Puisque la série de Taylor converge pour $|z - x| < \varrho$, on aura sûrement, en choisissant ϱ_1 de manière que $r < \varrho_1 < \varrho$:

$$\left| \frac{F^{(\nu)}(x)}{\nu!} \right| \cdot \varrho_1^\nu < M \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

M étant une certaine quantité finie. On en conclut aussitôt

$$| F(z) | < \frac{M \varrho_1}{\varrho_1 - |z - x|}$$

et de même

$$\left| \frac{F^{(n)}(z)}{n!} \right| < \frac{M \varrho_1}{(\varrho_1 - |z - x|)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(c'est le raisonnement bien connu de la théorie des *fonctions majorantes*). On a, par conséquent,

$$\left| n(1 - \theta)^{n-1} \frac{F^{(n)}(x + \theta(z - x))}{n!} (z - x)^n \right|$$

$$< \frac{M}{\left(1 - \theta \frac{|z - x|}{\varrho_1}\right)^2} \cdot \left(\frac{1 - \theta}{1 - \theta \frac{|z - x|}{\varrho_1}} \right)^{n-1} \cdot n \cdot \left(\frac{|z - x|}{\varrho_1} \right)^n .$$

Or cela est, pour $|z - x| \leq r$, inférieur à

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{r}{\varrho_1}\right)^2} \cdot n \left(\frac{r}{\varrho_1} \right)^n ,$$

expression dont la limite, pour n infini, est zéro.

C'est un raisonnement qu'on est accoutumé à employer dans plusieurs cas particuliers; toutefois il semble qu'on n'ait pas remarqué jusqu'ici que le même raisonnement s'applique au cas général.

On peut étudier de la même manière l'expression du terme complémentaire due à Lagrange. On arrive ainsi au résultat suivant qui mérite d'être énoncé:

Si la série de Taylor

$$F(z) = F(x) + F'(x)(z - x) + \frac{F''(x)}{2!}(z - x)^2 + \cdots$$

converge pour $|z - x| < \varrho$, *le terme complémentaire de Lagrange*

$$\frac{F^{(n)}(x + \theta(z - x))}{n!} \cdot (z - x)^n \qquad (0 < \theta < 1)$$

tend vers zéro du moins pour

$$|z - x| < \tfrac{1}{2} \varrho .$$

Stockholm, 22 mars 1901.

Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen.

Von Karl Heun in Berlin.

Die nachfolgenden Betrachtungen über das D'Alembertsche Prinzip beschränken sich auf Systeme, denen eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden zukommt. Deshalb konnten auch die „Bedingungsgleichungen", welche die kinetischen Differentialgleichungen ergänzen, prinzipiell ausgeschlossen werden. Der Auffassung Cliffords („Elements of Dynamic") entsprechend, sind nämlich die *vollständigen Geschwindigkeitssysteme* an die Spitze der Entwickelungen gestellt, wodurch zugleich die Bedeutung des Lagrangeschen Systems der Kinetik besonders klar hervortritt.

Freilich hat der Verfasser der „Mécanique analytique" gerade diese Bedingungsgleichungen in den allgemeinen Entwickelungen systematisch eingeführt, aber aus den Zusätzen zur zweiten Ausgabe seines Werkes geht deutlich hervor, dafs er in seiner Ideenentwickelung über diese formale Darstellungsweise hinausgegangen ist und in der analytischen Formulierung der *Geschwindigkeitssysteme* die wesentliche Aufgabe der Mechanik gebundener Systeme erkannt hat.

Erst durch die thatsächliche Ausführung dieses kinematischen Grundgedankens erhielt das D'Alembertsche Prinzip in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten eine weitreichende Leistungsfähigkeit, während es ohne denselben ein Schematismus geblieben wäre, der als solcher nur in denjenigen Fällen ausgereicht hätte, wo die Systemverbindung unmittelbar klar vor Augen lag, also das Geschwindigkeitssystem von vornherein bekannt war.

Für die gebundenen Systeme ist übrigens die Aufgabe der Mechanik mit der Aufstellung der expliziten Bewegungsgleichungen keineswegs erledigt — es bleiben noch die Bestimmungen der Reaktionen in beliebigen Querschnitten der Teilsysteme, in den Gelenken und den stützenden Lagern als eine nicht minder wichtige Problemgruppe (Kinetostatik) zu behandeln.

Diese zweite Seite des D'Alembertschen Prinzips war in der vorliegenden Arbeit um so mehr hervorzuheben, als die Darstellungen der allgemeinen Mechanik dieselbe meist nur oberflächlich streifen. Und doch ist der Techniker oft in der Lage, auf die Spannungsgleichungen gröfseren Wert legen zu müssen als auf die genaue Erforschung der Bewegung des Systems.

Zu allen Zeiten haben die *Anwendungsgebiete* auf die rationelle Mechanik einen deutlich erkennbaren Einflufs ausgeübt. Zuerst war es die Astronomie, welche besonders die Kinetik des freien Punktsystems in der erfolgreichsten Weise gefördert hat, dann die Physik, die schon soweit und in so eigenartigem Sinne auf die Kinetik der veränderlichen Systeme eingewirkt hat, dafs man recht wohl von einer „physikalischen Mechanik" reden kann — und in der neuesten Zeit sind es mannigfache interessante Probleme der theoretischen Maschinenlehre, die unverkennbar zu einer tiefer gehenden Bearbeitung des D'Alembertschen Prinzips als der natürlichen Grundlage der Kinetostatik auffordern.

In der nachfolgenden Darstellung des D'Alembertschen Prinzipes und seiner Folgerungen haben wir ohne Ausnahme die gerichteten kinematischen und dynamischen Gröfsen als Vektoren aufgefafst und dementsprechend auch für die Rechnung die Algorithmen des „inneren" und des „äufseren" Produktes zweier Vektoren benutzt. Diese Operationen haben sich schon so weit eingebürgert, dafs wir hier nur die Bezeichnungsweise anzudeuten haben und im übrigen auf die zahlreichen Schriften (u. a. A. Föppls „Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität") über Vektoranalysis verweisen können.

Wir bezeichnen jeden Vektor durch einen über den betreffenden Buchstaben gesetzten Querstrich. Danach ist das „innere" Produkt definiert durch die Gleichung

$$\bar{a}\bar{b} = ab\cos(\bar{b}|\bar{a}).$$

Das „äufsere" Produkt ist durch einen fortlaufenden Querstrich bezeichnet, da es einen neuen Vektor darstellt. Setzen wir

$$\overline{ab} = \bar{c},$$

so ist $\bar{c}$ senkrecht auf $\bar{a}$ und $\bar{b}$, und seine Gröfse ist bestimmt durch

$$c = ab\sin(\bar{b}|\bar{a}).$$

Hieraus folgt auch, dafs

$$\overline{ba} = -\overline{ab}$$

sein mufs, da $\sin(\bar{b}|\bar{a}) = -\sin(\bar{a}|\bar{b})$ ist.

Für ternäre Produkte gelten die Relationen

$$\bar{a}\overline{bc} = \bar{c}\,\overline{ab} = \bar{b}\,\overline{ca} \quad \text{(vgl. Föppl. Einführ. S. 25)}$$

und

$$\overline{a(bc)} = (\bar{a}\bar{c}) \cdot \bar{b} - (\bar{a}\bar{b}) \cdot \bar{c} \qquad \text{(ib. S. 27).}$$

Quaternäre Produkte treten hier nur in der folgenden Verbindung auf:

$$\overline{ab}\,\overline{cd} = (\bar{a}\bar{c})(\bar{b}\bar{d}) - (\bar{b}\bar{c})(\bar{a}\bar{d}).$$

Das Rechnen mit diesen einfachen Hilfsmitteln hat vor den gewöhnlichen analytischen Koordinatenmethoden den nicht hoch genug zu schätzenden Vorteil eines ununterbrochen anschaulichen Einblicks in den naturgemäfsen Prozefs der Problemlösung, indem an Stelle des schematischen Rechnens mit arithmetischen Gröfsen ein vorwiegend konstruktives Denken tritt, welches den unzersplitterten geometrischen und mechanischen Grundbegriffen Schritt für Schritt im Raume folgt.

A. Formulierungen des Prinzipes.

1. *Die Vorgeschichte des Prinzipes.* — Christian Huygens hat in seinem „Horologium oscillatorium" (1673) zum erstenmal mit Erfolg ein schwieriges Problem der Mechanik gebundener Systeme behandelt, indem er das Oscillationszentrum für das zusammengesetzte Pendel in eigenartiger Weise durch Anwendung des Prinzipes der Erhaltung der Energie bestimmte. Seine indirekte Lösungsmethode dieses wohl zuerst vom Pater Mersenne gestellten Problems sagte dem Geschmack der Zeitgenossen nicht zu und veranlafste einen wissenschaftlichen Streit, der sich bis ins 18. Jahrhundert hineinzog. In diesen Zeitraum (1681—1703) fällt die Vorgeschichte des D'Alembertschen Prinzipes. Jacob Bernoulli schlug zuerst eine direkte Lösung vor, nachdem er auf den glücklichen Gedanken gekommen war, den Vektor der eingeprägten Kraft (Schwere) für jeden materiellen Punkt des Pendels in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die erste die effektive Massenbeschleunigung hervorruft, während die andere die Reaktion infolge der Systemverbindung darstellt. Diese letzteren Vektoren halten sich in ihrer Gesamtheit das Gleichgewicht, da sie den thatsächlichen Bewegungszustand des Pendels nicht beeinflussen können. Aber man erkannte in dieser Periode noch nicht die grofse Tragweite dieser fundamentalen Überlegung, glaubte vielmehr in jedem besonderen Falle eines Systemproblems eigenartige Kunstgriffe anwenden zu müssen, um zu den Bewegungsgleichungen zu gelangen.

Vielleicht ist es als ein glücklicher Umstand für die Entwickelung der Kinetik anzusehen, dafs die Systematisierung derselben nicht so

früh eintrat. Jedenfalls entging man den Nachteilen, welche eine vorzeitige Auswahl und Festlegung einer allgemeinen Methode auf die freie Entfaltung des originellen Denkens und auf die Bildung einer lebendigen Anschauung der Bewegungsvorgänge im konkreten Falle nur zu oft ausgeübt hat.

Newton würdigt in seinen „Prinzipien“ (1687) die Kinetik gebundener Systeme, deren erste Entwickelungsphase ihm doch aus dem Huygensschen Werke bekannt war, kaum der Beachtung. Indem er sich auf freie Punktsysteme beschränkt, geht er dem dynamischen Begriff der Systemreaktion prinzipiell aus dem Wege. Dagegen hat er die Bedeutung seiner „lex tertia“ für die Mechanik der Maschinen (cf. Principia, Leges motus, Scholium) im allgemeinen richtig erkannt. Da er jedoch das Bernoullische Prinzip der Vektorzerlegung für gebundene Systeme keineswegs antizipiert hat, so müssen die Versuche der Engländer (Thomson u. Tait, Perry), ihrem grofsen Landsmanne die Entdeckung des D'Alembertschen Prinzipes zu imputieren, als gänzlich verfehlt erachtet werden. Man sollte überhaupt bei der Beurteilung der Leistungen Newtons in der Mechanik stets im Auge behalten, dafs er mit der formalen Begründung und speziellen Erforschung der Bewegungsgesetze freier Punktsysteme (Planetenproblem) gerade genug zu thun hatte, und dafs diejenigen Aufgaben der physischen Astronomie, welche sich auf gebundene Systeme (Präzession des Äquinoktien) beziehen, zu ihrer Bewältigung Hilfsmittel verlangten, die ihm durchaus nicht zu Gebote standen.

2. *Die allgemeine Auffassung des Prinzipes durch D'Alembert.* — Das 18. Jahrhundert bildet einen ganz eigenartigen Abschnitt in der Geschichte des intellektuellen Fortschreitens der Kulturvölker. Die naiven grundlegenden Ideen lagen hinter ihm — soweit gefördert und verbreitet, dafs die führenden Geister nun die Verpflichtung auf sich nahmen, diese Ideen von dem beschränkten Boden ihrer Entstehung loszureifsen, ihre Tragweite nach allen Richtungen zu erforschen, sie zu systematisieren und so auf den vorhandenen Fundamenten ein uns — den aus ferner Zeit Zurückblickenden — in seinen Anfängen bescheiden erscheinendes Gebäude der exakten Wissenschaften aufzuführen. Aber grofsartig ist diese geistige Architektur des 18. Jahrhunderts dennoch!

Die Baumeister sind ihrer hohen Aufgabe trefflich gewachsen — gründlich ausgerüstet durch die rasch aufstrebende Mathematik, umsichtig und weitblickend dank der zahlreichen wichtigen Entdeckungen in Astronomie und Physik und von einer Begeisterung und Liebe für ihre Sache durchdrungen, die ihren Leistungen für alle Zeiten das Gepräge einer lebensvollen Klassizität aufgedrückt hat.

Mitten in diesem Jahrhundert mutigen Schaffens steht D'Alembert. Als Philosoph, Mathematiker und Physiker hat er mit erstaunlicher Energie die Wissenschaft durch zahlreiche Abhandlungen bereichert — aber seine bedeutendsten Leistungen liegen auf dem speziellen Gebiete der Mechanik. In dem *„Traité de Dynamique“* (1743) hat er die Grundlagen der Kinetik gebundener Systeme gelegt und damit die Ideenentwickelung, die von Galilei so erfolgreich eingeleitet war, zu einem bestimmten systematischen Abschlufs gebracht. Die unbeschränkte Giltigkeit des Bernoullischen Gedankens der dynamischen Vektorzerlegung für unfreie Systeme war nun erkannt und wurde in der Form eines spezifisch kinetischen Prinzipes der allgemeinen Bewegungslehre als unfehlbares Werkzeug zu Grunde gelegt. Dieses prinzipielle Rezept lautet in D'Alemberts[1]) Fassung (Dynamik S. 58):

„Man zerlege die jedem Körper (Massenpunkte) eingeprägten Bewegungen (Impulse) a, b, c *etc. in je zwei andere* a, α; b, β; c, γ *etc. derart, dafs die Körper, wenn man denselben nur die Bewegungen* a, b, c *etc. eingeprägt hätte, diese Bewegungen, ohne sich gegenseitig zu hindern, hätten bewahren können; und dafs, wenn man denselben nur die Bewegungen* α, β, γ *etc. eingeprägt hätte, das System in Ruhe geblieben wäre.“*

Wirkt also auf den Massenpunkt m des Systems ein äufserer Impuls $\bar{h}$, welcher von der Ruhe aus die Bewegungsgröfse $m\bar{v}$ hervorbringt, so entsteht infolge der Systemverbindungen die Reaktion $\bar{r}$. Es ist demnach

$$\bar{h} = m\bar{v} + \bar{r} \tag{1}$$

für jeden Massenpunkt des Systems, und die Reaktionsimpulse $\bar{r}'$, $\bar{r}''$, $\bar{r}'''$ etc. halten sich in ihrer Gesamtheit das Gleichgewicht. Besitzt das System vor dem Auftreten der Impulse $\bar{h}$ bereits Geschwindigkeiten, die durch das Symbol $\bar{v}_0$ bezeichnet sind, dann ist

$$\bar{h} = m(\bar{v} - \bar{v}_0) + \bar{r} \tag{2}$$

für jeden einzelnen materiellen Punkt, und die Resultante aller Reaktionen $\bar{r}$ ist nach wie vor gleich Null. Die letzte Gleichung vermittelt den Übergang von der Kinetik der Impulse zur Kinetik der stetig wirkenden Kräfte. Für das Zeitelement dt mufs der Impuls $\bar{h}$ von derselben Gröfsenordnung unendlich klein sein, also gleich $d\bar{h}$. Dementsprechend

1) Wegen der bequemen Zugänglichkeit zitieren wir nach der deutschen Ausgabe von Arthur Korn in Ostwalds Klassikersammlung. Leipzig 1899.

ist auch $\bar{r}$ durch $d\bar{r}$ zu ersetzen. Der zugehörige Geschwindigkeitszuwachs $\bar{v} - \bar{v}_0$ wird gleich $d\bar{v}$, und wir erhalten die Relation

$$d\bar{h} = m d\bar{v} + d\bar{r}.$$

Wir setzen ferner

$$d\bar{h} = \bar{k} dt, \quad d\bar{r} = \bar{s} dt,$$

beziehen also die stetig wirkenden Kräfte $\bar{k}$ und $\bar{s}$ auf die Zeiteinheit und gewinnen so die Grundgleichung für die dynamische Dauerwirkung in der Form

$$\bar{k} = m \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{s}. \tag{3}$$

In Bezug auf das vollständige System halten sich die Reaktionen wieder das Gleichgewicht. D'Alembert hat diesen Übergang für ganz selbstverständlich gehalten und hebt ihn deshalb gar nicht besonders hervor. Man darf ihm daraus auch keinen Vorwurf machen; denn die prinzipielle Vorausstellung der Impulsauffassung ist jetzt wieder ganz modern geworden und hat auch den allgemein anerkannten Vorzug gröfserer Anschaulichkeit als die unmittelbare Betrachtung der stetigen Bewegung.

Unserer Schreibweise der Gleichungen (1) und (3) liegt offenbar der Satz vom Parallelogramm der Impulse und Kräfte zu Grunde. D'Alembert benutzt als statische Prinzipien aufserdem den Satz des Hebels und andeutungsweise das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in einer Fassung, welche deutlich erkennen läfst, dafs er die Tragweite der letzteren nicht einmal in dem Umfange erfafst hat, wie Jacob Bernoulli (1717). Seine zahlreichen Beispiele haben aus diesem Grunde einen etwas einförmig elementaren Charakter, wenn auch ihre Bedeutung für die damaligen Zeitverhältnisse nicht unterschätzt werden darf. Der interessanteste Teil des Traité, nämlich die mathematische Behandlung der Stofsgesetze, mufs von der gegenwärtigen Betrachtung ausgeschlossen werden, da die vollständige Durchführung derselben physikalische Hypothesen verlangt.

3. *Die allgemeine, formale Elimination der Reaktionen durch Lagrange.* — D'Alembert sagt in seinem *Traité* (S. 57):

„Ich werde mich hier begnügen, die Bewegung der Körper zu behandeln, welche auf einander in beliebiger Weise stofsen, oder solcher, welche auf einander durch Fäden oder unbiegsame Stäbe Züge ausüben. Ich werde mich um so lieber an diesen Gegenstand halten, als uns bisher die gröfsten Geometer nur eine sehr kleine Zahl von Problemen dieser Art gegeben haben und ich, wie ich hoffe, durch die allgemeine Methode, welche ich darlegen werde, alle, die mit der Rechenkunst und mit den Prinzipien der Mechanik vertraut sind, in den Stand setze, die schwierigsten Probleme dieser Art zu lösen."

Dieser kühne Ausspruch kann gar leicht Anlafs zu Mifsverständnissen in Betreff der Leistungsfähigkeit der D'Alembertschen Methode geben. Bei allen einfacheren, d. h. leicht übersehbaren Systemverbindungen konnte er selbstverständlich die Reaktionen $\bar{r}$ oder $\bar{s}$ eliminieren — da in diesen Fällen die elementarsten statischen Prinzipien ausreichten — und gelangte auf diesem Wege zu den kinetischen Differentialgleichungen. Hätte er aber nur statt der diskreten Massenpunkte (*corps*) bei seinen Faden- und Stabverbindungen starre Systeme von endlichen Dimensionen betrachtet, so wären ihm die Grenzen der Leistungsfähigkeit der ihm zu Gebote stehenden statischen Hilfsmittel nur zu bald zur Erkenntnis gekommen. Aber den wichtigsten prinzipiellen Schritt zur Begründung der Kinetik gebundener Systeme hat er doch gethan. Gerade weil er die Aufstellung der Bewegungsgleichungen solcher Systeme auf ein rein *statisches Problem* allgemein zurückgeführt hatte, so setzte er damit der Mechanik seiner Zeit ein ganz bestimmtes Ziel, dessen Tragweite er selbst nicht gekannt hat, nämlich die *systematische Ausbildung der Statik* gebundener Systeme, die von seinem jüngeren Zeitgenossen Lagrange mit wahrhaft erstaunlichem Erfolge betrieben wurde.

Auf der Idee Johann Bernoullis weiterbauend, hat Lagrange das „Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten" als die allgemeinste formale Grundlage der Statik aller materiellen Systeme geschaffen. Die Ausarbeitung dieses fundamentalen Prinzips in Rücksicht auf starre Systeme, Gelenksysteme aus starren Gliedern, Fadensysteme, feste, elastische und flüssige Kontinua hat diesen genialsten Förderer der Mechanik von seinem 24. Lebensjahre bis zu seinem Ende (1813) beschäftigt. In seinen gesamten Werken nehmen diese Leistungen freilich einen verhältnismäfsig kleinen Raum ein, aber sie leuchten wie ein besonders kostbarer Edelstein aus dem reichen Schatze seiner Schöpfungen hervor. Die *„Mécanique analytique"* (1788) wurde das *„scientific poem"* für Hamilton und wird es bleiben, so lange man die Mechanik nach Leonardo da Vinci als das „Paradies der Mathematik" betrachtet.

Der Kernpunkt in dem Lagrangeschen System der Mechanik ist die scharfe und zielbewufste Auffassung des Begriffs der *möglichen Geschwindigkeit* (oder des hiermit gleichbedeutenden virtuellen Bewegungselementes) eines beliebigen Massenelementes eines wohldefinierten materiellen Systems. Soweit es gelungen ist, solche möglichen Geschwindigkeitssysteme zur *mathematischen Formulierung* zu bringen, soweit hat die Mechanik positive Resultate erzielt — darüber hinaus liegt alles im Dunkeln. Kennt man den eindeutigen, vollständigen

Ausdruck für das virtuelle Bewegungselement $\delta\bar{x}$ eines Systempunktes mit der Masse m, dessen Ort im Raume durch den Vektor $\bar{x}$ besimmt ist, so besteht für das Gleichgewicht eines Impuls- oder Kräftesystems $\bar{h}$, resp. $\bar{k}$ nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Gleichung[1])

$$\Sigma\bar{h}_\nu\delta\bar{x}_\nu = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\bar{k}_\nu\delta\bar{x}_\nu = 0,$$

wobei sich die Summationen über das ganze System erstrecken. Nach Ausführung der „inneren" Vektorprodukte zerfällt jede dieser Gleichungen in ein System von ebenso vielen unabhängigen statischen Relationen, als in den $\delta\bar{x}$ von einander unabhängige Parameter resp. Systemkoordinaten vorkommen; denn wir haben im Sinne Lagranges vorausgesetzt, dafs $\delta\bar{x}$ eindeutig mathematisch formuliert ist.

Ist die Anzahl dieser Parameter, für das ganze System genommen, eine *unendliche*, so wird die virtuelle Arbeit nur für ein wohldefiniertes *Raumelement* des Systems *explizit* ausgeführt, und man erhält im allgemeinen partielle Differentialgleichungen als Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts für ein Kräftesystem, welches zu jedem Raumelement festgelegt sein muss. Die inneren Spannungen fallen aus den kinetischen Gleichungen jetzt nicht mehr heraus.

Lagrange hat allerdings in seinen statischen Entwicklungen nicht immer den *vollständigen* Ausdruck für $\delta\bar{x}$ im Auge gehabt, sondern gerade in seinen allgemeineren Ansätzen mit besonderer Vorliebe vielfach *Bedingungsgleichungen* benutzt. Hier soll aber, wie schon bemerkt, von allen holonomen Bedingungen ausdrücklich abgesehen werden, während nicht holonome Einschränkungen der Bewegungen — ungeachtet ihrer grofsen Bedeutung für die Kinetik realer Bewegungsvorgänge — von der gegenwärtigen Betrachtung des D'Alembertschen Prinzipes ausgeschlossen werden.

Mit Rücksicht auf diese engere Auffassung nehmen die kinetischen Gleichungen die Form an:

$$\Sigma\bar{r}\delta\bar{x} = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\bar{s}\delta\bar{x} = 0,$$

wofür man wegen der Gleichungen (1) und (3) auch schreiben kann:

$$\Sigma(\overline{h - mv})\delta\bar{x} = 0, \tag{4}$$

$$\sum\left(\overline{k - m\frac{dv}{dt}}\right)\delta\bar{x} = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichungen bilden in dem Lagrangeschen System die Grundlagen der Kinetik der Impulswirkungen und der stetigen Kraftwirkung. Die spezifische Leistung Lagranges, nämlich die Durcharbeitung dieser

1) Der Fall der Ungleichung wird hier und im folgenden ausgeschlossen.

Fundamentalgleichungen für diejenigen Problemgruppen, welche hier zunächst berücksichtigt werden sollen, findet in Abschnitt C eingehendere Erörterung.

4. *Das D'Alembertsche Prinzip bei Poisson.* — D'Alembert sowohl als auch Lagrange hatten als nächstes und wichtigstes Ziel die Gewinnung der *Differentialgleichungen der Bewegung* im Auge, während ihnen die Bestimmung der *Reaktionen* ein Problem von untergeordneter Bedeutung war, das sie zwar nicht in allen Fällen vernachlässigten, aber doch unter allgemeinen Gesichtspunkten nicht weiter verfolgten. Die immer mannigfacher werdenden Anwendungen der rationellen Systemmechanik mufste jedoch die Mathematiker im Laufe der Zeit darauf aufmerksam machen, dafs auch diese anfangs vernachlässigte Seite des D'Alembertschen Prinzips — die Kinetostatik — für die Praxis ebenso wichtig sei, wie die Bewegungserscheinungen als solche. Nun hatte Lagrange die Anwendungen der Mechanik auf astronomische Probleme ganz besonders bevorzugt, während ihm die technischen Anwendungen fern lagen, wie ja auch seine prinzipielle Ignorierung der Flächenreibung in der *„Mécanique analytique"* zur Genüge zeigt.

Poisson hatte gleichfalls ein grofses Interesse für astronomische Probleme (Störungstheorie, Präzession und Nutation), aber er betrachtete doch die Ausbildung der *mechanischen Physik* als die Hauptaufgabe seines Lebens und war dadurch von der systematischen Weiterbildung der allgemeinen rationellen Mechanik schon frühzeitig abgelenkt. Daneben hat er sich mit grofsem Erfolge auf spezifisch praktische Probleme geworfen und in dieser Richtung den Grund gelegt für die *„Mécanique appliquée"*, die bald in Poncelet ihren eifrigsten und geschicktesten Vertreter fand. Auch Poissons schöner Arbeit über die Wirkung des Schusses einer Kanone auf die verschiedenen Teile ihrer Lafette (J. Polyt. cah. 21) wollen wir hier gedenken, um anzudeuten, wie seine Tendenzen — im Vergleich mit den Lagrangeschen — schon eine merklich andere Richtung genommen hatten.

In Poissons *„Traité de Mécanique"* (1811) finden wir daher eine Auffassung des D'Alembertschen Prinzipes, welche die Bedeutung der *Reaktionen* (innere Spannungen, Auflagerdrücke der bewegten Systemteile) scharf hervorhebt und namentlich bei den praktischen Problemen den wesentlichen Einfluss der *Reibungen* berücksichtigt.

Die zahlreichen Lehrbücher der rationellen Mechanik, welche auf Poissons *Traité* folgten, bieten nichts Bemerkenswertes in Bezug auf die Formulierung des D'Alembertschen Prinzipes. Selbst das vortreffliche und in mancher Richtung aufserordentlich gründliche Lehrbuch von

Routh (Rigid Dynamics) giebt die stereotype Auffassung wieder, an welche sich eine briefliche Auslassung Airys über das Prinzip anschlieſst, die aber sachlich nichts Erhebliches enthält.

B. Die kinematischen und dynamischen Grundbegriffe.

5. *Kinematische Kombinationen mit effektiven Elementen.* — Die Grundbegriffe der Kinematik des Punktes sind: der ortsbestimmende Vektor desselben, welchen wir mit $\bar{x}$ bezeichnen wollen, die totale Zeitderivierte dieses Vektors $\frac{d\bar{x}}{dt} = \dot{\bar{x}} = \bar{v}$, welche das analytische Maſs der Geschwindigkeit darstellt, und die totale Zeitderivierte des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\bar{x}}$, nämlich $\frac{d\dot{\bar{x}}}{dt} = \ddot{\bar{x}} = \bar{w}$, welche die Beschleunigung der Punktbewegung genannt wird. Wir bilden nun die skalaren Funktionen

$$P = \tfrac{1}{2}\bar{x}\bar{x} \quad \text{und} \quad E = \tfrac{1}{2}\dot{\bar{x}}\dot{\bar{x}}.$$

P nennen wir die Polfunktion oder die determinierende Funktion des Vektors $\bar{x}$. E ist die Energiefunktion (für die Masseneinheit) oder die determinierende Funktion des Vektors $\dot{\bar{x}}$. Aus den drei Grössen $\bar{x}$, $\dot{\bar{x}}$, $\ddot{\bar{x}}$ bilden wir ferner drei „innere" und drei „äussere" Produkte; dann erkennt man unmittelbar, daſs $\bar{x}\dot{\bar{x}} = \frac{dP}{dt}$, $\bar{x}\ddot{\bar{x}} = \frac{d^2P}{dt^2} - 2E$ und $\dot{\bar{x}}\ddot{\bar{x}} = \frac{dE}{dt}$ wird. Das äuſsere Produkt $\overline{x\dot{x}}$ ist ein Vektor, welcher auf $\bar{x}$ und $\dot{\bar{x}}$ senkrecht steht und die Gröſse $x\dot{x}\sin(\dot{\bar{x}}|\bar{x})$ besitzt. Man nennt diesen Vektor in der Kinematik des Punktes die doppelte Sektorengeschwindigkeit des Vektors $\bar{x}$, wir ziehen jedoch hier — mit Rücksicht auf seine Verwendung in der Mechanik der gebundenen Systeme — den Namen „Moment der Geschwindigkeit" vor und bezeichnen denselben mit $\overline{M}_v$. Dann ist selbstverständlich $\overline{x\ddot{x}} = \frac{d\overline{M}_v}{dt}$. Die dritte Kombination durch äuſsere Produktbildung ist $\overline{\dot{x}\ddot{x}}$. Dieser Vektor steht auf der Geschwindigkeit und der Beschleunigung gleichzeitig senkrecht und hat die Gröſse $\dot{x}\ddot{x}\sin(\ddot{\bar{x}}|\dot{\bar{x}})$. Sein skalarer Wert ist auch, wie man ohne weiteres erkennt, gleich dem Quotienten $v^3 : r_1$, wenn der Hauptkrümmungsradius in dem betreffenden Punkte der Bahn mit r_1 bezeichnet wird. Er ist bis jetzt kinematisch nur von Somoff in Betracht gezogen worden. Da er noch keinen Namen erhalten hat, so wollen wir ihm seine Anonymität auch ferner bewahren und denselben im folgenden mit dem Symbol $\bar{B}$ kennzeichnen.

Die direkten Kombinationen der kinematischen Grundelemente sind also in schematischer Zusammenstellung:

I.

Innere Produkte:	*Äufsere* Produkte:
1) $\bar{x}\dot{\bar{x}} = \frac{dP}{dt}$,	1') $\overline{x\dot{x}} = \overline{M}_e$,
2) $\bar{x}\ddot{\bar{x}} = \frac{d^2P}{dt^2} - 2E$,	2') $\overline{x\ddot{x}} = \frac{d\overline{M}_e}{dt}$,
3) $\dot{\bar{x}}\ddot{\bar{x}} = \frac{dE}{dt}$.	3') $\overline{\dot{x}\ddot{x}} = \overline{B}$.
$P = \frac{1}{2}\bar{x}\bar{x}$,	$E = \frac{1}{2}\dot{\bar{x}}\dot{\bar{x}}$.

6. *Kinematische Kombinationen mit virtuellen Elementen.* — Die entsprechenden kinematischen Kombinationen mit dem virtuellen Wegelement bilden wir nur mit $\delta\bar{x}$, nicht mit $\delta^2\bar{x}$, da wir die „astatische Kinetik", von welcher nur die rudimentärsten Grundbegriffe ausgebildet sind, von dieser Betrachtung ausschliefsen. Unter dieser Einschränkung kommt also zunächst das skalare Produkt $\dot{\bar{x}}\delta\bar{x}$ in Betracht. Seine Bedeutung ist der systematischen Kinematik geläufig. Wir setzen $\dot{\bar{x}}\delta\bar{x} = \delta' A_e$; dann ist A_e diejenige Funktion, welche man für die Masseneinheit die „Aktion" des beweglichen Punktes genannt hat. Die Symbole d' und δ' bezeichnen hier und im folgenden Differential-, resp. Variationsausdrücke, welche im allgemeinen nicht das vollständige Differential, resp. die vollständige Variation derjenigen Funktionen sind, auf die sich die betreffenden Symbole beziehen. Durch eine einfache Differentiation der vorhergehenden Relation nach der Zeit findet man nun die folgende Identität:

$$\ddot{\bar{x}}\delta\bar{x} = \frac{d}{dt}(\delta' A_e) - \delta E.$$

Hierin ist natürlich

$$\delta E = \dot{\bar{x}}\delta\dot{\bar{x}}.$$

Wir nehmen nun — der Vollständigkeit wegen — auch die den *skalaren* Produkten entsprechenden *Vektorprodukte* hinzu. Das äufsere Produkt $\overline{\dot{x}\delta x}$ steht auf der Geschwindigkeit und dem virtuellen Wegelement senkrecht und hat den absoluten Wert $\dot{x}\delta x \sin(\delta\bar{x}|\dot{\bar{x}})$. Setzen wir $\overline{\dot{x}\delta x} = \delta'\overline{S}_e$, so folgt durch Differentiation nach der Zeit t die Identität:

$$\overline{\ddot{x}\delta x} = \frac{d}{dt}(\delta'\overline{S}_e) - \overline{\dot{x}\delta\dot{x}}.$$

Hiernach haben wir das folgende Schema kinematischer Kombinationen mit dem virtuellen Wegelement $\delta\bar{x}$:

II.

1) $\dot{\bar{x}}\delta\bar{x} = \delta' A_e$,	1') $\overline{\dot{x}\delta x} = \delta'\overline{S}_e$,
2) $\ddot{\bar{x}}\delta\bar{x} = \frac{d}{dt}(\delta' A_e) - \delta E$.	2') $\overline{\ddot{x}\delta x} = \frac{d}{dt}(\delta'\overline{S}_e) - \overline{\dot{x}\delta\dot{x}}$.

7. *Dynamische Kombinationen mit effektiven Elementen.* — Die entsprechenden *dynamischen* Grundbegriffe sind der Impuls $\bar{h}$ und die dauernd wirkende Kraft $\bar{k}$. Das innere Produkt $\bar{x}\bar{h}$ kann als das elementare „Virial des Impulses" bezeichnet werden, indem wir die Nomenklatur von Clausius mit einer unbedeutenden Abänderung auf Momentankräfte (Impulse) übertragen. Wir setzen $\bar{x}\bar{h} = V_h$. Der analoge Begriff für zeitliche Kräfte, nämlich $\bar{x}\bar{k}$, ist in der Mechanik eingebürgert. Wenn wir $\bar{x}\bar{k} = V_k$ setzen und V_k als „Virial der Kraft" $\bar{k}$ bezeichnen, so ändern wir, wie es bereits üblich ist, nur das Vorzeichen der von Clausius so benannten Gröfse und lassen den von ihm eingeführten Faktor $\frac{1}{2}$ weg.

Dem üblichen Sprachgebrauch entsprechend, bedeuten die Produkte $\dot{\bar{x}}\bar{h} = L_h$ und $\dot{\bar{x}}\bar{k} = L_k$ die „Leistung" des Impulses $\bar{h}$ und der dauernd wirkenden Kraft $\bar{k}$. Die äufseren Produkte $\overline{xh} = \overline{M}_h$ und $\overline{xk} = \overline{M}_k$ sind die „Momente" von $\bar{h}$ und $\bar{k}$ in Bezug auf den Anfangspunkt des Vektors $\bar{x}$.

Die „äufseren" Vektorprodukte $\overline{\dot{x}h} = \overline{N}_h$ und $\overline{\dot{x}k} = \overline{N}_k$ sollen im folgenden nur gelegentlich betrachtet werden, da ihre mechanische Bedeutung noch nicht genügend untersucht ist. Gerade aus diesem Grunde empfehlen wir sie hier aber doch der Beachtung. Denn es hat sich bei der Entwicklung der systematischen Mechanik schon wiederholt herausgestellt, dafs formale Konzeptionen, die anfangs als unnütz angesehen wurden, später eine grofse Bedeutung erhielten. Ich erinnere in dieser Beziehung nur an die von Schweins eingehend betrachteten Fliehmomente, die nachher als Viriale durch die Arbeiten von Clausius und Yvon Villarceau zu allgemeinem Ansehen gebracht wurden.

Die Zusammenstellung der dynamischen Kombinationen mit effektiven kinematischen Elementen ergiebt demnach die folgende Übersicht:

III.

	Für Momentankräfte:		Für Zeitkräfte:
1)	$\bar{x}\bar{h} = V_h$,	1')	$\bar{x}\bar{k} = V_k$,
2)	$\dot{\bar{x}}\bar{h} = L_h$,	2')	$\dot{\bar{x}}\bar{k} = L_k$,
3)	$\overline{xh} = \overline{M}_h$,	3')	$\overline{xk} = \overline{M}_k$,
4)	$\overline{\dot{x}h} = \overline{N}_h$.	4')	$\overline{\dot{x}k} = \overline{N}_k$.

8. *Dynamische Kombinationen mit dem virtuellen Wegelement.* — Unter dieser Rubrik sind die „inneren" Produkte $\bar{h} \cdot \bar{\delta x} = \delta' A_h$ und $\bar{k} \cdot \bar{\delta x} = \delta' A_k$ die wichtigsten, denn sie definieren die virtuelle „Arbeit" für Momentankräfte und Zeitkräfte. Daneben wollen wir aber auch hier die entsprechenden äufseren Produkte $\overline{h \cdot \delta x} = \delta' \overline{S}_h$ und $\overline{k \cdot \delta x} = \delta' \overline{S}_k$

mit aufführen[1]), da sie bei der *astatischen* Betrachtung der Systemmechanik von Nutzen sind.

Wir erhalten also die folgende Zusammenstellung:

IV.

	Für Momentankräfte:		Für Zeitkräfte:
1)	$\bar{h} \cdot \delta\bar{x} = \delta' A_h,$	1')	$\bar{k} \cdot \delta\bar{x} = \delta' A_k,$
2)	$\overline{h \cdot \delta x} = \delta' \bar{S}_h.$	2')	$\overline{k \cdot \delta x} = \delta' S_k.$

Die im vorstehenden angeführten kinematischen und dynamischen Kombinationen bilden in bestimmter Umgrenzung ein formales Gerippe der systematischen Mechanik des Punktes. Natürlich kann man nachträglich nicht wünschen, dafs sich die Mechanik nach einem solchen schematischen Programm hätte thatsächlich entwickeln sollen; denn dies hiefse die Pedanterie zur Richtschnur des Fortschrittes machen, was einer gesunden Entwicklung prinzipiell zuwiderläuft. Andererseits haben wir jetzt, nachdem die Statik und Kinetik in einer hochausgebildeten Entwicklungsphase vor uns liegt, wohl das Recht, die Frage zu stellen, wie sich die aus mannigfachen und häufig mehr oder weniger zufälligen Bedürfnissen hervorgegangenen Grundbegriffe einem künstlichen Schema unterordnen lassen. Selbst scheinbar abgelegenere allgemeine Sätze der Mechanik, wie das Theorem von Yvon Villarceau für freie Punktsysteme, haben in einem solchen Schema eine bestimmte Stellung. Der angedeutete Satz ist nichts anderes als die Formel 2) der Übersicht I, nachdem die Summation über das ganze Punktsystem ausgeführt ist.

Für uns hat die Aufstellung der obigen Schemata einen ganz bestimmten Zweck. Wir wollen dieselben nämlich unmittelbar auf die D'Alembertsche Grundgleichung, welche die Zerlegung des dynamischen Vektors ausdrückt, anwenden und dadurch Verbindungen zwischen den fundamentalen kinetischen Relationen offen legen, die sich auf anderem Wege nicht so ungezwungen darzubieten scheinen.

C. Allgemeine Folgerungen aus dem D'Alembertschen Prinzip.

9. *Virialsätze für gebundene Systeme.* — Durch die Operation der „inneren" Produktbildungen folgt aus der D'Alembertschen Impulsgleichung

$$\bar{h} = m\bar{\dot{x}} + \bar{r}$$

1) Die Gleichung $\delta' S_k = 0$ enthält in ihrer Anwendung auf das starre System die vollständigen und hinreichenden Bedingungen für alle *astatischen* Gleichgewichtsformen. Sie leistet also hier dasselbe, wie die Gleichung der virtuellen Verschiebungen $\delta' A_k = 0$ für das *Positionsgleichgewicht.*

unmittelbar

$$(6) \qquad \bar{x}\bar{h} = m\bar{x}\ddot{\bar{x}} + \bar{x}\bar{r}.$$

Wir summieren jetzt über alle Massenpunkte m des Systems und setzen

$$\Sigma m\bar{x}\dot{\bar{x}} = \mathrm{P}, \quad \Sigma\bar{x}\bar{h} = \mathrm{V}_h, \quad \Sigma\bar{x}\bar{r} = \mathrm{V}_r.$$

Dann wird

$$\Sigma m\bar{x}\ddot{\bar{x}} = \frac{d\mathrm{P}}{dt},$$

und man erhält die für alle Systeme gültige Folgerung aus der Gleichung (6):

$$(7) \qquad \mathrm{V}_h - \mathrm{V}_r = \frac{d\mathrm{P}}{dt}$$

oder in Worten ausgedrückt:

Für jedes gebundene System ist die Differenz der Systemviriale der Impulse und Reaktionen gleich der vollständigen Derivierten der Polfunktion nach der Zeit.

Für ein starres um den Anfangspunkt der Vektoren $\bar{x}$ rotierendes System ist offenbar P konstant. Folglich gilt in diesem Falle der Satz:

Bei dem rotierenden starren System, auf welches nur Impulse wirken, ist das Virial aller Impulse gleich dem Virial aller Elementarreaktionen, wenn beide Viriale auf den festen Punkt bezogen werden.

Ganz in derselben Weise behandeln wir die D'Alembertsche Gleichung für Zeitkräfte:

$$\bar{k} = m\ddot{\bar{x}} + \bar{s}$$

und erhalten zunächst

$$\bar{x}\bar{k} = m\bar{x}\ddot{\bar{x}} + \bar{x}\bar{s}.$$

Setzen wir jetzt für das ganze System

$$\Sigma m\dot{\bar{x}}\dot{\bar{x}} = \mathrm{E},$$

so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (2) des Schemas I:

$$(8) \qquad \mathrm{V}_k - \mathrm{V}_s = \frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2} - 2\mathrm{E},$$

welche für freie Systeme, also für $V_s = 0$ in das Theorem von Yvon Villarceau übergeht. Für gebundene Systeme besteht demnach der allgemeine Virialsatz:

Das Virial der auf ein System wirkenden Elementarkräfte, vermindert um das Virial der entsprechenden Elementarreaktionen, ist gleich der zweiten Derivierten der zugehörigen Polfunktion nach der Zeit, vermindert um die doppelte Energie des Systems.

Für einen um einen festen Punkt rotierenden Körper ist P von der Zeit unabhängig. Mithin gilt hier der Satz:

Die doppelte kinetische Energie eines rotierenden starren Systems ist stets gleich der Differenz der auf den festen Punkt bezogenen Viriale der Reaktionen und der äufseren Kräfte.

10. *Die Leistungstheoreme für gebundene Systeme.* — Die hier in Betracht kommenden Sätze sind schon in der ersten Entwickelungsperiode der Systemmechanik entstanden, werden also hier nur des Zusammenhanges wegen anzuführen sein. Aus den Grundgleichungen

$$\bar{h} = m\bar{\dot{x}} + \bar{r} \text{ und } \bar{k} = m\bar{\ddot{x}} + \bar{s}$$

folgt durch Multiplikation mit $\bar{\dot{x}}$ und Summation über alle Massenpunkte des Systems

$$\Sigma\bar{\dot{x}}\bar{h} = \Sigma m\bar{\dot{x}}\bar{\dot{x}} + \Sigma\bar{\dot{x}}\bar{r} \text{ und } \Sigma\bar{\dot{x}}\bar{k} = \Sigma m\bar{\ddot{x}}\bar{\dot{x}} + \Sigma\bar{\dot{x}}\bar{s}.$$

Nach dem D'Alembertschen Prinzip ist aber

$$\Sigma\bar{\dot{x}}\bar{r} = 0 \text{ und } \Sigma\bar{\dot{x}}\bar{s} = 0.$$

Setzen wir also, den früheren Bezeichnungen entsprechend, für das ganze System

$$\Sigma\bar{\dot{x}}\bar{h} = \mathrm{L}_h \text{ und } \Sigma\bar{\dot{x}}\bar{k} = \mathrm{L}_k,$$

so erhalten wir die bekannten Leistungsformeln:

$$\mathrm{L}_h = 2\mathrm{E} \text{ und } \mathrm{L}_k = \frac{d\mathrm{E}}{dt}.$$

Die Leistung eines Impulssystems, welches auf ein ruhendes gebundenes System wirkt, ist gleich dem Doppelten der erzeugten kinetischen Energie, und die Leistung eines zeitlich wirkenden Kräftesystems wird durch die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung der kinetischen Energie gemessen.

11. *Die Momentensätze.* — Wir multiplizieren die Gleichungen

$$\bar{h} = m\bar{\dot{x}} + \bar{r} \text{ und } \bar{k} = m\bar{\ddot{x}} + \bar{s}$$

mit dem Vektor $\bar{x}$ und erhalten

$$\overline{xh} = m\overline{x\dot{x}} + \overline{xr}, \quad \overline{xk} = m\overline{x\ddot{x}} + \overline{xs}.$$

Die Summation über das ganze System ergiebt:

$$\overline{\mathrm{M}}_h - \overline{\mathrm{M}}_r = \overline{\mathrm{M}}_v \text{ und } \overline{\mathrm{M}}_k - \overline{\mathrm{M}}_s = \frac{d\,\overline{\mathrm{M}}_v}{dt}.$$

Für ein freies starres System ist $\overline{\mathrm{M}}_r = 0$ und $\mathrm{M}_s = 0$. Man hat also für die drehende Bewegung derselben die bekannten Grundgleichungen:

$$\overline{\mathrm{M}}_h = \overline{\mathrm{M}}_v \text{ und } \overline{\mathrm{M}}_k = \frac{d\,\overline{\mathrm{M}}_v}{dt}.$$

Sie sind der analytische Ausdruck des Prinzips der Flächen.

12. *Zwei analoge Sätze für den dynamischen Vektor* $\overline{\mathrm{N}}$. — Wird die äufsere Produktbildung mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{x}$ ausgeführt, so gewinnt man die Gleichungen:

$$\Sigma\overline{\dot{x}h} = \Sigma\overline{\dot{x}r} \text{ und } \Sigma\overline{\dot{x}k} = \Sigma m\overline{\dot{x}\ddot{x}} + \Sigma\overline{\dot{x}s},$$

oder, wenn

$$\Sigma m\overline{\dot{x}\ddot{x}} = \mathrm{B}$$

gesetzt wird,

$$\mathrm{N}_h = \mathrm{N}_r \text{ und } \mathrm{N}_k - \mathrm{N}_s = \mathrm{B}.$$

Der Übersicht wegen stellen wir die *allgemeinen* Folgerungen in der nachstehenden Tabelle zusammen:

V.

Für Momentankräfte.	Für Zeitkräfte:
1) $\mathrm{V}_h - \mathrm{V}_r = \frac{d\mathrm{P}}{dt}$,	1') $\mathrm{V}_k - \mathrm{V}_s = \frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2} - 2\mathrm{E}$
2) $\mathrm{L}_h = 2\mathrm{E}$,	2') $\mathrm{L}_k = \frac{d\mathrm{E}}{dt}$,
3) $\overline{\mathrm{M}}_h - \overline{\mathrm{M}}_r = \overline{\mathrm{M}}_v$,	3') $\overline{\mathrm{M}}_k - \overline{\mathrm{M}}_s = \frac{d\overline{\mathrm{M}}_v}{dt}$,
4) $\mathrm{N}_h - \mathrm{N}_r = 0$.	4') $\mathrm{N}_k - \mathrm{N}_s = \mathrm{B}$.

D. Die Differentialgleichungen der Bewegung.

13. *Die Lagrange-Hamiltonsche Form des D'Alembertschen Prinzips für Impulse und Zeitkräfte.* — Aus der Grundgleichung für die Zerlegung des eingeprägten Impulses

$$\bar{h} = m\dot{\bar{x}} + \bar{r}$$

folgt durch Multiplikation mit dem virtuellen Wegelement $\delta\bar{x}$ und nachfolgende Summation über alle Massenpunkte des Systems:

$$\Sigma\bar{h}\,\delta\bar{x} = \Sigma m\dot{\bar{x}}\,\delta\bar{x} + \Sigma\bar{r}\,\delta\bar{x}$$

oder

$$\delta'\mathrm{A}_h = \delta'\mathrm{A}_v + \delta'\mathrm{A}_r.$$

Da nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen $\delta'\mathrm{A}_r = 0$ ist, so erhält man die Grundgleichung der impulsiven Bewegung in der Form

$$\delta'\mathrm{A}_h = \delta'\mathrm{A}_v. \tag{9}$$

Für zeitlich wirkende Kräfte bildet man den Ausdruck

$$\Sigma\bar{k}\cdot\delta\bar{x} = \Sigma m\ddot{\bar{x}}\cdot\delta\bar{x} + \Sigma\bar{s}\cdot\delta\bar{x}$$

oder nach Gl. (2) des Schemas II

$$\delta' A_k = \frac{d}{dt}(\delta' A_e) - \delta E, \tag{10}$$

da $\Sigma \overline{s \cdot \delta x} = 0$ ist.

Die Gleichungen (9) und (10) sind als formale analytische Ausdrücke des D'Alembertschen Prinzips anzusehen und rühren *beide* von Lagrange her. Auch der aus der Gleichung (10) durch Integration nach der Zeit t hervorgehende Ausdruck war Lagrange (Méc. anal. 2. éd. Bd. **1**, S. 307—310) vollständig geläufig und wurde von ihm der Ableitung der Eulerschen Gleichungen für den rotierenden Körper (Méc. anal. Bd. **2**, S. 238—240) zu Grunde gelegt. Es scheint mir notwendig, dies hier ausdrücklich hervorzuheben, weil man die Integralformel:

$$[\delta' A_e]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta E + \delta' A_k) dt \tag{11}$$

immer noch als „Hamiltonsches Prinzip" bezeichnet, obwohl es Hamilton, der die Mécanique analytique sehr genau kannte, niemals eingefallen ist, die Autorschaft für dieselbe in Anspruch zu nehmen. Sein Verdienst besteht in der Aufstellung und Verwendung der „charakteristischen Funktion" und der Erkenntnis ihrer Bedeutung für die formale Darstellung der kanonischen Integrale, wenn eine Kräftefunktion existiert.

14. *Analoge Vektorformeln, in welchen die Reaktionen nicht eliminiert sind.* — Für Impulse erhält man durch äufsere Multiplikation der Grundgleichung die Relation

$$\Sigma \overline{h \cdot \delta x} = \Sigma m \overline{\dot{x} \cdot \delta x} + \Sigma \overline{r \cdot \delta x}$$

oder in unserer Bezeichnung:

$$\delta' \overline{S}_h = \delta' \overline{S}_e + \delta' \overline{S}_r. \tag{12}$$

Ebenso folgt aus der Gleichung:

$$\Sigma \overline{k \cdot \delta x} = \Sigma m \overline{\ddot{x} \cdot \delta x} + \Sigma \overline{s \cdot \delta x}$$

mit Rücksicht auf die Gleichung 2') des Schemas II der Ausdruck

$$\delta' \overline{S}_k = \frac{d}{dt}(\delta' \overline{S}_e) - \Sigma m \overline{\dot{x} \cdot \delta \dot{x}} + \delta' \overline{S}_s$$

oder durch Integration nach der Zeit t:

$$[\delta' \overline{S}_e]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} [\delta' \overline{S}_k - \delta' \overline{S}_s + \Sigma m \overline{\dot{x} \cdot \delta \dot{x}}] dt. \tag{13}$$

Die mechanische Bedeutung dieser Formel, welche ich bisher nur an einfachen Beispielen untersucht und auch in Lagrangesche all-

gemeine Koordinaten transformiert habe, mögen hier unerörtert bleiben, da ich hoffe, in der Fortsetzung dieser Arbeit über das D'Alembertsche Prinzip Eingehenderes mitteilen zu können.

15. *Systeme möglicher Geschwindigkeiten.* — Unter einem vollständigen System der möglichen Geschwindigkeiten eines beliebigen materiellen Komplexes verstehen wir die Gesamtheit der analytischen Ausdrücke für $\dot{\bar{x}}$ oder — was damit gleichbedeutend ist — für die virtuelle mit den Systemverbindungen verträglichen Verschiebungen $\delta\bar{x}$, welche man durch Berücksichtigung der effektiven Elementarbewegungen *aller* Massenpunkte gewinnen kann. Da wir uns hier auf die einfachsten materiellen Systemgattungen (starres System und Gelenkketten) beschränken, so liegen uns diese Geschwindigkeitssysteme prinzipiell in fertiger Gestalt vor, wenn auch vielleicht in einzelnen Fällen noch manches nicht genügend durchgearbeitet ist.

Zur Darstellung der Geschwindigkeitssysteme für alle materiellen Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden giebt es zwei wesentlich verschiedene Wege, die sich historisch im Anschlufs an das Problem des starren Körpers entwickelt haben. Euler, Clairaut und D'Alembert gewannen gleichsam durch eine exakte Intuition für das rotierende starre System den kinematischen Begriff der Momentanaxe und der zugehörigen Rotationsgeschwindigkeit. Beide Vorstellungen vereinigen wir üblicher Weise jetzt in der Konzeption eines einzigen Vektors $\bar{\sigma}$, der in die Richtung der Momentanaxe fällt und in seiner Länge die Gröfse der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ darstellt. Die unmittelbare Anschauung lehrt dann, dafs für jeden Punkt, welcher um den Vektor $\bar{x}$ von dem festen Punkte O in bestimmtem Richtungssinne absteht, die Gleichung

$$\dot{\bar{x}} = \overline{\sigma x} \tag{14}$$

besteht. Beziehen wir die Rotationsbewegung auf einen beliebigen Anfangspunkt C, der von dem Bezugspunkte der Vektoren $\bar{x}$ um $\bar{c}$ absteht, so können wir dem Punkte C die Translationsgeschwindigkeit $\dot{\bar{c}}$ des Systems zuschreiben und erhalten an Stelle der Gleichung (14) die folgende:

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{c}} + \overline{\sigma(x-c)}. \tag{15}$$

Diese Gleichung enthält den vollständigen analytischen Ausdruck des Geschwindigkeitssystems für einen freien starren Körper.

Dasselbe ist durch die Angabe der beiden kinematischen Vektoren $\dot{\bar{c}}$ und $\bar{\sigma}$ festgelegt. Setzt man $\bar{\sigma} = \bar{\omega} \cdot \frac{d\theta}{dt}$, so dafs $\bar{\omega}$ einen Einheitsvektor vorstellt, der die Richtung der Momentanaxe bestimmt, so wird

$$d\bar{x} = d\bar{c} + \overline{\omega(x-c)} \cdot d\theta.$$

Hierfür schreiben wir im folgenden meistens

$$d\bar{x} = d\bar{c} + \overline{d\theta\,(x - c)},$$

indem wir $\bar{\omega} \cdot d\theta = \overline{d\theta}$ setzen, also die Amplitude als Vektor ansehen. Alsdann ist der allgemeine Ausdruck für die mögliche Elementarbewegung des freien starren Systems:

$$\delta\bar{x} = \delta\bar{c} + \overline{\delta\theta\,(x - c)}. \tag{16}$$

Kommt nur die Rotation in Betracht, so wird

$$\delta\bar{x} = \overline{\delta\theta \cdot x}, \tag{17}$$

wenn wir den Bezugspunkt O mit C zusammenfallen lassen.

Lagrange hat sich mit der unmittelbar aus der Anschauung folgenden Ableitung dieser Formel nicht begnügt, sondern dieselbe noch auf andere Weise zu gewinnen gesucht. Eine eigentümliche und besonders bemerkenswerte Methode hat er im 1. Bd. der „Mécan. analytique" S. 159—165 angewendet. Hier geht er von der Vorstellung aus, daſs jede in einem starren System beliebig angenommene Kurve doppelter Krümmung in sich unveränderlich bleiben muſs, d. h. irgend drei infinitesimal benachbarte, auf einander folgende Punkte dieser Kurve müssen in starrer Orientierung zu einander bleiben. Auf diese Weise erhält er ein System von Differentialgleichungen, dem die Komponenten von $\delta\bar{x}$ genügen müssen.

In einem „Biydrage tot de toepassing van het beginsel van D'Alembert, overeenkomstig de rekenwijze van Lagrange" hat Verdam (1864) diesen Gedankengang ausführlich dargestellt.

Interessant ist auch die Gewinnung der Gleichung (17) durch Negation der elementaren Deformationen eines als veränderlich vorgestellten infinitesimalen Dreistrahls. Nehmen wir denselben — der Einfachheit wegen — als rechtwinklig an und betrachten δx_1, δx_2, δx_3 als die rechtwinkligen Komponenten von $\delta\bar{x}$, so folgt aus der Negation der Längenänderungen nach den kinematischen Grundgleichungen der Elastizitätstheorie:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\delta x_1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\delta x_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\delta x_3 = 0$$

und aus der Negation der Schiebungsdeformationen des Elementarkörpers:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\delta x_3 + \frac{\partial}{\partial x_3}\delta x_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\delta x_3 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\delta x_1 = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung ergiebt ohne weiteres:

$$\delta x_1 = \delta c_1 + \delta\theta_2 \cdot x_3 - \delta\theta_3 \cdot x_2,$$
$$\delta x_2 = \delta c_2 + \delta\theta_3 \cdot x_1 - \delta\theta_1 \cdot x_3,$$
$$\delta x_3 = \delta c_3 + \delta\theta_1 \cdot x_2 - \delta\theta_2 \cdot x_1,$$

worin δc_1, δc_2, δc_3, $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ $\delta\theta_3$ die Integrationskonstanten bedeuten. Die so gewonnenen Ausdrücke sind mit Gleichung (16) für $c = 0$ identisch.

Diese Methode ist in die meisten Lehrbücher der Elastizitätstheorie übergegangen.

Über die gebräuchlichste Art der Herstellung der Gleichung (17) durch Differentiation der Formeln für die Koordinatentransformation nach den neun Kosinus der Achsenwinkel ist hier keine weitere Bemerkung notwendig, da sie in alle Darstellungen der Mechanik aufgenommen ist und immer wieder reproduziert wird.

Das charakteristische Element in dem Ausdrucke $\bar{x} = \overline{\sigma x}$ ist der Vektor $\bar{\sigma}$, also ein rein *kinematischer* Parameter, der unmittelbar nichts über die *Lage* des Systems aussagt, und der aufserdem ungeeignet ist für die analytische Festlegung des Kräftesystems. Zum vollständigen Ansatz eines den starren Körper betreffenden Problems ist es deshalb notwendig, den kinematischen Vektor $\bar{\sigma}$ durch Koordinaten auszudrücken, wodurch man eine *zweite analytische Darstellung* des Systems möglicher Geschwindigkeiten erhält.

Dies ist bekanntlich schon von Euler (Mém. Ac. Berl. 1758) durch Einführung der nach ihm benannten drei Positionswinkel geschehen. Auch hatte Lexel (Nov. Com. Ac. Petrop. 1755) schon die Achsencosinus durch drei derselben dargestellt und hierdurch ebenfalls eine Lagenbestimmung durch (unabhängige) Koordinaten erreicht. Allein diese Verfahren hatten einen wesentlichen Mangel, da die Symmetrie der Formeln nicht aufrecht erhalten werden konnte. Vollkommen symmetrische Koordinatenausdrücke für den Vektor $\bar{\sigma}$ scheinen zum ersten Male von Cayley (Cambr. Dubl. Math. J. 1846) hergestellt zu sein, der zu diesem Zwecke die Koordinaten von Rodrigues (J. de Liouv. 5. 1840) verwendete. Die neueren Untersuchungen über diesen Gegenstand findet man bei F. Klein und A. Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels (Heft 1, 1897 und Heft 2, 1898) ausführlich dargestellt.[1])

Diese Betrachtungen lassen sich nun ohne besondere Schwierigkeiten — freilich nicht immer ohne grofse Komplikationen — auf

---

1) Vergl. auch F. Kötter: Bemerkungen zu F. Klein und A. Sommerfelds Theorie des Kreisels (1899). (Anm. d. Red.)

beliebige Gelenksysteme, deren einzelne Glieder starre Körper sind, übertragen. Es mufs, nach dem Prinzip der relativen Bewegung, in jedem dieser Fälle möglich sein, für alle Punkte des Systems je zwei Ausdrücke von der Form

$$\bar{\dot{x}} = \text{funct.}\,(\bar{k}'\ \bar{k}'', \ldots, \bar{x})$$

und

$$\bar{\dot{x}} = \text{funct.}\,(q_1, q_2, \ldots, q_i, \bar{x})$$

aufzustellen, so dafs $\bar{k}'$, $\bar{k}''$, ... eine ausreichende Anzahl kinematischer Vektoren bedeuten und $q_1, q_2, \ldots, q_i$ die entsprechenden Positionskoordinaten sind. Jeder *analytischen Form* des vollständigen Geschwindigkeitssystems $\bar{\dot{x}}$ entspricht eine besondere Form der allgemeinen Reduktion der Kräfte und eine diesem System eigentümliche Form der kinetischen Differentialgleichungen. Also die *Statik* und die *Kinetik* des betreffenden materiellen Systems sind hierdurch in ihrer *speziellen Form* vollständig charakterisiert.

(Fortsetzung folgt.)

Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$, ihre analytische Darstellung und ihre Beziehungen zu gewissen algebraischen Flächen.

Von Rudolf Funck in Obercassel (Siegkreis).

Einleitung.

Eine räumliche Konfiguration $(15_6, 20_3)$ besteht nach Reye[1]) aus 15 Punkten, 15 Ebenen und 20 Geraden in folgender Lage: Auf jeder der 15 Ebenen liegen 6 von den 15 Punkten, und durch jeden der 15 Punkte gehen 6 der 15 Ebenen; jede der 20 Geraden ist mit 3 der 15 Punkte und 3 der 15 Ebenen inzident. Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ tritt bei geometrischen Untersuchungen nicht selten auf. Schon v. Staudt[2]) hat die vollständige Figur zweier perspektiver Tetraeder, welche eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$ bildet, beschrieben. Auch die 15 Potenzebenen, 20 Potenzaxen und 15 Potenzpunkte, welche 6 Kugeln zu zweien, dreien und vieren bestimmen, bilden eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$.[3]) Bei der Untersuchung gewisser 15 Geraden einer kubischen Fläche ist ebenso Cremona[4]) auf ein Gebilde aus 15 Punkten, 20 Geraden und 15 Ebenen gestofsen, welches von Reye[5]) als eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$ erkannt wurde. Am eingehendsten hat sich De Paolis[6]) mit der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ beschäftigt. Allein seine analytische Darstellung der Konfiguration ist ziemlich kompliziert. Auf Anregung meines Lehrers, des Herrn Prof. Reye, habe ich daher unternommen, die Konfiguration $(15_6, 20_3)$, von einer einfacheren analytischen Darstellung derselben ausgehend, von neuem zu untersuchen. Ich werde De Paolis insoweit folgen, als auch ich die bekannten Eigenschaften der Konfiguration ableiten und ihren

1) Reye: Das Problem der Konfigurationen, Acta mathematica, 1, 1883.

2) v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 43.

3) Reye: Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme, Leipzig 1879.

4) Cremona: Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà del esagramma di Pascal, Mem. d. R. Accad. dei Lincei, 1876—77.

5) Reye: Geometrie der Lage, III. Abt., Leipzig 1892.

6) De Paolis: Ricerche sulle superficie di 3° grado, Mem. d. R. Accad. dei Lincei, 1880/1.

innigen Zusammenhang mit einer Fläche dritter Ordnung nachweisen werde. In allen andern Punkten weicht meine Untersuchung von der De Paolis' ab. Höchstens könnte eines der in den §§ 7 und 8 der vorliegenden Abhandlung entwickelten Systeme aus je 6 Flächen dritter Ordnung mit einem von De Paolis beschriebenen Systeme aus ebenfalls 6 kubischen Flächen identisch sein, was ich nicht zu entscheiden vermochte.

§ 1.

Analytische Darstellung und Beschreibung der Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sechs lineare Funktionen der Punktkoordinaten x, y, z. Mit $iklmnp$ bezeichnen wir eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dann repräsentieren die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = x_2, & x_1 = x_3, & x_1 = x_4, & x_1 = x_5, & x_1 = x_6, \\ & x_2 = x_3, & x_2 = x_4, & x_2 = x_5, & x_2 = x_6, \\ & & x_3 = x_4, & x_3 = x_5, & x_3 = x_6, \\ & & & x_4 = x_5, & x_4 = x_6, \\ & & & & x_5 = x_6 \end{array}$$

die 15 Ebenen

(ik) $\qquad x_i = x_k \quad \text{oder} \quad x_i - x_k = 0$

einer Konfiguration $(15_6, 20_3)$. Nämlich die Doppelgleichung

$$x_1 = x_2 = x_3$$

stellt eine Gerade dar, in welcher sich die Ebenen (2 3), (3 1), (1 2) schneiden. Überhaupt gehen die 15 Ebenen (ik) zu dreien durch 20 Geraden

(ikl) $\qquad x_i = x_k = x_l.$

Die dreifache Gleichung

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

repräsentiert einen Punkt, den Schnittpunkt der Ebenen (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4). Die 15 Ebenen (ik) schneiden sich demnach zu sechsen in 15 Punkten

$(iklm)$ $\qquad x_i = x_k = x_l = x_m.$

Auf der Geraden (1 2 3) liegen die Punkte (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 3 6), und ebensoviel Punkte $(iklm)$ liegen auf jeder andern Geraden (ikl). Die Ebene (1 2) enthält die Punkte (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 3 6), (1 2 4 5), (1 2 4 6), (1 2 5 6), und in jeder andern Ebene (ik) sind gleichfalls 6 Punkte $(iklm)$ enthalten. Mithin ergiebt sich:

Die 15 Ebenen

(ik) $$x_i = x_k$$

gehen zu dreien durch 20 Geraden

(ikl) $$x_i = x_k = x_l$$

und zu sechsen durch 15 Punkte

$(iklm)$ $$x_i = x_k = x_l = x_m\,.$$

Die 15 Punkte $(iklm)$ liegen zu dreien auf den 20 Geraden (ikl) und zu sechsen in den 15 Ebenen (ik). Die 15 Ebenen (ik), die 20 Geraden (ikl) und die 15 Punkte $(iklm)$ bilden also eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

In der Konfigurationsebene (1 2) liegen die Geraden (1 2 3), (1 2 4), (1 2 5), (1 2 6), deren 6 Schnittpunkte die in der Ebene (1 2) liegenden Konfigurationspunkte sind. Durch den Konfigurationspunkt (1 2 3 4) gehen die Geraden (2 3 4), (3 4 1), (4 1 2), (1 2 3), deren 6 Verbindungsebenen die durch den Punkt (1 2 3 4) gehenden Konfigurationsebenen sind. Allgemein folgt:

Jeder Konfigurationspunkt $(iklm)$ ist Scheitel eines vollständigen Vierkants $(iklm)$, welches aus 4 Geraden und 6 Ebenen der Konfiguration besteht. In jeder Konfigurationsebene (ik) liegt ein vollständiges Vierseit (ik) aus 4 Geraden und 6 Punkten der Konfiguration.

Nennt man je zwei Elemente der Konfiguration, deren Symbole wie die der Ebene (5 6) und des Punktes (1 2 3 4), oder der Geraden (1 2 3) und (4 5 6) keine Ziffer gemein haben, „gegenüberliegende“ Elemente der Konfiguration, dann gilt der Satz:

Jeder der 15 Konfigurationspunkte ist Kollineationszentrum von je einem Paare perspektiver in der Konfiguration enthaltenen Tetraeder; ihm liegt die zugehörige Kollineationsebene in der Konfiguration gegenüber.[1])

Beziehen wir nämlich die beiden Tetraeder, welche die Seitenflächen

(1 5), (2 5), (3 5), (4 5)
(1 6), (2 6), (3 6), (4 6),

die Kanten

(1 2 5), (1 3 5), (1 4 5), (2 3 5), (2 4 5), (3 4 5)
(1 2 6), (1 3 6), (1 4 6), (2 3 6), (2 4 6), (3 4 6),

die Eckpunkte

(2 3 4 5), (3 4 1 5), (4 1 2 5), (1 2 3 5)
(2 3 4 6), (3 4 1 6), (4 1 2 6), (1 2 3 6)

---

1) v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 43.

besitzen, auf einander, indem wir je zwei ihrer Ebenen, Kanten und Eckpunkte einander zuweisen, deren Symbole durch Vertauschung der Ziffern 5 und 6 in einander übergehen, dann schneiden sich die homologen Ebenen in den 4 Geraden

$$(1\,5\,6),\quad (2\,5\,6),\quad (3\,5\,6),\quad (4\,5\,6),$$

welche das Vierseit (5 6) bilden; in den 6 Eckpunkten

$$(1\,2\,5\,6),\quad (1\,3\,5\,6),\quad (1\,4\,5\,6),\quad (2\,3\,5\,6),\quad (2\,4\,5\,6),\quad (3\,4\,5\,6)$$

dieses Vierseits schneiden sich die entsprechenden Kanten. Die homologen Eckpunkte liegen in den 4 Geraden

$$(2\,3\,4),\quad (3\,4\,1),\quad (4\,1\,2),\quad (1\,2\,3),$$

welche das Vierkant (1 2 3 4) bilden; in den 6 Ebenen

$$(1\,2),\quad (1\,3),\quad (1\,4),\quad (2\,3),\quad (2\,4),\quad (3\,4)$$

dieses Vierkants liegen die entsprechenden Kanten der Tetraeder. Die beiden Tetraeder sind also perspektiv; der Punkt (1 2 3 4) ist ihr Kollineationszentrum, seine gegenüberliegende Konfigurationsebene (5 6) die Kollineationsebene.

Um die Konfiguration zu konstruieren, können wir von zwei perspektiven Tetraedern das eine und das Kollineationszentrum beliebig im Raume, dagegen die 4 Eckpunkte des zweiten Tetraeders nur noch auf den 4 Verbindungslinien des Kollineationszentrums mit den Eckpunkten des erst angenommenen Tetraeders beliebig annehmen. Alsdann ist aber die Konfiguration bestimmt; denn die 4 paar homologen Eckpunkte der Tetraeder nebst ihren 4 Verbindungslinien, die 4 paar homologen Seitenflächen nebst ihren 4 Schnittlinien, die 6 paar homologen Kanten nebst ihren 6 Schnittpunkten und 6 Verbindungsebenen bilden mit dem Kollineationszentrum und der Kollineationsebene zusammen die ganze Konfiguration. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich unmittelbar:

Die Konfiguration (15_6, 20_3) ist von 19 Parametern, also von eben soviel als die allgemeine kubische Fläche, abhängig.

Wir werden dieses Resultat später auch analytisch begründen.

Eine gute Einsicht in den Aufbau der Konfiguration gewährt uns der Satz:

Das vollständige Fünfflach π_6 der Ebenen

$$(1\,6),\quad (2\,6),\quad (3\,6),\quad (4\,6),\quad (5\,6)$$

und das vollständige Fünfeck P_6 der diesen Ebenen gegenüberliegenden Punkte

$$(2\,3\,4\,5),\quad (3\,4\,5\,1),\quad (4\,5\,1\,2),\quad (5\,1\,2\,3),\quad (1\,2\,3\,4)$$

machen zusammen die ganze Konfiguration aus; die 10 Ebenen des Fünfecks gehen durch je eine Kante des Fünfflachs und seine 10 Kanten durch je einen Eckpunkt desselben.[1])

Bedeutet nämlich $iklmn$ eine Permutation der 5 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, dann ist $(ikl\,6)$ ein beliebiger der 10 übrigen Konfigurationspunkte; dieser ist als Schnitt der Ebenen $(i\,6)$, $(k\,6)$, $(l\,6)$ ein Eckpunkt des Fünfflachs π_6, und durch ihn geht die Kante (ikl) des Fünfecks P_6. Ferner ist (ik) eine beliebige der 10 noch übrigen Konfigurationsebenen; diese ist als Verbindungsebene der Punkte $(iklm)$, $(ikln)$, $(ikmn)$ in dem Fünfeck P_6 enthalten und geht durch die Kante $(ik\,6)$ des Fünfflachs π_6.

Da die Ziffer 6 mit jeder der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 vertauscht werden kann, so folgt, dafs jedes der vollständigen Fünfflache π_1, π_2, π_3, π_4, π_5, π_6 mit je einem der vollständigen Fünfecke P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 die ganze Konfiguration ausmacht.

Von Wichtigkeit für alle späteren Untersuchungen ist der Satz:

Die allgemeinste Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *kann dargestellt werden durch 6 lineare Funktionen* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 *der Punktkoordinaten* x, y, z, *welche der Bedingung genügen:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

Die 15 Ebenen $x_i = x_k$ bleiben nämlich ungeändert, wenn man zu jeder der 6 linearen Funktionen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 eine und dieselbe willkürliche Funktion u addiert, also x_i durch $x_i + u = x_i'$ ersetzt. So erhält man auch mittelst der 6 linearen Funktionen

$$x_i' = x_i - \tfrac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6),$$

welche der Bedingung

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' = 0$$

genügen, dieselbe Konfiguration $(15_6, 20_3)$. Demgemäfs werden wir von nun an voraussetzen, dafs

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

ist. Nur fünf der linearen Funktionen können willkürlich angenommen werden; durch sie ist die sechste eindeutig bestimmt. Hieraus folgt wiederum, dafs die Konfiguration von 19 Parametern abhängig ist. Man kann nämlich, ohne dafs die Gleichungen $x_i = x_k$ andere Ebenen darstellen, durch einen der in

$$x_k = a_k x + b_k y + c_k z + d_k$$

1) v. Staudt: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 43.

enthaltenen Parameter a_k, b_k, c_k, d_k alle 6 linearen Funktionen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 dividieren; erteilt man den nun noch in x_k vorkommenden 3 und den $4 \cdot 4$ Parametern in noch 4 andern der Funktionen bestimmte Werte, dann ist die sechste lineare Funktion wegen $\sum_1^6 x_i = 0$ eindeutig bestimmt.

§ 2.

Fläche zweiter Ordnung, nach welcher die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ zu sich selbst polar ist.

Wir beziehen die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ auf das Tetraeder der 4 Ebenen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

mittelst der Gleichung

$$x_6 - x_5 = a_1(x_1 - x_5) + a_2(x_2 - x_5) + a_3(x_3 - x_5) + a_4(x_4 - x_5)$$

oder

$$x_6 - x_5 = \sum_1^4 a_i x_i - A x_5, \text{ wo } A = \sum_1^4 a_i .$$

Infolge der identischen Relation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

wird

$$(A-2)x_5 = \sum_1^4 (a_i + 1) x_i ,$$

$$(A-2)x_6 = -\sum_1^4 (a_i - 1 + A) x_i .$$

Wir behaupten:

Bezüglich der reellen oder imaginären Fläche zweiter Ordnung

$$F^2 \qquad \sum_1^4 a_i (x_i - x_5)^2 = (x_6 - x_5)^2$$

ist jeder Konfigurationspunkt der Pol der gegenüberliegenden Konfigurationsebene und jede Konfigurationsgerade die Polare der gegenüberliegenden Konfigurationsgeraden.

Denn die Polarebene eines Punktes (x_1', x_2', x_3', x_4') bezüglich der Fläche F^2 wird durch die Gleichung

$$\sum_1^4 a_i (x_i' - x_5')(x_i - x_5) - (x_6' - x_5')(x_6 - x_5) = 0$$

dargestellt. Die Polarebene des Punktes (1 2 3 5) z. B., für welchen

$$x_1' = x_2' = x_3' = x_5', \quad x_6' - x_5' = a_4(x_4' - x_5')$$

ist, hat daher die Gleichung

$$a_4(x_4' - x_5')(x_4 - x_5) - (x_6' - x_5')(x_6 - x_5) = 0$$

oder

$$x_4 - x_6 = 0,$$

fällt also mit der Ebene (4 6) zusammen. Ebenso ist jede der Ebenen (1 6), (2 6), (3 6) und überhaupt jede der Ebenen (ik) die Polare des gegenüberliegenden Punktes der Konfiguration. Da ferner die Punkte $(iklm)$, $(ikln)$, $(iklp)$ auf der Geraden (ikl) liegen, ihre resp. Polaren (np), (mp), (mn) aber durch die Gerade (mnp) gehen, so sind die sich in der Konfiguration gegenüberliegenden Geraden (ikl) und (mnp) reziproke Polaren bezüglich der Fläche F^2.

Der von Caporali[1]) zuerst bewiesene Satz, dafs die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ in einem Polarsystem sich selbst zugeordnet ist, ist insofern von Wichtigkeit, als wir dadurch zu jedem Gebilde, das wir aus der Konfiguration ableiten, ohne weiteres ein reziprokes Gebilde finden.

Die Gleichung der Fläche F^2 läfst sich umformen in

$$\sum_1^4 a_i x_i^2 - 2x_5 \sum_1^4 a_i x_i + (A-1)x_5^2 + 2x_5 x_6 - x_6^2 = 0$$

und wegen

$$\sum_1^4 a_i x_i = x_6 + (A-1)x_5$$

in

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 - (A-1)x_5^2 - x_6^2 = 0.$$

Die 6 Ebenen $x_i = 0$ bilden also ein Polsechsflach der Fläche F^2, d. h. ein Sechsflach, von dessen 20 Eckpunkten jeder dem gegenüberliegenden Eckpunkte konjugiert ist.[2]) Wie man das Polsechsflach aus der Konfiguration konstruieren kann, werden wir später (§ 3) sehen.

§ 3.

Ableitung einer Fläche F^3 dritter Ordnung aus der Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

Das Vierkant (1 2 3 4) besteht, wie wir wissen, aus den Geraden (2 3 4), (3 4 1), (4 1 2), (1 2 3) und den Ebenen (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4). Es hat drei Paar Gegenebenen (1 2), (3 4); (1 3),

1) Caporali: Sopra i piani ed i punti della superficie di Kummer, Ac. dei Lincei, 1878.

2) Über Polsechsflache vgl. Reye: Geometrie der Lage, II. Abt. III. Aufl., S. 281 und in Crelles Journal **77**, 1873.

(2 4); (1 4), (2 3). Die Gerade, in der eine Ebene von ihrer Gegenebene geschnitten wird, nennen wir eine Nebenkante des Vierkants und der Konfiguration. Die drei Nebenkanten des Vierkants (1 2 3 4) bezeichnen wir durch die Symbole (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3). Überhaupt hat jedes der 15 Vierkante $(iklm)$ drei Nebenkanten. Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ besitzt demnach 45 Nebenkanten

$$(ik)(lm) \qquad x_i - x_k = x_l - x_m = 0.$$

Da jede Konfigurationsebene (ik) zu sechs Vierkanten gehört, nämlich zu den Vierkanten, deren Scheitel die 6 in (ik) liegenden Punkte $(iklm)$ sind, und da sie in jedem Vierkant eine Gegenebene hat, so liegen in jeder Konfigurationsebene 6 Nebenkanten. Beispielsweise liegen in der Ebene (1 2) die Nebenkanten (1 2)(3 4), (1 2)(3 5), (1 2)(3 6), (1 2)(4 5), (1 2)(4 6), (1 2)(5 6). Da ferner durch jede Nebenkante 2 Konfigurationsebenen gehen, so folgt auch hieraus, dafs es 45 Nebenkanten giebt. Die beiden Nebenkanten (1 3)(2 4) und (1 4)(2 3) liegen in einer durch die Gleichung

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

repräsentierten Ebene. Die drei Nebenkanten eines beliebigen Vierkants $(iklm)$ der Konfiguration können übrigens durch drei Ebenen α verbunden werden. Durch die Konfiguration werden demnach 45 Ebenen

$$\alpha \qquad x_i + x_k = x_l + x_m$$

bestimmt. Die beiden Ebenen α, die durch die Schnittgerade (1 2)(3 4) der Ebenen $x_1 - x_2 = 0$ und $x_3 - x_4 = 0$ gehen, haben die Gleichungen

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \text{ oder } (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) = 0,$$
$$x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \text{ oder } (x_1 - x_2) - (x_3 - x_4) = 0;$$

sie sind also durch die Ebenen (1 2) und (3 4) harmonisch getrennt. Überhaupt ergiebt sich:

Die beiden durch eine Nebenkante $(ik)(lm)$ gehenden Ebenen α sind harmonisch getrennt durch die beiden Konfigurationsebenen, welche sich in dieser Nebenkante schneiden.

Die geometrische Begründung folgt aus dem Satze: Im vollständigen Vierkante sind je zwei Gegenebenen harmonisch getrennt durch die beiden Nebenkanten, in denen sich die übrigen Gegenebenen schneiden. So sind z. B. in dem Vierkante (1 2 3 4) die Gegenebenen (1 2) und (3 4) harmonisch getrennt durch die Strahlen (1 3)(2 4) und (1 4)(2 3), welche aber aus dem Strahle (1 2)(3 4), der Schnittlinie der Ebenen (1 2) und (3 4), durch zwei Ebenen α projiziert werden.

Die 45 Ebenen α schneiden sich zu drei in 15 Geraden g, von denen eine beliebige durch die Doppelgleichung

$$x_i + x_k = x_l + x_m = x_n + x_p$$

dargestellt wird.

Dafs mit der Konfiguration 15 Geraden g verbunden sind, ergiebt sich wie folgt: Nimmt man die erste Kombination ik willkürlich an, was auf 15 Arten möglich ist, dann kann man noch die 3 Doppelgleichungen

$$x_i + x_k = x_l + x_m = x_n + x_p, \quad x_i + x_k = x_l + x_n = x_m + x_p,$$
$$x_i + x_k = x_l + x_p = x_m + x_n$$

aufstellen; bei dieser Bildungsweise erhält man aber jede Doppelgleichung dreimal, also giebt es $\frac{3 \cdot 15}{3} = 15$ solcher Gleichungen, und jede stellt eine Gerade g dar. Da jede Gerade g die Schnittlinie von drei Ebenen α ist und in jeder Ebene α zwei der 45 Nebenkanten $(ik)(lm)$ liegen, so wird die Gerade g von 6 Nebenkanten geschnitten. Beispielsweise repräsentiert die Doppelgleichung

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6$$

eine Gerade g, welche die Nebenkanten $(1\,3)(2\,4)$, $(1\,4)(2\,3)$, $(1\,5)(2\,6)$, $(1\,6)(2\,5)$, $(3\,5)(4\,6)$, $(3\,6)(4\,5)$ schneidet. Wegen der identischen Relation

$$x_i + x_k + x_l + x_m + x_n + x_p = 0$$

folgt aus

$$x_i + x_k = x_l + x_m = x_n + x_p:$$
$$x_n + x_p = 0.$$

Die 15 Geraden g werden demnach auch dargestellt durch

$$ik \cdot lm \cdot np \qquad x_i + x_k = x_l + x_m = x_n + x_p = 0,$$

d. h. durch beliebige zwei dieser Gleichungen.

Es treten hier 15 neue Ebenen

$$ik \qquad x_i + x_k = 0$$

auf, welche zu drei durch die Geraden g gehen. Wir wollen untersuchen, in welcher Beziehung die Ebenen ik zu der Konfiguration stehen. Durch die Gerade $12 \cdot 34 \cdot 56$ gehen die 3 durch die Gleichungen

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = 0,$$
$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) - (x_1 + x_2 - x_5 - x_6) = 0$$

dargestellten Ebenen α. Die vierte harmonische Ebene zu diesen drei Ebenen α, welche der dritten zugeordnet ist, hat die Gleichung

$$u = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + (x_1 + x_2 - x_5 - x_6) = 0.$$

Da wegen der identischen Gleichung zwischen den 6 linearen Funktionen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$$-x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = x_1 + x_2$$

ist, so folgt

$$u = 3(x_1 + x_2),$$

d. h. die Ebene $u = 0$ ist identisch mit der Ebene 1 2. Wir können mithin den Satz aussprechen:

Von den 3 Ebenen α, die sich in einer der 15 Geraden g schneiden, ist jede durch die beiden übrigen von einer der 15 Ebenen ik harmonisch getrennt.

Man kann also die Ebenen ik aus den Ebenen α ableiten; aber auch umgekehrt diese aus jenen. Nämlich in der Geraden $12 \cdot 34 \cdot 56$ schneiden sich die Ebenen 1 2, 3 4, 5 6, deren Gleichungen

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_5 + x_6 = 0$$

sind. Wegen der identischen Relation $\sum_1^6 x_i = 0$ repräsentiert aber auch die Gleichung

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 0$$

die Ebene 5 6. Von dieser Ebene ist durch 1 2 und 3 4 harmonisch getrennt die Ebene α

$$(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4) = 0.$$

Aus dieser Betrachtung folgt:

Von den drei Ebenen ik, welche durch eine beliebige der 15 Geraden g gehen, ist jede durch die beiden übrigen von einer der 45 Ebenen α harmonisch getrennt.

In der Ebene 5 6 liegen die Geraden $12 \cdot 34 \cdot 56$, $13 \cdot 24 \cdot 56$, $14 \cdot 23 \cdot 56$ und bilden in ihr ein Dreiseit 5 6.

Die 15 Geraden g liegen demnach zu dreien in den 15 Ebenen ik und bilden in ihnen 15 Dreiseite ik oder $\triangle$.

Die Ebene 5 6 schneidet in den drei Seiten g ihres Dreiseits $\triangle$ die drei paar Ebenen 1 2, 3 4; 1 3, 2 4; 1 4, 2 3. Konstruiert man zu jedem dieser drei Ebenenpaare diejenige Ebene, welche von der Ebene 5 6 durch die beiden Ebenen des betreffenden Paares harmonisch getrennt ist, dann erhält man die durch die Gleichungen

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \quad x_1 + x_3 = x_2 + x_4, \quad x_1 + x_4 = x_2 + x_3$$

repräsentierten Ebenen α des Vierkants (1 2 3 4). Diese bestimmen den Konfigurationspunkt (1 2 3 4), dessen Symbol mit dem der Ebene 56 keine Ziffer gemein hat. Führt man die analoge Konstruktion für jedes der 15 Dreiseite ik aus, dann erhält man sämtliche 15 Konfigurationspunkte $(lmnp)$.

Man kann auf diese Weise die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *direkt aus den 15 Ebenen ik ableiten.*

Die Gerade $12 \cdot 34 \cdot 56$ liegt mit den drei paar Geraden $12 \cdot 35 \cdot 46$, $12 \cdot 36 \cdot 45$; $15 \cdot 34 \cdot 26$, $16 \cdot 34 \cdot 25$; $13 \cdot 24 \cdot 56$, $14 \cdot 23 \cdot 56$ in je einer der Ebenen 12, 34, 56 und bildet mit ihnen die Dreiseite 12, 34, 56. Überhaupt ergiebt sich:

Jede Gerade g schneidet 6 andere Geraden g und bildet mit ihnen 3 Dreiseite $\triangle$, *während sie zu den 8 übrigen im allgemeinen windschief ist. Die* $\frac{6 \cdot 15}{2} = 45$ *Schnittpunkte der 15 Geraden g sind die Eckpunkte der 15 Dreiseite* $\triangle$.

Für die Gerade $ik \cdot lm \cdot np$ ist

$$x_i = -x_k, \quad x_l = -x_m, \quad x_n = -x_p.$$

Sie erfüllt also die Gleichung

$$x_i^3 + x_k^3 + x_l^3 + x_m^3 + x_n^3 + x_p^3 = 0$$

oder

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0.$$

Die 15 Geraden g liegen demnach auf der allgemeinen kubischen Fläche F^3

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0.$$

Diese hat die 15 Ebenen ik zu dreifach berührenden Ebenen. Die 12 übrigen Geraden der Fläche F^3, *welche von den 15 Geraden g verschieden sind, bilden eine reelle oder imaginäre Doppelsechs auf* F^3 *und werden durch eine quadratische Gleichung bestimmt.*

Dafs die Fläche F^3 eine allgemeine kubische ist, folgt aus dem von Cremona[1]) bewiesenen Satze: Man kann die Gleichung der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf die Form der Summe der dritten Potenzen von 6 linearen Funktionen mit verschwindender Summe transformieren. Die ziemlich weitläufige Aufstellung der quadratischen Gleichung, von der die 12 übrigen Geraden der Fläche F^3 abhängen, unterdrücken wir der Kürze wegen; wir wollen hier nur den Gang der Untersuchung andeuten. Bedeutet ikl eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, dann sind die drei Geraden $45 \cdot ik \cdot 6l$, $56 \cdot kl \cdot 4i$, $64 \cdot li \cdot 5k$, welche von der Geraden $6l \cdot 4i \cdot 5k$ geschnitten werden, zu einander windschief. Die durch diese drei Geraden gelegte Regelfläche zweiter

1) Vgl. Cremona: Math. Annalen **13**, 302.

Ordnung mufs auch die Gerade $6l \cdot 4i \cdot 5k$ enthalten. Die Regelfläche und die Fläche F^3 müssen also noch eine Kurve zweiter Ordnung gemein haben, welche aber in zwei Geraden zerfällt. Da das obige Schema 6 Tripel windschiefer Geraden darstellt (wir können nämlich für ik setzen 12, 21; 13, 31; 23, 32), so gelangen wir auf diese Weise zu den noch fehlenden Geraden der kubischen Fläche F^3.

Im Folgenden stellen wir eine Betrachtung über die Steinerschen Trieder an, welche von den 15 Ebenen gebildet werden.

In dem Schema

12 · 34 · 56	13 · 24 · 56	23 · 14 · 56
12 · 35 · 46	13 · 25 · 46	23 · 15 · 46
12 · 36 · 45	13 · 26 · 45	23 · 16 · 45

stellen die Horizontalreihen drei Dreiseite ik dar, welche von den Ebenen 56, 46, 45 aus dem Dreiflach der Ebenen 12, 13, 23 ausgeschnitten werden; die Vertikalreihen repräsentieren drei Dreiseite ik, welche von den Ebenen 12, 13, 23 aus dem Dreiflach der Ebenen 56, 46, 45 ausgeschnitten werden. Jedes dieser beiden Dreiflache wird also von den Ebenen des andern in drei Dreiseiten $\triangle$ der Fläche F^3 geschnitten. Die drei Ebenen 23, 31, 12 bilden ein Steinersches Trieder und schneiden sich in dessen Scheitelpunkt

$$x_2 + x_3 = x_3 + x_1 = x_1 + x_2 = 0$$

oder

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 .$$

Die Ebenen 56, 64, 45 bilden das konjugierte Trieder; sie schneiden die Fläche F^3 und zugleich das erstere Trieder in je einem Dreiseite $\triangle$. Von den 15 Ebenen ik werden 10 paar konjugierter Trieder gebildet. Bezeichnen wir das Dreiflach der Ebenen ik, kl, li durch ikl, dann sind zwei Dreiflache, wie 123 und 456, deren Symbole keine Ziffer gemein haben, allemal konjugierte Steinersche Trieder. Die 60 Kanten der 20 Steinerschen Trieder nennt man Pascalgeraden p[1]), ihre Scheitel Steinerpunkte S. Eine beliebige der 60 Pascalgeraden p wird durch

1) Wenn die 12 Geraden der Doppelsechs der Fläche F^3 sich auf 6 durch einen Punkt gehende Geraden reduzieren, dann ist dieser Punkt ein Doppelpunkt der Fläche F^3. Die 15 Geraden g liegen nach wie vor zu dreien in 15 dreifach berührenden Ebenen $\triangle$, und durch jede Gerade g gehen drei Ebenen $\triangle$. An das System dieser 15 Geraden g und 15 Ebenen $\triangle$ hat Cremona in seiner Abhandlung: Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà del esagramma di Pascal (Mem. d. R. Accad. dei Lincei 1876—77) die Theorie der Pascalschen Sechsecke geknüpft und derselben die Bezeichnung Pascalgerade und ebenso die später folgenden Namen entlehnt.

$ik \cdot il$ oder $i(kl)$ $\quad -x_i = x_k = x_l$

und ein beliebiger Steinerpunkt S durch

$(i)(k)(l)$ $\quad x_i + x_k = x_k + x_l = x_l + x_i = 0$

oder

$$x_i = x_k = x_l = 0$$

dargestellt. Die Trieder 1 5 6, 2 5 6, 3 5 6, 4 5 6 haben die dreifach berührende Ebene 5 6 gemein. Von den 12 Kanten dieser 4 Trieder liegen in der Ebene 5 6 die 8 folgenden:

$$56 \cdot 15, \quad 56 \cdot 25, \quad 56 \cdot 35, \quad 56 \cdot 45,$$
$$56 \cdot 16, \quad 56 \cdot 26, \quad 56 \cdot 36, \quad 56 \cdot 46;$$

die 4 übrigen Kanten sind

$$15 \cdot 16, \quad 25 \cdot 26, \quad 35 \cdot 36, \quad 45 \cdot 46,$$

und diese befinden sich in der Konfigurationsebene (5 6). Die Scheitel (1)(5)(6), (2)(5)(6), (3)(5)(6), (4)(5)(6) der 4 Trieder liegen also sowohl in der Ebene 5 6 als auch in der Konfigurationsebene (5 6) und mithin auf einer Geraden

$$x_5 + x_6 = x_5 - x_6 = 0$$

oder

$$x_5 = x_6 = 0.$$

Demnach ergiebt sich:

Jede Ebene ik gehört 4 der 20 Steinerschen Trieder an und enthält 8 von deren 12 Kanten; die 4 übrigen Kanten liegen in der Konfigurationsebene (ik), deren Symbol mit denselben Ziffern wie das der Ebene ik geschrieben wird.

Dieser Satz enthält eine andere Konstruktion der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ aus den 15 Ebenen ik.

Die 60 Pascalgeraden p liegen zu acht in den 15 dreifach berührenden Ebenen ik und zu vier in den 15 Konfigurationsebenen

Die 20 Steinerpunkte S liegen zu vier auf 15 Steinergeraden s

$(i)(k)$ $\quad x_i + x_k = x_i - x_k = 0$

oder

$$x_i = x_k = 0.$$

Die Steinergerade (1)(2) in der Ebene (1 2) der Konfiguration schneidet die Konfigurationsgeraden (1 2 3), (1 2 4), (1 2 5), (1 2 6) in den Steinerpunkten (1)(2)(3), (1)(2)(4), (1)(2)(5), (1)(2)(6), also:

In jeder Konfigurationsebene liegt eine Steinergerade; sie schneidet die 4 Konfigurationsgeraden dieser Ebene in 4 Steinerpunkten.

Die Steinergeraden (1)(6), (2)(6), (3)(6), (4)(6), (5)(6) erfüllen sämtlich die Bedingung $x_6 = 0$ und liegen somit in einer Ebene (6); ihre 10 Schnittpunkte sind die Steinerpunkte (1)(2)(6), (1)(3)(6), (1)(4)(6), (1)(5)(6), (2)(3)(6), (2)(4)(6), (2)(5)(6), (3)(4)(6), (3)(5)(6), (4)(5)(6). Hieraus folgt:

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ (oder durch die Fläche F^3) werden 6 Ebenen

$$(i) \qquad x_i = 0,$$

die Cremona-Ebenen γ[1]*), bestimmt. Nämlich jede Cremona-Ebene γ enthält ein vollständiges Fünfseit aus 5 Steinergeraden und 10 Steinerpunkten. Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ (oder durch die Fläche F^3) wird ein Sechsflach bestimmt, welches die 6 Cremona-Ebenen γ zu Flächen, die 15 Steinergeraden s zu Kanten und die 20 Steinerpunkte S zu Eckpunkten hat. Die Gegeneckpunkte dieses Sechsflaches sind konjugierte Steinerpunkte, also reziproke Pole bezüglich der Fläche F^3. Das Sechsflach ist ein Polsechsflach der kubischen Fläche.*[2])

Durch die Kante $(i)(k)$ des Polsechsflachs gehen die Ebenen (i), (k), (ik), ik, welche die Gleichungen haben

$$x_i = 0, \quad x_k = 0, \quad x_i - x_k = 0, \quad x_i + x_k = 0.$$

Hieraus folgt:

Durch jede der 15 Kanten $(i)(k)$ des Polsechsflaches geht eine Konfigurationsebene (ik) und eine der 15 Ebenen ik; diese trennen die beiden durch die Kante gehenden Ebenen (i) und (k) des Sechsflaches harmonisch.

Wenn man mittelst der 15 Dreiseitebenen ik die Steinerpunkte, Steinergeraden und Cremonaebenen konstruiert hat, erhält man hieraus sofort die 15 Konfigurationsebenen (ik).

Aus unseren Untersuchungen ergiebt sich für die allgemeine kubische Fläche mit 27 reellen Geraden:

Scheidet man die 12 Geraden einer Doppelsechs aus, dann kann man aus den 15 übrigen Geraden g das eben beschriebene System aus 15 dreifach berührenden Ebenen $\triangle$, 60 Pascalgeraden p, 20 Steinerpunkten S, 15 Steinergeraden s und 6 Cremonaebenen γ und eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$ ableiten. Diese Ableitung von 36 Polsechsflachen der kubischen Fläche aus ihren 27 Geraden rührt von Cremona[3]*) her. Man erhält aber zugleich aus den 27 Geraden 36 Konfigurationen $(15_6, 20_3)$.*

1) Diese Bezeichnung rührt von Reye her; vgl. seine Geometrie der Lage, III. Abt. S. 187.

2) Reye: Geometrie der Lage III. Abt. S. 115.

3) Cremona, a. a. O.

§ 4.

Bestimmung einer Fläche Φ^3 dritter Klasse aus der Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

Da die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ sich selbst polar ist, so mufs sich aus ihr auch eine Fläche Φ^3 dritter Klasse ergeben. Um dieselbe kennen zu lernen, brauchen wir nur zu den Sätzen des letzten Paragraphen die reziproken aufzustellen.

Die drei paar Gegenpunkte eines Vierseits (ik) der Konfiguration werden durch drei Diagonalen verbunden, welche sich in drei Punkten A schneiden. Mit der Konfiguration sind demnach 45 Punkte A verbunden. Die Punkte A liegen zu dreien auf 15 Geraden g'. Die auf diese Weise durch die Konfiguration bestimmten Geraden g' gehen zu dreien durch 15 Punkte D und bilden also 15 Dreikante D. Auf jeder der 15 Geraden g' liegen drei Punkte D. Jede Gerade g' kommt also in drei Dreikanten D vor und wird von 6 andern Geraden g' geschnitten, während sie zu den 8 übrigen im allgemeinen windschief ist. Ein beliebiges der 15 Dreikante D hat mit sechs andern je eine, mit den 8 übrigen aber keine Kante gemein. Die 45 Ebenen der 15 Dreikante D gehen zu sechs durch die 15 Geraden g'. Die 15 Geraden g' liegen auf einer allgemeinen Fläche Φ^3 dritter Klasse, welche durch die Konfiguration eindeutig bestimmt ist. Jeder der 15 Punkte D ist ein dreifacher Punkt der Fläche Φ^3; die Ebenen des Dreikants D berühren in seinem Scheitelpunkt D die Fläche Φ^3. Man kann aus der Fläche Φ^3 die Konfiguration wieder ableiten. Konstruiert man nämlich auf jeder Kante g' eines Dreikants D den Punkt, der den Sckeitelpunkt D von den beiden andern auf g' liegenden dreifachen Punkten D der Fläche Φ^3 harmonisch trennt, dann erhält man die 3 Punkte A einer Konfigurationsebene, und die drei Punkte A bestimmen die Konfigurationsebene.

§ 5.

Beziehung der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ zu einem System von 10 Kegelschnitten, 15 Flächen zweiter Ordnung und einer Fläche vierter Ordnung mit 15 Doppelpunkten.

Drei Konfigurationsebenen (ik), (lm), (np), welche zu zweien keine Konfigurationsgerade gemein haben, bestimmen einen Punkt Q oder

$$(ik)(lm)(np) \qquad x_i - x_k = x_l - x_m = x_n - x_p = 0 .$$

In der Konfigurationsebene (1 2) liegen die drei Punkte (1 2)(3 4)(5 6), (1 2) (3 5) (4 6), (1 2) (3 6)(4 5), und ebenso viele Punkte Q befinden sich in jeder andern Konfigurationsebene. Die Ebene (1 2) der Konfiguration schneidet die Nebenkanten (3 4) (5 6), (3 5) (4 6), (3 6)(4 5) des gegenüberliegenden Konfigurationspunktes (3 4 5 6) in den Punkten (1 2) (3 4) (5 6), (1 2) (3 5) (4 6), (1 2) (3 6) (4 5). Allgemein ergiebt sich:

Von dem Vierkante eines Konfigurationspunktes gehen die drei Nebenkanten durch die drei Punkte Q der gegenüberliegenden Konfigurationsebene.

Die 6 Punkte (1 4) (2 5) (3 6), (1 4) (2 6) (3 5), (1 5) (2 4) (3 6), (1 5) (2 6) (3 4), (1 6) (2 5) (3 4), (1 6) (2 4) (3 5) genügen sämtlich der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 .$$

Wegen der identischen Relation $\sum_1^6 x_i = 0$ folgt hieraus

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

und die genannten 6 Punkte Q liegen in einer Ebene

$[1 2 3] \equiv [4 5 6] \quad x_1 + x_2 + x_3 \equiv x_4 + x_5 + x_6 = 0.$

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ werden überhaupt 10 Ebenen

$[ikl] \equiv [mnp] \qquad x_i + x_k + x_l \equiv x_m + x_n + x_p = 0$

bestimmt, die je 6 Punkte Q enthalten.

Durch den Punkt (1 2) (3 4) (5 6) gehen die 4 Ebenen

[1 3 5] ≡ [2 4 6], [1 3 6] ≡ [2 4 5], [2 3 5] ≡ [1 4 6], [2 3 6] ≡ [1 4 5].

Die 10 Ebenen $[ikl]$ gehen demnach zu vier durch die 15 Punkte Q.

Die 10 Ebenen $[ikl]$ schneiden sich in 45 Geraden r, von denen eine beliebige durch

$[ikl][ikm] \qquad x_i + x_k + x_l = x_i + x_k + x_m = 0$

dargestellt wird. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt

$$x_l - x_m = 0,$$

d. h. die Konfigurationsebene (lm) geht durch die Gerade $[ikl][ikm]$. Mithin werden die Gegenkanten [3 5 1] [3 5 2], [3 6 1] [3 6 2]; [1 5 3] [1 5 4], [1 6 3] [1 6 4]; [1 3 5] [1 3 6], [1 4 5] [1 4 6] des Vierseits der 4 durch den Punkt (1 2) (3 4) (5 6) gehenden Ebenen $[ikl]$ paarweise durch die resp. Ebenen (1 2), (3 4), (5 6) verbunden. Wir können also den Satz aussprechen:

Jeder der 15 Punkte Q ist Scheitelpunkt eines vollständigen Vierseits aus 4 Ebenen $[ikl]$ und 6 Geraden r. Die Diagonalebenen des Vierseits

sind die drei durch diesen Punkt Q gehenden Konfigurationsebenen. Die Konfiguration $(15_6,\ 20_3)$ *kann somit aus den 10 Ebenen* $[ikl]$ *abgeleitet werden.*

In der Ebene (1 2) der Konfiguration ist das Dreieck der Punkte (1 2) (3 4) (5 6), (1 2) (3 5) (4 6), (1 2) (3 6) (4 5) enthalten. Diesen Punkten Q liegen in dem Dreieck die resp. Geraden [3 4 1] [3 4 2], [3 5 1] [3 5 2], [3 6 1] [3 6 2] gegenüber; denn z. B. die Punkte (1 2) (3 5) (4 6) und (1 2) (3 6) (4 5) liegen sowohl in der Ebene [3 4 1] als auch in der Ebene [3 4 2] und also in der Schnittgeraden [3 4 1] [3 4 2] dieser beiden Ebenen.

Die 45 Schnittlinien r der 10 Ebenen $[ikl]$ *bilden demnach in den 15 Konfigurationsebenen 15 Dreiseite, deren Eckpunkte die 15 Punkte Q sind. Dieser Satz giebt eine zweite Konstruktion der Konfiguration* $(15_6,\ 20_3)$ *aus den 10 Ebenen* $[ikl]$ *an.*

Keine zwei der 15 Dreiseite haben eine Seite gemein; aber jeder Eckpunkt Q gehört drei von ihnen an.

Eine der 105 Verbindungsgeraden der 15 Punkte Q ist nur dann eine Gerade r, wenn sie zwei in derselben Konfigurationsebene liegende Punkte Q verbindet.

Mit Hilfe des Satzes S. 18 folgt:

In ihrem Dreiseit wird eine Konfigurationsebene von dem Dreikant geschnitten, welches aus den Nebenkanten und den Ebenen α *des gegenüberliegenden Konfigurationspunktes besteht.*

Durch Addition der Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

der Geraden [1 2 3] [1 2 4] erhält man wegen $\sum_1^6 x_i = 0$ die Gleichung

$$x_1 + x_2 = x_5 + x_6$$

und durch Subtraktion

$$x_3 - x_4 = 0.$$

Die Ebenen [1 2 3] und [1 2 4] werden also harmonisch getrennt durch die Konfigurationsebene (3 4) und die Ebene α, deren Gleichung $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$ ist.

In jeder der 45 Geraden r schneiden sich also eine Konfigurationsebene und eine Ebene α, *und diese trennen die beiden durch r gehenden Ebenen* $[ikl]$ *harmonisch.*

Die Punkte Q führen zu interessanten Gebilden. Man ersieht sofort: Die 6 Punkte (14) (25) (36), (14) (26) (35), (15) (24) (36), (15) (26) (34),

(16)(25)(34), (16)(24)(35) in der Ebene [123] liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung, welche durch die Gleichungen

$$C^2_{123} \equiv C^2_{456} \qquad \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \equiv x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{array}$$

dargestellt wird. Überhaupt ergiebt sich:

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *werden in den 10 Ebenen [ikl] 10 Kegelschnitte*

$$C^2_{ikl} \equiv C^2_{mnp} \qquad \begin{array}{l} x_i^2 + x_k^2 + x_l^2 = x_m^2 + x_n^2 + x_p^2, \\ x_i + x_k + x_l \equiv x_m + x_n + x_p = 0 \end{array}$$

bestimmt, auf denen je 6 Punkte Q liegen. Durch jeden Punkt Q gehen 4 der Kegelschnitte. Je zwei der Kegelschnitte schneiden sich in 2 Punkten Q, und zwar ist die Schnittsehne eine Gerade r.

Bedeutet $iklm$ eine Permutation der Ziffern 3, 4, 5, 6, dann ist $(1i)(2k)(lm)$ ein beliebiger derjenigen 12 Punkte Q, die nicht in der Konfigurationsebene (12) enthalten sind. Diese 12 Punkte sind die Punkte Q auf den Kegelschnitten C^2_{123}, C^2_{124}, C^2_{125}, C^2_{126}. Wir behaupten: Diese 4 Kegelschnitte und mit ihnen also auch die 12 Punkte Q liegen auf der Fläche zweiter Ordnung

$$F^2_{12} \qquad 4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \sum_1^6 x_i^2.$$

Man kann nämlich diese Gleichung auch schreiben

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3) = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2,$$

und diese wird durch die Gleichungen des Kegelschnittes C^2_{123} befriedigt. Da die Gleichung der Fläche F^2_{12} für x_3, x_4, x_5, x_6 symmetrisch ist, so liegen ebenso die Kegelschnitte C^2_{124}, C^2_{125}, C^2_{126} auf F^2_{12}. Wir können also den Satz aussprechen:

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *werden 15 Flächen zweiter Ordnung*

$$F^2_{ik} \qquad 4(x_i^2 + x_ix_k + x_k^2) = \sum_1^6 x_i^2$$

bestimmt, auf denen je 12 Punkte Q und je 4 Kegelschnitte C^2_{ikl} *liegen.*

Durch jeden Punkt Q gehen 12 Flächen F^2_{ik};

z. B. durch den Punkt (12)(34)(56) gehen alle Flächen F^2_{ik} aufser F^2_{12}, F^2_{34}, F^2_{56}.

Durch jeden Kegelschnitt C^2_{ikl} *gehen 6 Flächen* F^2_{ik};

z. B. in dem Kegelschnitt $C^2_{123} \equiv C^2_{456}$ schneiden sich die Flächen F^2_{12}, F^2_{23}, F^2_{31}; F^2_{45}, F^2_{56}, F^2_{64}.

Zwei beliebige Kegelschnitte C^2_{ikl} werden durch zwei Flächen F^2_{ik} verbunden;
z. B. die Kegelschnitte $C^2_{123} \equiv C^2_{456}$ und $C^2_{234} \equiv C^2_{156}$ liegen sowohl auf der Fläche F^2_{23} als auch auf der Fläche F^2_{56}.

Eine Fläche F^2_{ik} schneidet die 6 nicht auf ihr liegenden Kegelschnitte in je 4 Punkten Q.

Es ist nämlich $C^2_{156} \equiv C^2_{234}$ ein Kegelschnitt, der nicht auf der Fläche F^2_{12} liegt. Zu den 6 Punkten Q auf diesem Kegelschnitte gehören auch die 4 folgenden: (13)(25)(46), (13)(26)(45), (14)(25)(36), (14)(26)(35), welche Punkte aber auf der Fläche F^2_{12} liegen.

Ein Punkt Q wird mit den 6 nicht durch ihn gehenden Kegelschnitten durch je vier Flächen F^2_{ik} verbunden.

Nämlich der Kegelschnitt $C^2_{123} \equiv C^2_{456}$ geht nicht durch den Punkt (12)(34)(56). Zu den 6 Flächen F^2_{ik}, die durch diesen Kegelschnitt gehen, gehören auch F^2_{13}, F^2_{23}, F^2_{45}, F^2_{46}, welche Flächen aber durch den Punkt (12)(34)(56) gehen.

Es zeigt sich ein gewisser Dualismus zwischen den 15 Punkten Q und den 15 Flächen F^2_{ik}; nämlich:

Durch jeden Punkt Q gehen 12 Flächen F^2_{ik}.	Auf jeder Fläche F^2_{ik} liegen 12 Punkte Q.
Auf jedem Kegelschnitt C^2_{ikl} liegen 6 Punkte Q.	Durch jeden Kegelschnitt C^2_{ikl} gehen 6 Flächen F^2_{ik}.
Durch jeden Punkt Q gehen 4 der 10 Kegelschnitte C^2_{ikl}.	Auf jeder Fläche F^2_{ik} liegen 4 der 10 Kegelschnitte C^2_{ikl}.
Zwei beliebige Kegelschnitte C^2_{ikl} schneiden sich in 2 Punkten Q.	Zwei beliebige Kegelschnitte werden durch 2 Flächen F^2_{ik} verbunden.
Ein Punkt Q wird mit den 6 nicht durch ihn gehenden Kegelschnitten C^2_{ikl} durch je vier Flächen F^2_{ik} verbunden.	Eine Fläche F^2_{ik} schneidet die 6 nicht auf ihr liegenden Kegelschnitte in je vier Punkten Q.

Aus dem letzten Satze rechts läfst sich die für später wichtige Folgerung ableiten:

Zieht man an die 4 durch einen Punkt Q gehenden Kegelschnitte C^2_{ikl} in diesem Punkte die Tangenten, dann liegen von denselben keine drei in einer Ebene.

Lägen nämlich die Tangenten der durch den Punkt (12)(34)(56) gehenden Kegelschnitte C^2_{135}, C^2_{136}, C^2_{235} in einer Ebene, dann würden sich die Fläche F^2_{13} und die Kurve $C^2_{235} \equiv C^2_{146}$ im Punkte (12)(34)(56) berühren, was unmöglich ist, da sie sich in 4 Punkten schneiden.

Zum Abschlufs unserer Untersuchung über die 15 Punkte Q wollen wir noch folgenden Satz beweisen:

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *wird eine Fläche vierter Ordnung:*

$$F^4 \qquad \left(\sum_1^6 x_i^2\right)^2 = 4\sum_1^6 x_i^4$$

bestimmt, welche die 15 Punkte Q zu Knotenpunkten und die 10 Ebenen $[ikl]$ zu singulären Berührungsebenen hat, und zwar berührt die Fläche F^4 jede der 10 Ebenen $[ikl]$ längs des darin liegenden Kegelschnittes C^2_{ikl}.

Zum Beweise bestimmen wir die Schnittkurve der Fläche F^4 z. B. mit der Ebene $[1\,2\,3]$. Für die Ebene $[1\,2\,3]$ ist

$$-x_3 = x_1 + x_2,$$

mithin auch

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + [x_1 + x_2]^2)^2 = 4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)^2 \\ &= 2(x_1^4 + x_2^4 + [x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4]) \\ &= 2(x_1^4 + x_2^4 + [x_1 + x_2]^4) = 2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).\end{aligned}$$

Da für die Ebene $[1\,2\,3]$ auch $x_4 + x_5 + x_6 = 0$ ist, so ist ebenso

$$(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2 = 2(x_4^4 + x_5^4 + x_6^4)$$

und

$$4\sum_1^6 x_i^4 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + 2(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2.$$

Die Gleichung der Fläche F^4, welche man auch schreiben kann

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2 = 4\sum_1^6 x_i^4,$$

geht demnach unter der Bedingung, dafs

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

ist, über in

$$0 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^2$$

oder:

$$[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)]^2 = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dafs die Fläche F^4 mit der Ebene $[1\,2\,3]$ den Kegelschnitt C^2_{123} doppelt gemein hat. Die Gleichung der Fläche F^4 ist eine symmetrische Funktion von $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$; also hat die Fläche F^4 mit jeder der 10 Ebenen $[ikl]$ den darin liegenden Kegelschnitt doppelt gemein. Da die 15 Punkte Q auf den

10 Kegelschnitten C^2_{ikl} liegen, so geht die Fläche F^4 auch durch diese Punkte. Durch einen Punkt Q gehen vier Kurven C^2_{ikl}; die Tangenten dieser Kurven im Punkte Q sind auch Tangenten der Fläche F^4 in diesem Punkte; da diese 4 Tangenten aber nicht in einer Ebene liegen, so folgt, daſs der Punkt Q Doppelpunkt der Fläche F^4 ist. Aus den Sätzen S. 18 u. 19 ergiebt sich für die Fläche F^4:

Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *kann aus der Fläche* F^4 *abgeleitet werden. Nämlich jeder der 15 Knotenpunkte ist der Scheitel eines Vierseits aus 4 der singulären Berührungsebenen; die Diagonalebenen dieser 15 Vierseite sind die 15 Konfigurationsebenen. Auch bilden die 45 Schnittlinien der 10 singulären Berührungsebenen 15 Dreiseite, deren Eckpunkte die 15 Knotenpunkte sind; die Ebenen dieser 15 Dreiseite sind die 15 Konfigurationsebenen.*

Anmerkung: Die Fläche F^4 ist die bekannte Brennfläche einer Strahlenkongruenz zweiter Ordnung dritter Klasse.[1]) Von dieser Brennfläche aber ist die Kummersche Fläche vierter Ordnung vierter Klasse mit 16 Doppelpunkten und 16 singulären Berührungsebenen ein besonderer Fall. Für die Kummersche Fläche folgt daraus:

Scheidet man aus den 16 Knotenpunkten und den 16 singulären Berührungsebenen der Kummerschen Fläche einen Knotenpunkt nebst den 6 durch ihn gehenden singulären Berührungsebenen aus, dann ist jeder der 15 übrigen Knotenpunkte der Scheitel eines Vierseits aus 4 der 10 übrigen singulären Berührungsebenen. Die Diagonalebenen dieser 15 Vierseite sind die 15 Ebenen einer Konfiguration $(15_6, 20_3)$. *Auch bilden die 45 Schnittlinien der 10 singulären Berührungsebenen 15 Dreikante, deren Eckpunkte die 15 Knotenpunkte sind. Die Ebenen dieser Dreiseite sind die 15 Konfigurationsebenen. Auf diese Weise können aus der Kummerschen Fläche 16 Konfigurationen* $(15_6, 20_3)$ *abgeleitet werden.*[2])

Der reziproke Satz lautet:

Scheidet man aus den 16 Knotenpunkten und den 16 singulären Berührungsebenen der Kummerschen Fläche eine singuläre Berührungsebene nebst den 6 darin liegenden Knotenpunkten aus, dann liegt in jeder der 15 übrigen singulären Berührungsebenen ein Viereck aus 4 der 10 übrigen Knotenpunkte. Die Nebeneckpunkte dieser 15 Vierecke sind die 15 Punkte einer Konfiguration $(15_6, 20_3)$. *Auch bilden die 45 Verbindungslinien der 10 Knotenpunkte 15 Dreikante, deren Ebenen die 15*

1) Vgl. Kummer: Über die algebraischen Strahlensysteme in den Abh. der Berl. Ak. math. Klasse, 1866, S. 71. Reye: Crelles Journal **86**, 97.

2) Vgl. Caporali: Memorie di Geometria, Napoli 1888, S. 86.

singulären Berührungsebenen sind. Die Scheitel dieser Dreikante sind die 15 Konfigurationspunkte. Da wir auf diese Weise zu 16 Konfigurationen $(15_6, 20_3)$ *gelangen, so werden durch die Kummersche Fläche 32 Konfigurationen* $(15_6, 20_3)$ *bestimmt.*

§ 6.

Beziehung der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ zu einem System von 10 Kegeln zweiter Klasse, 15 Flächen zweiter Klasse und einer Fläche vierter Klasse mit 15 singulären Berührungsebenen.

Da die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ in einem Polarsystem sich selbst zugeordnet ist, so giebt es zu dem in § 5 entwickelten Systeme von 10 Kegelschnitten, 15 Flächen zweiter Ordnung und einer Fläche vierter Ordnung ein reziprokes System, das wir hier kurz erläutern wollen.

Verbindet man je drei solche Konfigurationspunkte, die zu zweien auf keiner Konfigurationsgeraden liegen, durch eine Ebene, dann erhält man 15 Ebenen ε. Die 15 Ebenen ε gehen zu drei durch die 15 Konfigurationspunkte und zu sechs durch 10 Punkte M. In jeder Ebene ε liegen 4 der 10 Punkte M. Jeder der 10 Punkte M ist Mittelpunkt eines Kegels K^2 zweiter Klasse, der von den 6 durch diesen Punkt gehenden Ebenen ε umhüllt wird. Man erhält somit 10 Kegel K^2 aus der Konfiguration $(15_6, 20_3)$. Jede Ebene ε berührt 4 der 10 Kegel K^2. Beliebige 2 der 10 Kegel K^2 haben 2 Berührungsebenen ε gemein. Die 12 Ebenen, die von den 15 Ebenen ε nach Ausscheidung der drei durch einen Konfigurationspunkt gehenden übrig bleiben, umhüllen eine Fläche Φ^2 zweiter Klasse. Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ werden demnach 15 Flächen Φ^2 bestimmt. Jede Ebene ε wird von 12 der 15 Flächen Φ^2 berührt, und jede der 15 Flächen Φ^2 berührt 12 der 15 Ebenen ε. Jede der 15 Flächen Φ^2 hat 4 der 10 Kegel K^2 zu Tangentenkegeln. Jeder der 10 Kegel K^2 ist Tangentenkegel von 6 der 15 Flächen Φ^2 und berührt 6 der 15 Ebenen ε. Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ wird eine Fläche Φ^4 vierter Klasse bestimmt, welche die 15 Ebenen ε zu singulären Berührungsebenen und die 10 Punkte M zu Knotenpunkten hat. Die Tangenten der Fläche Φ^4, welche durch M gehen und deren Berührungspunkte von M verschieden sind, liegen auf dem Kegel K^2, der M zum Mittelpunkt hat. Man kann aus der Fläche Φ^4 die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ wieder ableiten. Nämlich in jeder der 15 singulären Berührungsebenen liegt ein Viereck aus 4 der 10 Knotenpunkte. Die Nebeneckpunkte dieser 15 Vierecke sind die 15 Konfigurationspunkte.

Auch bilden die 45 Verbindungslinien der 10 Knotenpunkte 15 Dreikante, deren Ebenen die 15 singulären Berührungsebenen sind. Die Scheitel dieser Dreikante sind die 15 Konfigurationspunkte.

Anmerkung: Die Kummersche Fläche vierter Klasse vierter Ordnung mit 16 singulären Berührungsebenen und 16 Knotenpunkten ist ein besonderer Fall dieser Fläche Φ^4. Der schon in § 5 entwickelte Satz, dafs man aus der Kummerschen Fläche durch jemaliges Ausschalten einer singulären Berührungsebene 16 Konfigurationen $(15_6, 20_2)$ ableiten kann, findet also hier seine Begründung.

§ 7.

Ein durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ bestimmtes System von sechs Clebschschen Diagonalflächen dritter Ordnung.

Wir konstruieren zu den durch die Konfigurationsgerade (ikl) gehenden Ebenen

$$(ik) \qquad x_i - x_k = 0,$$

$$(il) \qquad x_i - x_l = 0,$$

$$(kl) \qquad x_k - x_l \equiv (x_i - x_l) - (x_i - x_k) = 0$$

die vierte harmonische Ebene λ, welche der Ebene (kl) zugeordnet ist; diese wird durch die Gleichung

$$i \cdot kl \qquad 2x_i = x_k + x_l$$

dargestellt. Mit der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ sind demnach 60 Ebenen λ verbunden, welche zu drei durch die 20 Konfigurationsgeraden gehen. Beispielsweise schneiden sich die Ebenen $1 \cdot 23$, $2 \cdot 13$, $3 \cdot 12$ in der Geraden [1 2 3].

Wir wollen zunächst die 30 Ebenen λ untersuchen, welche zu drei durch die 10 Kanten (ikl) des vollständigen Fünfecks P_6 (vgl. § 1) gehen; es sind das diejenigen Ebenen λ, deren Symbole die Ziffer 6 nicht enthalten. Wir können die 30 λ in 5 Gruppen von je 6 λ einteilen, indem wir zu einer Gruppe alle Ebenen λ rechnen, deren Symbole mit derselben Ziffer anfangen; z. B. die 6 Ebenen $1 \cdot 23$, $1 \cdot 45$; $1 . 24$, $1 \cdot 35$; $1 \cdot 25$, $1 \cdot 34$ bilden die erste Gruppe. Ordnen wir je zwei Ebenen derselben Gruppe einander zu, deren Symbole zusammen alle fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 enthalten, dann enthält jede Gruppe drei Ebenenpaare, wie man es an der ersten Gruppe sieht. Indem wir die Ebenen jedes der 15 Paare zum Schnitt bringen, erhalten wir 15 Geraden d, von denen eine beliebige durch die Gleichungen

$$i \cdot kl \cdot mn \qquad 2\,x_i = x_k + x_l = x_m + x_n$$

dargestellt wird. Durch jede Gruppe werden drei dieser Geraden bestimmt; z. B. die Geraden der ersten Gruppe sind $1 \cdot 23 \cdot 45$, $1 \cdot 24 \cdot 35$, $1 \cdot 25 \cdot 34$. Mit Hilfe der identischen Relation $\sum_1^6 x_i = 0$ findet man, dafs jede der letzteren Geraden die Gleichung

$$x_1 + \tfrac{1}{5} x_6 = 0$$

befriedigt; also ergiebt sich:

Die drei Geraden d der i^{ten} Gruppe liegen in einer Ebene

σ_{i6} $$x_i + \tfrac{1}{5} x_6 = 0\,.$$

Das Fünfflach σ_6 der Ebenen σ_{16}, σ_{26}, σ_{36}, σ_{46}, σ_{56} wird durch die Konfiguration eindeutig bestimmt; denn jede der 5 Ebenen verbindet je drei Geraden d. Die Ebenen σ_{26}, σ_{36}, σ_{46}, σ_{56} schneiden aus der Ebene σ_{16} ein Vierseit aus. Für den Eckpunkt $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ desselben gelten die Gleichungen

$$x_1 + \tfrac{1}{5} x_6 = x_2 + \tfrac{1}{5} x_6 = x_3 + \tfrac{1}{5} x_6 = 0$$

und also auch

$$2\,x_1 = x_2 + x_3\,.$$

Wegen der identischen Relation

$$\sum_1^5 (x_i + \tfrac{1}{5} x_6) = 0$$

folgt aus den ersten drei Gleichungen

$$(x_4 + \tfrac{1}{5} x_6) + (x_5 + \tfrac{1}{5} x_6) = 0$$

und also auch

$$2\,x_1 = x_4 + x_5\,.$$

Der Eckpunkt $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ des Vierseits in σ_{16} liegt mithin auf der Geraden $1 \cdot 23 \cdot 45$. Aus dem Punkte $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ erhält man seinen Gegenpunkt $\sigma_{16}\sigma_{46}\sigma_{56}$ im Vierseit der Ebene σ_{16}, indem man 2 mit 4 und 3 mit 5 vertauscht. Der Gegenpunkt liegt also gleichfalls auf der Geraden $1 \cdot 23 \cdot 45$. Diese ist demnach eine Diagonale des Vierseits in σ_{16}. Wir können somit den Satz aussprechen:

Die 15 Geraden d sind die Diagonalen der 5 Vierseite, welche man erhält, wenn man jede Ebene des Fünfflachs σ_6 mit den 4 übrigen zum Schnitt bringt.

Die Eckpunkte $\sigma_{16}\sigma_{46}\sigma_{56}$, $\sigma_{26}\sigma_{46}\sigma_{56}$, $\sigma_{36}\sigma_{46}\sigma_{56}$ des Fünfflachs σ_6, welche auf der Kante $\sigma_{46}\sigma_{56}$ desselben liegen, werden aus dem Eckpunkte $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$, dem Gegenpunkte der Kante $\sigma_{46}\sigma_{56}$, durch die Ge-

raden $1 \cdot 23 \cdot 45$, $2 \cdot 13 \cdot 45$, $3 \cdot 12 \cdot 45$ projiziert. Diese drei Geraden d liegen also in einer Ebene. Die Gleichung der Ebene ist

$$(x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0,$$

denn sowohl der Eckpunkt $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ als auch die Kante $\sigma_{46}\sigma_{56}$ befriedigen diese Gleichung. Allgemein ergiebt sich:

Durch jeden der 10 Eckpunkte des Fünfflachs σ_6 gehen drei Diagonalen d, und zwar werden diese aus den drei den Eckpunkt bestimmenden Ebenen des Fünfflachs σ_6 durch die Verbindungsebene des Eckpunktes mit seiner Gegenkante ausgeschnitten.

Durch die Gerade $1 \cdot 23 \cdot 45$ gehen die Ebene σ_{16} und die beiden Ebenen, welche die Eckpunkte $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$, $\sigma_{16}\sigma_{46}\sigma_{56}$ mit ihren Gegenkanten $\sigma_{46}\sigma_{56}$, $\sigma_{26}\sigma_{36}$ verbinden. Die Gerade $1 \cdot 23 \cdot 45$ befriedigt also die Gleichungen

$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_6 = (x_2 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_3 + \tfrac{1}{5}x_6) = (x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0$$

und demnach auch die Gleichung

$$\sum_1^5 (x_i + \tfrac{1}{5}x_6)^3 = 0.$$

Da die letzte Gleichung inbezug auf x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 symmetrisch ist, so wird sie von allen 15 Geraden d erfüllt. Unsere Untersuchung führt mithin zu dem Resultat:

Die 15 Diagonalen d liegen auf einer Fläche dritter Ordnung

$$D_6 \qquad \sum_1^5 (x_i + \tfrac{1}{5}x_6)^3 = 0.$$

Die Fläche D_6 hat das Fünfflach σ_6 zum Sylvesterschen Pentaeder und die charakteristische Eigenschaft, dafs die Summe der fünf linearen Funktionen $x_i + \frac{1}{5}x_6$ identisch Null ist. Die 15 Geraden d sind die Diagonalen der Vierseite, welche man erhält, wenn man jede Ebene des Sylvesterschen Pentaeders zum Schnitt bringt mit den 4 übrigen Ebenen. D_6 hat die 5 Pentaederebenen zu dreifach berührenden Ebenen. In jeder der 10 Pentaederecken schneiden sich drei in einer Ebene liegende Geraden d der Fläche. Clebsch nennt eine solche Fläche dritter Ordnung eine Diagonalfläche.[1])

Da die Ziffer 6 mit jeder der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 vertauscht werden kann, so werden durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ die

1) Vgl. Math. Annalen **4**, 332.

Clebschschen Diagonalflächen $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ bestimmt. Die linken Seiten der Gleichungen

$$(x_5 + \tfrac{1}{5}x_6)^3 + \sum_1^4 (x_i + \tfrac{1}{5}x_6)^3 = 0,$$

$$(x_6 + \tfrac{1}{5}x_5)^3 + \sum_1^4 (x_i + \tfrac{1}{5}x_5)^3 = 0$$

der Flächen D_6 und D_5 werden einander gleich, wenn $x_5 = x_6$ ist. Die Schnittkurven der Flächen D_6 und D_5 mit der Ebene (5 6) sind also identisch. Allgemein ergiebt sich:

Die Flächen D_i und D_k haben mit der Konfigurationsebene (ik) dieselbe Kurve dritter Ordnung gemein.

Hieraus folgt, dafs man von dem System der 6 Diagonalflächen wieder zur Konfiguration gelangen kann. Thatsächlich ist aber zur Bestimmung der Konfiguration nicht das ganze System der 6 Flächen nötig; vielmehr ergiebt sich:

Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ kann aus beliebigen zwei der 6 Clebschschen Diagonalflächen $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ abgeleitet werden.

Nämlich die Verbindungsebene des Eckpunktes $\sigma_{16}\sigma_{26}\sigma_{36}$ des Fünfflachs σ_6 mit seiner Gegenkante $\sigma_{46}\sigma_{56}$ hat, wie wir wissen, die Gleichung

$$(x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) + (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0.$$

Von dieser Ebene ist durch die Ebenen

$$\sigma_{46} \qquad x_4 + \tfrac{1}{5}x_6 = 0,$$

$$\sigma_{56} \qquad x_5 + \tfrac{1}{5}x_6 = 0$$

harmonisch getrennt die Ebene, welche durch die Gleichung

$$(x_4 + \tfrac{1}{5}x_6) - (x_5 + \tfrac{1}{5}x_6) = 0$$

dargestellt wird, d. h. die Konfigurationsebene (4 5). Wir können demgemäfs den Satz aussprechen:

Aus der Diagonalfläche D_i kann man das vollständige Fünfeck P_i herleiten. Die Ebene, welche von einem Eckpunkt des Sylvesterschen Pentaeders σ_i der Fläche D_i durch die die Gegenkante des Eckpunktes bestimmenden Pentaederebenen harmonisch getrennt ist, ist nämlich eine Ebene von P_i.

Mittelst dieses Satzes ist es nun leicht zu zeigen, dafs z. B. durch die Flächen D_6 und D_5 die Konfiguration bestimmt ist. Aus D_6 und D_5 erhält man die vollständigen Fünfecke P_6 und P_5 und also alle Konfigurationsebenen aufser (5 6). Da aber die Ebenen (1 5), (1 6); (2 5),

(2 6); (3 5), (3 6); (4 5), (4 6) sich in den resp. Geraden (1 5 6), (2 5 6), (3 5 6), (4 5 6) der Konfigurationsebene (5 6) schneiden, so ist auch diese durch D_6 und D_5 bestimmt.

Auf das zu dem System der 6 Clebschschen Diagonalflächen reziproke System aus 6 Flächen dritter Klasse wollen wir nicht näher eingehen.

§ 8.

Beziehung der Konfiguration $(15_6, 20_3)$ zu einem System von 15 ebenen Kurven dritter Ordnung und 6 Flächen dritter Ordnung.

Von den durch die Konfigurationsgerade (1 2 3) gehenden Konfigurationsebenen (2 3), (3 1), (1 2) ist jede durch die beiden übrigen von einer der Ebenen $1 \cdot 23$, $2 \cdot 31$, $3 \cdot 12$ harmonisch getrennt (vgl. § 7). Die letzteren Ebenen schneiden die gegenüberliegende Konfigurationsgerade (4 5 6) in drei sogenannten Kirkmanpunkten K. Führen wir diese Konstruktion für jede der 20 Konfigurationsgleichungen aus, dann erhalten wir 60 Kirkmanpunkte K, welche zu dreien auf den 20 Konfigurationsgeraden liegen. Für den Schnittpunkt der durch die Gerade (ikl) der Konfiguration gehenden Ebene $i \cdot kl$ mit der gegenüberliegenden Konfigurationsgeraden (mnp) bestehen die Gleichungen

$$2x_i = x_k + x_l, \quad x_m = x_n = x_p,$$

woraus sich mit Hilfe der identischen Relation

$$x_i + x_k + x_l + x_m + x_n + x_p = 0$$

ergiebt

$$x_i + x_m = x_i + x_n = x_i + x_p = 0:$$

Ein beliebiger der 60 Kirkmanpunkte K wird demnach durch

$i(mnp)$ $$x_i + x_m = x_i + x_n = x_i + x_p = 0$$

oder

$$-x_i = x_m = x_n = x_p$$

dargestellt.

Durch jeden der 60 Kirkmanpunkte gehen drei der 15 Ebenen

ik $$x_i + x_k = 0.$$

Man kann daher auch mittelst der 15 Ebenen ik, welche dreifach berührende Ebenen der kubischen Fläche

F^3 $$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0$$

sind, die Punkte K aus der Konfiguration ableiten.

Die 60 Kirkmanpunkte $i(klm)$ liegen zu drei einerseits auf den 20 Konfigurationsgeraden (klm), andererseits auf den 60 Pascalgeraden $i(kl)$

$$-x_i = x_k = x_l.$$

Durch jeden von ihnen gehen drei Pascalgeraden, und auf jeder Pascalgeraden liegen drei Kirkmanpunkte.

Beispielsweise liegen auf der Geraden $1(2\,3)$ die drei Kirkmanpunkte $1(2\,3\,4)$, $1(2\,3\,5)$, $1(2\,3\,6)$, und durch den Punkt $1(2\,3\,4)$ gehen die Geraden $1(2\,3)$, $1(3\,4)$, $1(4\,2)$. Bezeichnen i, k irgend zwei der Ziffern 3, 4, 5, 6, dann enthält die Ebene 1 2 die sechs Schnittpunkte $1(2ik)$ der Pascalgeraden $1(2\,3)$, $1(2\,4)$, $1(2\,5)$, $1(2\,6)$ und die sechs Schnittpunkte $2(1ik)$ der Pascalgeraden $2(1\,3)$, $2(1\,4)$, $2(1\,5)$, $2(1\,6)$.

In jeder der 15 Ebenen liegen demnach 12 Kirkmanpunkte. Diese sind die Eckpunkte zweier vollständigen Vierseite, die von je vier Pascalgeraden gebildet werden.

In der Konfigurationsebene (1 2) liegen das Vierseit der Konfigurationsgeraden (1 2 3), (1 2 4), (1 2 5), (1 2 6) und das Vierseit der Pascalgeraden 3(1 2), 4(1 2), 5(1 2), 6(1 2). Die Geraden, deren Symbole mit denselben Ziffern geschrieben werden, schneiden sich in den Steinerpunkten (1)(2)(3), (1)(2)(4), (1)(2)(5), (1)(2)(6), welche aber auf der Steinergeraden (1)(2) der Konfigurationsebene (1 2) liegen. Die übrigen 12 Durchdringungspunkte der beiden Vierseite sind Kirkmanpunkte K. Mithin ergiebt sich:

Die 12 Kirkmanpunkte einer Konfigurationsebene liegen zu dreien einerseits auf den vier Konfigurationsgeraden, anderseits auf den vier Pascalgeraden der Konfigurationsebene. Die 4 Konfigurationsgeraden schneiden die 4 Pascalgeraden in den 12 Kirkmanpunkten und den 4 Steinerpunkten der Konfigurationsebene.

Wir können die 12 Kirkmanpunkte und die 4 Steinerpunkte einer Konfigurationsebene als die Basispunkte eines Büschels von ebenen Kurven vierter Ordnung auffassen, dem die zerfallende Kurve vierter Ordnung der 4 Konfigurationsgeraden und die zerfallende Kurve vierter Ordnung der 4 Pascalgeraden angehören. Bekanntlich ist eine Kurve eines Büschels bestimmt, wenn wir einen Punkt annehmen, durch den sie gehen soll. Verlangen wir nun von einer Kurve unseres Büschels vierter Ordnung, dafs sie durch einen auf der Steinergeraden angenommenen Punkt gehen soll, dann mufs sie in die Steinergerade und in eine durch die 12 Kirkmanpunkte gehende Kurve dritter Ordnung zerfallen. Demnach ergiebt sich:

Die 12 Kirkmanpunkte einer Konfigurationsebene liegen auf einer Kurve dritter Ordnung.

Man kann dieses Resultat auch aus dem Satze ableiten:

Die 30 Kirkmanpunkte, welche auf den 10 Kanten (ikl) des vollständigen Fünfflachs π_i der Konfiguration (vgl. § 1) enthalten sind, liegen auf einer Fläche dritter Ordnung

$$F_i^3 \qquad \sum_1^6 x_i^3 + 3x_i \sum_1^6 x_i^2 = 18 x_i^3.$$

Die linke Seite der Gleichung

$$\sum_1^6 x_i^3 + 3x_6 \sum_1^6 x_i^2 = 18 x_6^3$$

der Fläche F_6^3 geht nämlich für den Punkt $1(236)$, welcher die Gleichungen

$$-x_1 = x_2 = x_3 = x_6, \quad 2x_1 = x_4 + x_5$$

erfüllt, über in

$$G = -14x_1^3 + x_4^3 + x_5^3 - 3x_1(x_4^2 + x_5^2).$$

Wegen der Gleichung

$$x_4 + x_5 = 2x_1$$

und der Identität

$$x_4^3 + x_5^3 = (x_4 + x_5)(x_4^2 + x_5^2 - x_4 x_5)$$

wird

$$G = -14x_1^3 - x_1(x_4^2 + x_5^2 + 2x_4x_5) = -14x_1^3 - x_1(x_4 + x_5)^2$$
$$= -18x_1^3 = 18x_6^3.$$

Der Punkt $1(2\,3\,6)$ genügt mithin der Gleichung der Fläche F_6^3 und liegt also auf der Fläche. Da die Gleichung der Fläche F_6^3 inbezug auf x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 symmetrisch ist, so liegen ebenso auf der Fläche F_6^3 alle Kirkmanpunkte $l(ik6)$, wenn i, k, l irgend drei der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bedeuten. Es sind das aber die 30 Kirkmanpunkte auf den Kanten des selbständigen Fünfflachs π_6 der Ebenen (16), (26), (36), (46), (56) oder die Kirkmanpunkte in diesen fünf Konfigurationsebenen.

Durch die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *werden demnach 6 Flächen dritter Ordnung* F_1^3, F_2^3, F_3^3, F_4^3, F_5^3, F_6^3 *bestimmt, auf denen je 30 Kirkmanpunkte liegen.*

Bezeichnen wir die Kurve dritter Ordnung, welche die 12 Kirkmanpunkte der Konfigurationsebene (ik) verbindet, mit C_{ik}^3, so ergiebt sich:

Auf jeder der 6 Flächen F_i^3 liegen 5 der 15 Kurven C_{ik}^3,
z. B. auf F_6^3 die Kurven C_{16}^3, C_{26}^3, C_{36}^3, C_{46}^3, C_{56}^3.

Durch jede der 15 Kurven C^3_{ik} gehen 2 der 6 Flächen F^3_i,
z. B. durch C^3_{12} die Flächen F^3_1 und F^3_2.

*Durch jeden **Kirkmanpunkt** gehen 3 Flächen F^3_i,*
z. B. der Punkt 4(123) ist ein Schnittpunkt der Flächen F^3_1, F^3_2, F^3_3. Diese schneiden sich aber ebenfalls in den Punkten 5(123) und 6(123).

*In den drei **Kirkmanpunkten** auf einer Konfigurationsgeraden schneiden sich also drei der sechs Flächen F^3_i.*

Da je zwei der 6 Flächen F^3_i eine ebene Kurve dritter Ordnung in je einer der 15 Konfigurationsebenen gemein haben, so ergiebt sich:

Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$ *kann aus dem System der 6 Flächen F^3_i abgeleitet werden.*

§ 9.

Ableitung eines Systems von 15 Kegeln dritter Klasse und 6 Flächen dritter Klasse aus der Konfiguration $(15_6, 20_3)$.

Zu dem in § 8 betrachteten System von 15 ebenen Kurven dritter Ordnung und 6 Flächen dritter Ordnung giebt es ein reziprokes System, das wir hier kurz beschreiben wollen.

Indem wir zu den drei Konfigurationspunkten auf einer Konfigurationsgeraden den vierten harmonischen Punkt konstruieren, welcher einem von ihnen zugeordnet ist, erhalten wir auf jeder Konfigurationsgeraden drei Punkte L. Wir verbinden jeden der drei auf einer Konfigurationsgeraden liegenden Punkte L mit der gegenüberliegenden Konfigurationsgeraden durch eine Ebene $\varkappa$. Mit der Konfiguration sind demnach 60 Ebenen $\varkappa$ verbunden, welche zu drei durch die 20 Konfigurationsgeraden gehen. Durch jeden Konfigurationspunkt gehen 12 Ebenen $\varkappa$, welche einen Kegel K^3 dritter Klasse umhüllen. Aus der Konfiguration lassen sich also 15 Kegel K^3 ableiten. Die 30 Ebenen $\varkappa$, welche zu dreien durch die 10 Kanten (ikl) des vollständigen Fünfecks P_i der Konfiguration (vgl. § 1) gehen, umhüllen eine Fläche φ^3 dritter Klasse. Durch die Konfiguration werden demnach 6 Flächen φ^3 dritter Klasse bestimmt, welche je 30 Ebenen $\varkappa$ zu Berührungsebenen haben. Jede der 6 Flächen φ^3 hat 5 der 15 Kegel K^3 zu Tangentenkegeln. Jeder Kegel K^3 ist Tangentenkegel von 2 Flächen φ^3. Jede Ebene $\varkappa$ wird von drei Flächen φ^3 berührt. Man kann aus dem System der 6 Flächen φ^3 die Konfiguration wieder ableiten, nämlich je zwei der 6 Flächen haben einen gemeinsamen Tangentenkegel K^3 dritter Klasse, dessen Scheitel ein Konfigurationspunkt ist.

Goniometrische Auflösung der algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade mittels der Formel für die Tangente des vielfachen Winkels.

Von L. MATTHIESSEN in Rostock.

Für die Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades sind verschiedene goniometrische Methoden angewandt worden. Um nun ein gemeinsames Prinzip einzuführen, soll im folgenden gezeigt werden, wie man die vollständigen Gleichungen mittels der Formeln für die Tangente des zwei-, drei- und vierfachen Winkels lösen kann.

I. Gegeben sei die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$. Wir gehen aus von der Identität

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \tan\varphi}{1 - \tan\varphi^2},$$

oder

$$\tan\varphi^2 + \frac{2}{\tan 2\varphi} \tan\varphi - 1 = 0. \tag{1}$$

Setzen wir $x = r \tan\varphi$, so resultiert aus der gegebenen Gleichung

$$\tan\varphi^2 + \frac{a}{r} \tan\varphi + \frac{b}{r^2} = 0.$$

Durch Vergleichung mit (1) erhält man folgende Bestimmungsgleichungen

$$r = i\sqrt{b}, \ \tan 2\varphi = \frac{2i\sqrt{b}}{a} = \tan(\pi + 2\varphi).$$

Mithin ergiebt sich daraus

$$x_1 = i\sqrt{b} \tan\varphi, \quad x_2 = -i\sqrt{b} \cot\varphi.$$

Die hier auftretende imaginäre Form der Wurzeln läfst darauf schliefsen, dafs für einen negativen Wert von b, die Gleichung stets zwei reelle Wurzeln hat, dafs jedoch im entgegengesetzten Falle der Winkel φ imaginäre Werte annehmen kann. Wir diskutieren die möglichen Fälle:

1. Gegeben sei $x^2 + ax - b = 0$. Dann ist

$$r = \sqrt{b}, \quad \tan 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}; \quad x_1 = \sqrt{b} \tan\varphi, \quad x_2 = -\sqrt{b} \cot\varphi.$$

2. Gegeben sei $x^2 + ax + b = 0$. Wenn diese Gleichung reelle Wurzeln haben kann, so mufs nach dem Vorhergehenden der Winkel 2φ und ebenso φ einen imaginären Wert haben. Es sei nun $\varphi = \eta + \vartheta i$; dann ist

$$(2)\quad \tan(2\eta + 2\vartheta i) = \frac{(e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta})\sin 2\eta + i(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})\cos 2\eta}{(e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta})\cos 2\eta - i(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})\sin 2\eta} = \frac{2i\sqrt{b}}{a}.$$

Die Homogeneität erfordert die Relation $2\eta = 0$. Dann folgt

$$\tan 2\varphi = \tan 2\vartheta i = \frac{(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})i}{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta}} = \frac{2i\sqrt{b}}{a}.$$

Dieser Fall erfordert die Ungleichung $a^2 > 4b$; ϑ ist reell und es wird

$$\tan\varphi = \tan\vartheta i = i\frac{e^{2\vartheta} - 1}{e^{2\vartheta} + 1}$$

Der Winkel ϑ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$e^{4\vartheta} = (a + 2\sqrt{b}):(a - 2\sqrt{b}).$$

Die Wurzeln sind *reell*, nämlich

$$x_1 = i\sqrt{b}\tan\vartheta i = -\sqrt{b}\frac{e^{2\vartheta} - 1}{e^{2\vartheta} + 1};\quad x_2 = i\sqrt{b}\tan\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta i\right) = \sqrt{b}\frac{e^{2\vartheta} + 1}{e^{2\vartheta} - 1}.$$

Der Homogeneität der Gleichung wird aber auch genügt durch die Relation $2\eta = \frac{1}{2}\pi$. Dann folgt weiter

$$\tan 2\varphi = \left(\frac{\pi}{2} + 2\vartheta i\right) = \frac{(e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta})i}{e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta}} = \frac{2i\sqrt{b}}{a}.$$

Dieser Fall erfordert die Ungleichung $a^2 < 4b$; ϑ ist reell und ergiebt sich aus der Gleichung

$$e^{4\vartheta} = (2\sqrt{b} + a):(2\sqrt{b} - a).$$

Es wird nun

$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta i\right) = \frac{2 + i(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})}{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta}} = \frac{2e^{2\vartheta}}{e^{4\vartheta} + 1} + \frac{ia}{2\sqrt{b}}.$$

Die Wurzeln sind *beide komplex*, nämlich

$$x_1 = i\sqrt{b}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \vartheta i\right) = -\frac{1}{2}a + 2\sqrt{b}\frac{e^{2\vartheta}i}{e^{4\vartheta} + 1},$$

$$x_2 = i\sqrt{b}\tan\left(\frac{3\pi}{4} + \vartheta i\right) = -\frac{1}{2}a - 2\sqrt{b}\frac{e^{2\vartheta}i}{e^{4\vartheta} + 1}.$$

II. Gegeben sei die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Man gehe aus von der Relation[1])

$$\tan 3\varphi = \frac{3\tan\varphi - \tan\varphi^3}{1 - 3\tan\varphi^2}$$

1) Methode von Stoll. Progr. von Bensheim 1876.

oder

(3) $$\tan\varphi^3 - 3\tan 3\varphi\cdot\tan\varphi^2 - 3\tan\varphi + \tan 3\varphi = 0\,.$$

Um die gegebene Gleichung auf diese Form zu bringen, setze man $x = y + z$ und bilde die Variierte

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0\,.$$

Substituiert man weiter $y = r\tan\varphi$, so erhält man

$$\tan\varphi^3 + \frac{\alpha}{r}\tan\varphi^2 + \frac{\beta}{r^2}\tan\varphi + \frac{\gamma}{r^3} = 0\,.$$

Durch Vergleichung der homologen Koeffizienten mit Gleichung (3) erhält man die erforderlichen Bestimmungsgleichungen für r und $\tan 3\varphi$, und ebenso für z, indem aus (3) die Bedingung $\alpha\beta - 9\gamma = 0$ folgt. Aus der letzteren ergiebt sich die Resolvente

(4) $$2(a^2 - 3b)z + (ab - 9c) = 0\,,$$

aufserdem ist

$$\alpha = -3r\tan 3\varphi,\quad \beta = -3r^2,\quad \gamma = r^3\tan 3\varphi,$$

(5) $$r = \sqrt{-\tfrac{1}{3}\beta},\quad \tan 3\varphi = -\frac{\alpha}{3r} = \frac{\gamma}{r^3}.$$

Da nun

$$r^2 = -\tfrac{1}{3}\beta = -\tfrac{1}{3}(3z^2 + 2az + b)$$

ist, oder wenn man aus (4) den Wert von z einsetzt,

$$r^2 = \frac{-(ab-9c)^2 + 4(a^2-3b)(b^2-3ac)}{4(a^2-3b)^2} = \frac{-3D_3}{4(a^2-3b)^2}\,,$$

so ergiebt sich weiter

(6) $$\tan 3\varphi = \frac{-(2a^3 - 9ab + 27c)}{3\sqrt{-3D_3}} = -\frac{9V_3}{\sqrt{-3D_3}}\,,$$

wo V_3 die kubische Variante bedeutet und D_3 die Diskriminante

$$-(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2.$$

Nun hat die vorgelegte Gleichung, wenn ihre Diskriminante *negativ* ist, *drei reelle* Wurzeln. Da nämlich

$$\tan 3\varphi = \tan(2\pi + 3\varphi) = \tan(4\pi + 3\varphi)$$

ist, so erhält man

$$x_1 = z + r\tan\varphi\,,$$
$$x_2 = z + r\tan(\tfrac{2}{3}\pi + \varphi) = z - r\tan(\tfrac{1}{3}\pi - \varphi)\,,$$
$$x_3 = z + r\tan(\tfrac{4}{3}\pi + \varphi) = z + r\tan(\tfrac{1}{3}\pi + \varphi)\,.$$

Wenn dagegen die Diskriminante *positiv* ist, hat die Gleichung *eine reelle* und *zwei komplexe* Wurzeln. Denn dann werden r und $\tan 3\varphi$ rein imaginär; ist aber $\tan 3\varphi$ imaginär, so ist es auch $\tan\varphi$ und die

beiden anderen Werte $\tan(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ und $\tan(\frac{1}{3}\pi + \varphi)$ sind komplex. Um dies zu beweisen, setzen wir $\varphi = \eta + \vartheta i$, dann ist

$$(7) \qquad \tan(3\eta + 3\vartheta i) = \frac{(e^{3\vartheta} + e^{-3\vartheta})\sin 3\eta + i(e^{3\vartheta} - e^{-3\vartheta})\cos 3\eta}{(e^{3\vartheta} + e^{-3\vartheta})\cos 3\eta - i(e^{3\vartheta} - e^{-3\vartheta})\sin 3\eta} = mi.$$

Die Homogeneität erfordert die Relation $3\eta = 0$, woraus folgt

$$\tan 3\varphi = \tan 3\vartheta i = \frac{(e^{3\vartheta} - e^{-3\vartheta})\,i}{(e^{3\vartheta} + e^{-3\vartheta})} = mi.$$

Dieser Fall erfordert die Ungleichung $m < 1$, damit ϑ reell bleibt. Ist dagegen $m > 1$, so wird der Homogeneität der Gleichung (7) genügt durch die Annahme $3\eta = \frac{3}{2}\pi$. Dann folgt weiter

$$\tan 3\varphi = \tan(\tfrac{3}{2}\pi + 3\vartheta i) = \frac{(e^{3\vartheta} + e^{-3\vartheta})\,i}{(e^{3\vartheta} - e^{-3\vartheta})} = mi.$$

Der Wert von ϑ ergiebt sich aus der Gleichung

$$e^{6\vartheta} = \frac{1+m}{1-m}, \text{ für } m < 1 \qquad \text{oder} \qquad e^{6\vartheta} = \frac{m+1}{m-1}, \text{ für } m > 1.$$

Es kann hieraus nun der reelle Wurzelwert gefunden werden, nämlich

$$y_1 = r\tan\varphi = \frac{\sqrt{-3D_3}}{2(a^2 - 3b)}\tan\vartheta i = \frac{-\sqrt{3D_3}}{2(a^2 - 3b)} \cdot \frac{e^{2\vartheta} - 1}{e^{2\vartheta} + 1}.$$

Die beiden komplexen Wurzeln sind:

$$y_2 \text{ und } y_3 = \mp \frac{\sqrt{-3D_3}}{2(a^2 - 3b)}\tan(\tfrac{1}{3}\pi \mp \vartheta i),$$

$$= -\frac{\sqrt{3D_3}}{2(a^2 - 3b)} \cdot \frac{(e^{2\vartheta} + 1)\left[(e^{4\vartheta} - 1) \mp e^{2\vartheta}\sqrt{3}\right]}{e^{6\vartheta} + 1}.$$

III. Gegeben sei die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Wir gehen dabei aus von der Relation

$$\tan 4\varphi = \frac{4\tan\varphi(1 - \tan\varphi^2)}{1 - 6\tan\varphi^2 + \tan\varphi^4}$$

oder

$$(8) \qquad \tan\varphi^4 + \frac{4}{\tan 4\varphi}\tan\varphi^3 - 6\tan\varphi^2 - \frac{4}{\tan 4\varphi}\tan\varphi + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist eine reziproke und hat folgende vier Wurzeln:

$$\tan\varphi, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cot\varphi,$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right).$$

Um die vorgelegte Gleichung auf die Form (8) zu reduzieren, bilde man die Variierte durch die Substitution $x = y + z$ und führe die Re-

duzente der Reziprozität ein, nämlich $\alpha^2\delta - \gamma^2 = 0$. Die Resolvente ist alsdann

$$(9)\quad (a^3 - 4ab + 8c)z^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)z^2 + (a^2c - 4bc + 8ad)z + (a^2d - c^2) = 0 \text{ (Mallet).}$$

Die transformierte reziproke Gleichung sei

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \gamma^2/\alpha^2 = 0.$$

Dieselbe läfst sich auch darstellen in der Eorm

$$(10)\qquad \left(y + \frac{\gamma/\alpha}{y}\right)^2 + \alpha\left(y + \frac{\gamma/\alpha}{y}\right) + \beta - 2\gamma/\alpha = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung bietet keine Schwierigkeit und führt zum Ziele, wenn es sich um eine algebraische Lösung der vorgelegten Gleichung handelt. Da aber eine goniometrische gewünscht wird, so ist die Gleichung (10) noch auf die Form (8) zu bringen. Die analoge Form derselben ist

$$\left(\tan\varphi - \frac{1}{\tan\varphi}\right)^2 + \frac{4}{\tan 4\varphi}\left(\tan\varphi - \frac{1}{\tan\varphi}\right) - 4 = 0,$$

oder wenn $\tan\varphi = u$ gesetzt wird,

$$(11)\qquad \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{4}{\tan 4\varphi}\left(u - \frac{1}{u}\right) - 4 = 0.$$

Man substituiere

$$(12)\qquad y + \frac{\gamma/\alpha}{y} = u - \frac{1}{u} + w,$$

woraus folgt

$$(13)\quad \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + (2w + \alpha)\left(u - \frac{1}{u}\right) + w^2 + \alpha w + \beta - 2\gamma/\alpha = 0.$$

Aus (11) und (12) ergiebt sich

$$2w + \alpha = 4 : \tan 4\varphi, \quad w^2 + \alpha w + \beta - 2\gamma/\alpha = -4.$$

Es ist also

$$w = -\tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha}(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) - 16}$$

und

$$(14)\qquad \tan 4\varphi = \frac{4}{2w + \alpha} = \pm\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{\alpha}(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) - 16}}.$$

Aus dieser Gleichung findet man φ oder u, aus (12) y und aus einem Wurzelwerte der Resolvente (9) endlich x.

1) Matthiessen: Grundzüge der antiken und modernen Algebra. S. 263 XXII.

Über Einhüllende von Kurven und Flächen.

Von E. Czuber in Wien.

O. Biermann hat jüngst[1]) das Problem der Einhüllenden unter dem Gesichtspunkte behandelt, dafs die Eingehüllten nicht, wie dies gewöhnlich vorausgesetzt wird, durch Gleichungen zwischen den Koordinaten und willkürlichen Konstanten gegeben, sondern dafs die Koordinaten ihrer Punkte durch Hilfsvariable (parametrisch) explizit ausgedrückt sind. Er macht hierbei durchgehends von dem Prinzip des letzten Schnittes Gebrauch. Dieses Verfahren macht es notwendig, nach Herstellung der die Einhüllende charakterisierenden Gleichungen die Berührung zwischen ihr und den Eingehüllten in jedem Falle besonders nachzuweisen.

Wir nehmen das Problem unter den gleichen analytischen Voraussetzungen von neuem auf und führen seine Lösung nach einer andern Methode durch, welche neben geometrischer Anschaulichkeit auch den Vorzug haben dürfte, dafs sie vermöge ihrer Gedankenführung die Berührung zwischen der Einhüllenden und den Eingehüllten unmittelbar erkennen läfst. Von singulären Punkten auf den letzteren wird dabei abgesehen, was hier von vorn herein bemerkt werden mag.

* * *

1. *Einfach-unendliches System ebener Kurven.*

α) Das System sei durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, a), \quad y = \psi(u, a) \tag{1}$$

dargestellt. Bei festem a bestimmen diese Gleichungen eine Kurve (a), bei festem u eine Kurve (u); die Systeme dieser Kurven mögen mit A, U bezeichnet werden. A sei das System, um dessen Einhüllende es sich handelt.

Durch das Wertepaar $u \mid a$ ist ein bestimmter Punkt M auf der Kurve (a) gegeben; durch ihn geht auch die Kurve (u). Kommt u

1) Festschrift der k. k. Technischen Hochschule in Brünn zur Feier ihres fünfzigjährigen Bestehens. Brünn, 1899.

allein in stetige Änderung, so bewegt sich M auf (a) und beginnt die Bewegung in der Richtung

$$\frac{d_u y}{d_u x} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}};$$

kommt a allein in stetige Änderung, so bewegt sich M auf (u) und beginnt die Bewegung in der Richtung

$$\frac{d_a y}{d_a x} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}.$$

Auf diese Weise gehören zu jedem Punkt der Kurve (a) zwei Bewegungsrichtungen. Jene Punkte, in welchen diese Bewegungsrichtungen zusammenfallen, sind Punkte der Einhüllenden. Die Bedingung für die Gleichheit der Richtungen, d. i.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, a)} = 0, \tag{2}$$

bestimmt nämlich die u jener Punkte auf (a), welche bei eintretender Änderung des a und der dadurch bedingten Transformation von (a) sich immer in Richtung der jeweiligen Tangente an (a) bewegen; diese Punkte beschreiben die Einhüllende, von der schon im Grunde dieses Gedankenganges zu erkennen ist, daſs sie die Kurven des Systems A in den gedachten Punkten berührt. Ihre Gleichungen ergeben sich durch Elimination von a aus (1) mit Hilfe von (2).

Die Elimination von u ergäbe die Einhüllende des Systems U, was aus der Deduktion unmittelbar zu entnehmen ist. Unter Umständen kann die Einhüllende von A eine spezielle Kurve des Systems U sein.

Beispiel. Das System A der Kreise, welche über den zur Achse einer Parabel (vom Halbparameter p) senkrechten Sehnen als Durchmessern beschrieben sind, kann durch die Gleichungen

$$x = a + \sqrt{2pa}\cos u, \qquad y = \sqrt{2pa}\sin u$$

dargestellt werden. Durch Elimination von a ergiebt sich hieraus die Gleichung

$$x = \operatorname{tg} u \cdot y + \frac{y^2}{2p \sin^2 u}$$

des Systems U, das also aus Parabeln besteht, welche durch den

Scheitel der zugrunde liegenden Parabel gehen und mit ihr gleiche Achsenrichtung haben.

Die Gleichung (2) der allgemeinen Entwicklung lautet hier

$$\cos u + \sqrt{\frac{p}{2a}} = 0,$$

und die Elimination von u und a zwischen ihr und dem obigen Gleichungspaar führt zu

$$y^2 = 2px + p^2.$$

Diese Parabel, welche Achse und Halbparameter mit der gegebenen gemein und ihren Scheitel zum Brennpunkt hat, hüllt sowohl die Kreise A wie auch die Parabeln U ein.

β) Der Fall, dafs das Kurvensystem durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = \varphi(u, a, b), \qquad y = \psi(u, a, b)$$

und die Parametergleichung

$$(2) \qquad \omega(a, b) = 0$$

gegeben ist, läfst sich analytisch leicht erledigen. An die Stelle der Gleichung (2) unter α) tritt jetzt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Ableitungen $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)$ unter dem Gesichtspunkte zu bilden sind, dafs b vermöge (2) von a abhängt, also

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\frac{\partial \omega}{\partial a}}{\frac{\partial \omega}{\partial b}}, \quad \text{etc.}$$

Dadurch geht obige Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial(\varphi, \omega)}{\partial(a, b)} & \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(a, b)} \end{vmatrix} = 0,$$

wofür auch

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial a} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \omega}{\partial b} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(\varphi, \psi, \omega)}{\partial(u, a, b)} = 0$$

geschrieben werden kann. Durch (1), (2) und (3) ist die Einhüllende bestimmt.

2. *Einfach-unendliches System von Raumkurven.* — Dasselbe sei durch

$$(1) \qquad x = \varphi(u, a), \qquad y = \psi(u, a), \qquad z = \chi(u, a)$$

gegeben; ein festes a charakterisiert eine Kurve (a) des Systems A; daneben giebt es Kurven (u), deren jede durch ein festes u gekennzeichnet ist — ihr System heiſse U.

Der Punkt $M(u\ a)$ auf (a) kommt bei bloſser Änderung des u auf dieser Kurve in Bewegung, die in der Richtung

$$d_u x : d_u y : d_u z = \frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \psi}{\partial u} : \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

der Tangente an (a) beginnt; derselbe Punkt kommt bei alleiniger Änderung des a in eine Bewegung, deren Anfangsrichtung

$$d_a x : d_a y : d_a z = \frac{\partial \varphi}{\partial a} : \frac{\partial \psi}{\partial a} : \frac{\partial \chi}{\partial a}$$

durch die Tangente an (u) bestimmt ist. Jene Punkte von (a), in welchen beide Richtungen zusammenfallen, die sich also, indem (a) das System A stetig durchläuft, jederzeit in Richtung der jeweiligen Tangente an (a) bewegen, beschreiben die Einhüllende dieses Systems. Da jedoch die Gleichheit der Richtungen das Verschwinden der zweizeiligen Determinanten der Matrix

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \chi}{\partial a} \end{Vmatrix},$$

also das gleichzeitige Bestehen einer überzähligen Anzahl von Gleichungen erfordert, so existiert eine Einhüllende nur dann, wenn diese Gleichungen sich auf eine reduzieren.

Die etwa vorhandene Einhüllende hüllt auch das System U ein, wenn sie nicht eine spezielle von den Kurven dieses Systems ist.

Beispiel. Das durch die Gleichungen

$$x = r(\cos a - u \sin a), \qquad y = r(\sin a + u \cos a), \qquad z = h(a + u),$$

in welchen r, h gegebene Konstanten bedeuten, dargestellte System A ist ein System von Geraden, das System U dagegen ein System transzendenter Raumkurven. Die zugehörige Matrix (2) lautet:

$$\begin{Vmatrix} -r \sin a & r \cos a & h \\ -r(\sin a + u \cos a) & r(\cos a - u \sin a) & h \end{Vmatrix};$$

zwei ihrer zweireihigen Determinanten verschwinden identisch, die dritte führt zu der Gleichung

$$u = 0;$$

mithin ist im vorliegenden Falle die Einhüllende von A eine spezielle U-Kurve, nämlich die Schraubenlinie

$$x = r\cos a, \qquad y = r\sin a, \qquad z = ha.$$

Die U-Kurven sind die Schnitte der Tangentenfläche dieser Schraubenlinie mit den Cylindern $x^2 + y^2 = r^2(1 + u^2)$.

3. *Einfach-unendliches Flächensystem.*

α) Dasselbe sei durch die Gleichungen

(1) $$x = \varphi(u, v, a), \qquad y = \psi(u, v, a), \qquad z = \chi(u, v, a)$$

gegeben.

Bei festem a und veränderlichen u, v bewegt sich der Punkt $M(u \mid v \mid a)$ auf einer Fläche (a) des in Betracht stehenden Systems A.

Bei festem u, v und veränderlichem a beschreibt er eine Kurve (w), deren Eigenschaft es ist, dafs sie alle Flächen des Systems A in Punkten einer festen Wertverbindung $u \mid v$ durchsetzt.

Wenn a allein sich ändert, so beginnt der Punkt M, sich auf der zugehörigen (w)-Kurve zu bewegen in der Anfangsrichtung

$$d_a x : d_a y : d_a z = \frac{\partial \varphi}{\partial a} : \frac{\partial \psi}{\partial a} : \frac{\partial \chi}{\partial a};$$

ändern sich u und v, während a festbleibt, so beginnt M sich in der Tangentialebene an (a) zu bewegen, deren Gleichung lautet:

$$\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)}(\xi - x) + \frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)}(\eta - y) + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(\zeta - z) = 0.$$

Soll jene Bewegungsrichtung in diese Tangentialebene fallen, so mufs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial \psi}{\partial a}\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial \chi}{\partial a}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = 0,$$

d. h.

(2) $$F(u, v, a) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \chi}{\partial a} \end{vmatrix} = 0$$

sein.

Fafst man in der Gleichung (2) a als konstant auf, so drückt sie eine Relation zwischen u, v aus, durch welche auf der Fläche (a) eine Kurve (c) bestimmt ist; jeder Punkt dieser Kurve beschreibt, wenn man

z. B. sein u festhält, bei der Variation von a und der dadurch hervorgerufenen Transformation von (a) eine Kurve (γ), welche die Eigenschaft besitzt, sämtliche Flächen des Systems A, und zwar in Punkten der zugeordneten (c)-Kurven — der *Charakteristiken* —, zu berühren. Der Ort der Kurven (γ) ist eine Fläche E, welche hiernach die Flächen des Systems A umhüllt; man erkennt aber auch, dafs E zugleich der Ort der Kurven (c) ist.

Die Charakteristiken (c), bestimmt durch die Gleichungen (1) und (2), wenn darin a als veränderlicher Parameter aufgefafst wird, können eine Einhüllende haben, welche dann ebenso wie das System der (c) auf der Einhüllenden E liegt und deren *Rückkehrkante* heifst.

Um zu dieser Kurve zu gelangen, hat man das Verfahren in 2. sinngemäfs auf den vorliegenden Fall anzuwenden.

Hiernach sind jene Punkte auf (c), welche die Einhüllende beschreiben, an die Gleichungen (1), (2) und an die Beziehungen

$$\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial \chi}{\partial a}\right)}$$

gebunden; die letzteren können auch in der Form

$$(3) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \chi}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = 0 \end{cases}$$

geschrieben werden. Durch die Klammern soll darauf hingewiesen sein, dafs man in (1) v mittels der Gleichung (2) als Funktion von u, a einzuführen hat. Hiernach ist

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}, \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right) = \frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial \chi}{\partial u} - \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}},$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\partial \psi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\frac{\partial F}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial v}}, \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial a}\right) = \frac{\partial \chi}{\partial a} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\partial \chi}{\partial a} - \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\frac{\partial F}{\partial a}}{\frac{\partial F}{\partial v}}.$$

Führt man mit diesen Ausdrücken die erste der Gleichungen (3) aus, so ergiebt sich nach entsprechender Reduktion:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(v, a)} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(a, u)} + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} = 0;$$

die beiden anderen ergeben bei ebensolcher Ausführung, wie man ohne weitere Rechnung erkennt:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(v,a)}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(a,u)}+\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(v,a)}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(a,u)}+\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}=0.$$

Diese drei Gleichungen fallen aber in eine zusammen, und als solche kann jede von ihnen genommen werden. Denn die Koeffizienten von $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial a}$ in der ersten sind die Adjunkten zu den Elementen der ersten Kolonne, die Koeffizienten in der zweiten und dritten Gleichung die Adjunkten zu den Elementen der zweiten und dritten Kolonne der Determinante in (2); da aber diese Determinante für die Punkte der (c) verschwindet, so stehen die Adjunkten aller drei Kolonnen in gleichem Verhältnis, und daher sind die letzten drei Gleichungen thatsächlich äquivalent.

Die Einhüllkurve der Charakteristiken, d. i. die Rückkehrkurve auf E, ist also durch das Gleichungssystem

$$x=\varphi(u,v,a),\ y=\psi(u,v,a),\ z=\chi(u,v,a),$$

$$F(u,v,a)\equiv\frac{\partial(\varphi,\psi,\chi)}{\partial(u,v,a)}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(v,a)}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(a,u)}+\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}=0$$

bestimmt. Um sie in einer der üblichen Formeln darzustellen, kann man entweder u, v, a aus den drei ersten Gleichungen ausdrücken und in die zwei letzten substituieren, oder u, v aus den zwei letzten bestimmen und in die drei ersten einsetzen.

Die letzte der obigen Gleichungen kann auch in der Gestalt

$$\text{(4)}\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \chi}{\partial a} \end{vmatrix}=0$$

geschrieben werden.

β) Ist das Flächensystem durch die Gleichungen

$$\text{(1)}\qquad x=\varphi(u,v,a,b),\qquad y=\psi(u,v,a,b),\qquad z=\chi(u,v,a,b)$$

und durch die Parametergleichung

$$\text{(2)}\qquad \omega(a,b)=0$$

gegeben, so erfährt die analytische Durchführung gegenüber dem vorliegenden Falle folgende Abänderungen.

Die Elemente der dritten Zeile in der Determinante der dortigen Gleichung (2) sind zu ersetzen durch

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}-\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}},\quad \frac{\partial\psi}{\partial a}-\frac{\partial\psi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}},\quad \frac{\partial\chi}{\partial a}-\frac{\partial\chi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}};$$

dadurch verwandelt sich diese Gleichung in

$$F(u,v,a,b)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\\ \frac{\partial(\varphi,\omega)}{\partial(a,b)} & \frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(a,b)} & \frac{\partial(\chi,\omega)}{\partial(a,b)}\end{vmatrix}=0;$$

die Entwicklung vorstehender Determinante nach den Elementen der letzten Zeile kann aber auch als Entwicklung der vierzeiligen Determinante

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} & 0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & 0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial a} & \frac{\partial\psi}{\partial a} & \frac{\partial\chi}{\partial a} & \frac{\partial\omega}{\partial a}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial b} & \frac{\partial\psi}{\partial b} & \frac{\partial\chi}{\partial b} & \frac{\partial\omega}{\partial b}\end{vmatrix}$$

nach den Unterdeterminanten der zwei ersten Zeilen aufgefafst werden; schliefslich darf man auch setzen:

$$F(u,v,a,b)=\frac{\partial(\varphi,\psi,\chi,\omega)}{\partial(u,v,a,b)}=0. \tag{3}$$

In gleicher Weise kommt an die Stelle der Elemente der letzten Zeile in der Determinante der Gleichung (4) zu stehen

$$\frac{\partial F}{\partial a}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}},\quad \frac{\partial\psi}{\partial a}-\frac{\partial\psi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}},\quad \frac{\partial\chi}{\partial a}-\frac{\partial\chi}{\partial b}\frac{\frac{\partial\omega}{\partial a}}{\frac{\partial\omega}{\partial b}};$$

damit geht aber die genannte Gleichung über in

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\\ \frac{\partial(F,\omega)}{\partial(a,b)} & \frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(a,b)} & \frac{\partial(\chi,\omega)}{\partial(a,b)}\end{vmatrix}=0,$$

wofür aus ähnlichen Gründen wie vorhin geschrieben werden kann

$$(4) \qquad \frac{\partial(F, \psi, \chi, \omega)}{\partial(u, v, a, b)} = 0.$$

Das Resultat lautet dahin, dafs nunmehr die Einhüllende E des Flächensystems durch die Gleichungen (1), (2), (3), die auf ihr etwa auftretende Rückkehrkurve durch die Gleichungen (1), (2), (3), (4) bestimmt ist.

4. *Zweifach-unendliches Flächensystem.* — Dasselbe sei durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v, a, b), \qquad y = \psi(u, v, a, b), \qquad z = \chi(u, v, a, b)$$

gegeben. Bei festem a und b und veränderlichem u, v erhält man eine Fläche (a, b) des Systems. Der Punkt $M\ (u|v)$ dieser Fläche kommt durch alleinige stetige Änderung von a und die dadurch bedingte Transformation von (a, b) in eine Bewegung, deren Anfangsrichtung durch

$$d_a x : d_a y : d_a z = \frac{\partial \varphi}{\partial a} : \frac{\partial \psi}{\partial a} : \frac{\partial \chi}{\partial a}$$

bestimmt ist; bei alleiniger Variation von b beginnt er sich in der Richtung

$$d_b x : d_b y : d_b z = \frac{\partial \varphi}{\partial b} : \frac{\partial \psi}{\partial b} : \frac{\partial \chi}{\partial b}$$

zu bewegen. Diese Richtungen fallen in die Tangentialebene

$$\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)}(\xi - x) + \frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)}(\eta - y) + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(\zeta - z) = 0$$

an (a, b) in M, wenn einerseits

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial \psi}{\partial a}\frac{\partial(\chi, \varphi)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial \chi}{\partial a}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = 0,$$

d. i.

$$(2) \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, a)} = 0,$$

und wenn andererseits

$$(3) \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, b)} = 0$$

ist.

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen eine Kurve auf (a, b), und eine zweite Kurve auf dieser Fläche ist durch (1) und (3) bestimmt; die Schnittpunkte beider Kurven besitzen die Eigenschaft, dass für sie die beiden besprochenen Bewegungsrichtungen in die Tangentialebene fallen; der Ort dieser zweifach-unendlichen Punktmannigfaltigkeit ist eine das System der Flächen (a, b) umhüllende Fläche E.

Man kann diese Fläche auch durch Bewegung gewisser Kurven erzeugt denken, wie folgt: Eliminiert man zwischen (1), (2), (3) v, b, so entstehen Gleichungen

$$x = \Phi_1(u, a), \qquad y = \Psi_1(u, a), \qquad z = X_1(u, a),$$

welche bei festem a eine Kurve, bei veränderlichem a auch gleich die von ihr beschriebene Fläche darstellen. Eliminiert man v, a, so ergeben sich Gleichungen

$$x = \Phi_2(u, b), \qquad y = \Psi_2(u, b), \qquad z = X_2(u, b),$$

die bei festem b eine Kurve und bei variablem b auch schon die von ihr beschriebene Fläche bestimmen. Diese beiden Gleichungssysteme sind aber äquivalent dem einen System (1), (2), (3) und stellen eine und dieselbe Fläche, d. i. E, dar.

Um die Einhüllende in einer der üblichen analytischen Darstellungsformen zu erhalten, hat man entweder zwischen (1), (2), (3) u, v, a, b oder aus (1) a, b mit Hilfe von (2) und (3) zu eliminieren.

Wien, den 24. Januar 1901.

Démonstration d'un théorème de Legendre;

Par M. P. Mansion à Gand.

La célèbre relation de Legendre entre les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce:

$$(1)\qquad \frac{\pi}{2} = KE' + K'E - KK',$$

s'établit aisément, d'une manière élémentaire, par un procédé dû à Tortolini, dans le cas où le carré k^2 du module et son complément $k'^2 = 1 - k^2$ sont compris entre zéro et l'unité. On détermine l'aire du huitième de la sphère de rayon égal à l'unité et ayant pour coordonnées:

$$x = \sin\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi},\ y = \sin\psi\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi},\ z = \cos\varphi\cos\psi,$$

au moyen de l'intégrale double habituelle

$$\int\int\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy,$$

et on introduit dans celle-ci les variables φ et ψ. On obtient ainsi sans peine la formule (1).

Voici une autre démonstration, artificielle il est vrai, mais encore assez simple et qui s'applique même au cas où le module est quelconque. Elle est peut-être nouvelle, au moins en partie.

On trouve facilement, en partant de la définition classique de la fonction Zu de Jacobi, la formule suivante où $u = Ui$ et où le module k n'est pas écrit dans $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$:

$$(2)\qquad Z(u, k) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - iZ(U, k') + u\left(1 - \frac{E}{K} - \frac{E'}{K'}\right).$$

D'autre part, on démontre, par l'intermédiaire des fonctions thêta, que l'on a

$$(3)\qquad Z(u + K'i, k) - Z(u, k) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} - \frac{\pi i}{2K}.$$

En ajoutant (2) et (3), il vient, après quelques réductions,

$$(4)\ Z(u + K'i, k) = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} - iZ(U, k') + u\left(1 - \frac{E}{K} - \frac{E'}{K'}\right) - \frac{\pi i}{2K}.$$

Faisons $u = -K'i$, ou $U = -K'$. Pour ces valeurs,

$$Z(u + K'i, k) = 0,\ \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} = 0,\ Z(U, k') = 0.$$

Donc $0 = -K'i\left(1 - \frac{E}{K} - \frac{E'}{K'}\right) - \frac{\pi i}{2K}$, c'est-à-dire, après transformation,

$$\frac{\pi}{2} = KE' + K'E - KK'.$$

Quant à la formule (4), elle devient

$$Z(u + K'i, k) = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} - iZ(U, k') - \frac{\pi}{2KK'}(u + K'i).$$

Gand, le 15 janvier 1901.

Analytische Ableitung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte.

Von R. Lehmann-Filhés in Berlin.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist auf verschiedenem Wege analytisch abgeleitet worden, z. B. von Laplace (Méc. cél. Livre I, Chap. I) und Poisson (Traité de mécanique, 2ème éd. p. 43 ff.). Für Unterrichts- und Vortragszwecke erscheint es jedoch erwünscht, eine derartige Herleitung in noch elementarerer Form geben zu können, was im folgenden versucht werden soll.

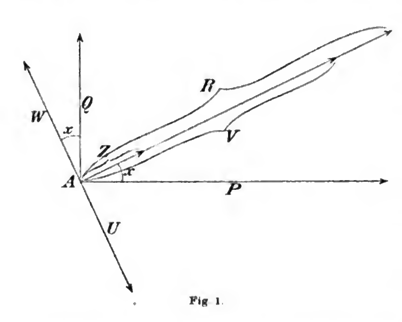


Fig. 1.

Es mögen zwei auf einander senkrecht stehende Kräfte P und Q auf den Punkt A wirken.

Wir nehmen als Grundsatz an, dafs die beiden Kräfte eine in derselben Ebene liegende Resultante R haben, deren Richtung zwischen diejenigen der Kräfte fällt, und dafs der Winkel x, den R mit P bildet, nur von dem Verhältnis $\frac{P}{Q}$ abhängt. Ferner nehmen wir an, dafs die Verhältnisse $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ nicht von der absoluten Gröfse der Kräfte, sondern nur von ihrem Verhältnisse $\frac{P}{Q}$, mithin von x abhängen.

Wir können demnach setzen

$$(1) \qquad \frac{P}{R} = f(x), \qquad \frac{Q}{R} = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

da ja R mit Q den Winkel $\frac{\pi}{2} - x$ bildet.

Wir denken uns nun (vgl. Fig. 1) P und Q in je zwei Kräfte U und V, resp. W und Z zerlegt, und zwar sollen U und W senkrecht

zur Resultante R stehen, V und Z in die Richtung derselben fallen. Da P und V, sowie Q und W den Winkel x mit einander bilden, so hat man analog (1):

$$(2)\quad \frac{U}{P} = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \frac{V}{P} = f(x), \quad \frac{W}{Q} = f(x), \quad \frac{Z}{Q} = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Multipliziert man die Gleichungen (1) resp. mit der ersten und dritten Gleichung (2), so ergiebt sich:

$$\frac{U}{R} = f(x) \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \frac{W}{R} = f(x) \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Demnach sind U und W gleich, und da sie den Punkt A in entgegengesetzter Richtung angreifen, so heben sie sich gegenseitig auf. Es bleiben also nur noch die Komponenten V und Z übrig, welche ebenso wie R die gegebenen Kräfte ersetzen. Da sie in der Richtung von R wirken, so ist

$$(3)\qquad R = V + Z.$$

Aber aus (1) und (2) folgt

$$\frac{V}{P} = \frac{P}{R}, \quad \frac{Z}{Q} = \frac{Q}{R}, \qquad \text{d. h.} \qquad V = \frac{P^2}{R}, \quad Z = \frac{Q^2}{R}.$$

Setzt man dies in (3) ein, so erhält man

$$(4)\qquad R^2 = P^2 + Q^2, \qquad R = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

d. h. die Resultante der senkrecht zu einander wirkenden Kräfte ist der *Gröfse* nach gleich der Diagonale des aus den Seiten P und Q konstruierten Rechtecks.

Diese Ableitung ist im wesentlichen schon von Laplace gegeben.

Bei der Aufgabe, den Winkel x zu finden, welchen die Resultante R mit der Kraft P bildet, werden wir ein von dem Laplaceschen gänzlich verschiedenes Verfahren anwenden.

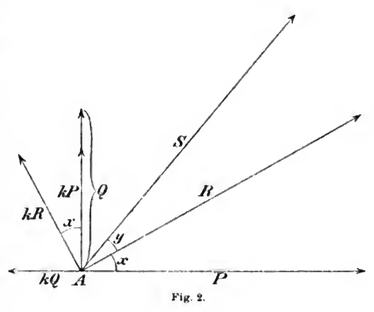


Fig. 2.

Wir lassen nämlich (vgl. Fig. 2) auf den Angriffspunkt A der Kräfte P und Q noch 2 neue Kräfte wirken, deren erste kQ, der Kraft P entgegengesetzt ist (falls k positiv ist), und deren zweite, kP, in dieselbe

Richtung fällt wie Q. Ist k negativ, ein Fall, der übrigens hier nicht besonders betrachtet zu werden braucht, so erhalten beide Zusatzkräfte entgegengesetzte Richtung. Der Gröfse nach ist k völlig willkürlich. Die Resultante der beiden Zusatzkräfte ist nach (4) gleich $\sqrt{k^2 P^2 + k^2 Q^2} = kR$; sie bildet mit kP, d. h. mit der Richtung der Kraft Q, den Winkel x, da die Zusatzkräfte kP und kQ zu einander dasselbe Verhältnis haben wie P und Q. Demnach steht die Resultante kR senkrecht auf der Resultante R. Die Gesamtresultante S aller 4 Kräfte ist nichts anderes als die Resultante von R und kR; dieselbe bilde mit R den Winkel y.

Die Resultantenwinkel x und y sind Funktionen der Verhältnisse der jedesmal zusammengesetzten zwei Kräfte, was wir folgendermafsen ausdrücken können:

$$(5) \qquad x = \psi\left(\frac{Q}{P}\right), \qquad y = \psi\left(\frac{kR}{R}\right) = \psi(k).$$

Wir können nun aber (vgl. Fig. 3) die Gesamtresultante S auch dadurch erhalten, dafs wir zunächst die 4 Kräfte P, Q, kP und kQ zu zwei rechtwinklig aufeinander stehenden Kräften

$$P - kQ \text{ und } Q + kP$$

vereinigen und alsdann die Resultante S dieser beiden Komponenten herstellen. Mit der ersten Kraft, d. h. mit der Richtung von P, bildet, wie aus dem Früheren folgt, S den Winkel $x + y$, sodafs wir nach Analogie von (5) haben:

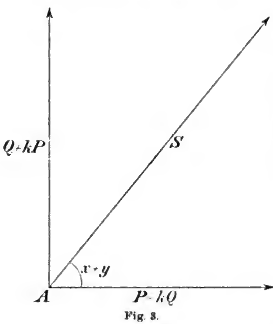


Fig. 3.

$$(6) \qquad x + y = \psi\left(\frac{Q + kP}{P - kQ}\right) = \psi\left(\frac{\frac{Q}{P} + k}{1 - \frac{Q}{P}k}\right).$$

Die Gröfsen $\frac{Q}{P}$ und k haben eine einfache geometrische Bedeutung: Konstruiert man das Rechteck mit den Seiten P und Q, so bildet die Diagonale mit P einen Winkel α, für welchen wir haben

$$(7) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}.$$

In dem Rechteck mit den Seiten R und kR bildet die Diagonale mit R den Winkel β, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$(8) \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{kR}{R} = k.$$

Setzt man (7) und (8) in (5) und (6) ein, so erhält man

$$x = \psi(\operatorname{tg}\alpha), \quad y = \psi(\operatorname{tg}\beta), \quad x + y = \psi\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}\right) = \psi(\operatorname{tg}(\alpha + \beta)),$$

oder wenn wir $\varphi(\alpha)$ an Stelle von $\psi(\operatorname{tg}\alpha)$ schreiben,

$$x = \varphi(\alpha), \qquad y = \varphi(\beta), \qquad x + y = \varphi(\alpha + \beta), \tag{9}$$

d. h.

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \beta). \tag{10}$$

Aus dieser Funktionalgleichung[1]) ist nun die unbekannte Funktion $\varphi(\alpha)$ in ganz elementarer Weise bestimmbar. (Vergl. Cauchy: Analyse algébrique, Paris 1821, p. 104.) Zunächst folgt aus (10):

$$\varphi(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) + \ldots,$$

also, wenn man die m Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ alle gleich ξ setzt,

$$\varphi(m\xi) = m\varphi(\xi). \tag{11}$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur für ein ganzzahliges positives m.

Wir wollen jetzt unter m und n ganze positive Zahlen verstehen und setzen $\eta = \frac{m}{n}\xi$, d. h. $n\eta = m\xi$. Aus (11) folgt dann

$$\varphi(n\eta) = m\varphi(\xi). \tag{12}$$

Aber nach (11) ist $\varphi(n\eta) = n\varphi(\eta)$, wodurch (12) wird

$$n\varphi(\eta) = m\varphi(\xi), \quad \text{d. h.} \quad \varphi\left(\frac{m}{n}\xi\right) = \frac{m}{n}\varphi(\xi).$$

Hieraus ist leicht zu erkennen, dafs für einen *beliebigen* rationalen positiven Wert von μ die Gleichung gilt

$$\varphi(\mu\xi) = \mu\varphi(\xi),$$

welche unter der Annahme der Stetigkeit von $\varphi(\xi)$ auch auf irrationale μ ausgedehnt werden kann.

Hiernach für $\xi = 1$:

$$\varphi(\mu) = \mu\varphi(1). \tag{13}$$

Nähert sich μ der Grenze 0, so wird $\varphi(0) = 0$. In (10) setzen wir jetzt $\alpha = +\mu$, $\beta = -\mu$; dann wird

$$\varphi(\mu) + \varphi(-\mu) = \varphi(0) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varphi(-\mu) = -\varphi(\mu),$$

also nach (13)

$$\varphi(-\mu) = -\mu\varphi(1). \tag{14}$$

1) Zu einer Funktionalgleichung derselben Form gelangt — wenn auch in völlig anderem Zusammenhange und bei anderer Bedeutung der Variablen — Herr Darboux in seiner dem Cours de mécanique von Despeyrous angehängten Note I: Sur la composition des forces en statique.

Wir haben also nach (13) und (14) für positive und negative Werte von α

$$\varphi(\alpha) = \alpha\varphi(1),$$

oder, wenn man $\varphi(1) = a$ setzt,

$$\varphi(\alpha) = a\alpha. \tag{15}$$

Nach (9) und (15) hat man demnach $x = a\alpha$. Da nun aber für ein verschwindendes P die Resultante R ganz in die Richtung von Q fällt, also senkrecht zur P-Richtung steht, und da in diesem Falle auch die Diagonale des aus P und Q gebildeten Rechtecks mit Q zusammenfällt, so müssen x und α gleichzeitig $\frac{\pi}{2}$ werden, woraus $a = 1$ folgt. Demnach haben wir

$$x = \alpha. \tag{16}$$

Die Gleichungen (4) und (16) zeigen, dafs die Resultante zweier senkrecht zu einander wirkenden Kräfte P und Q nach Gröfse und Richtung mit der vom Angriffspunkte aus gezogenen Diagonale des Rechtecks mit den Seiten P und Q zusammenfällt.

Aus diesem Satze folgt die Zusammensetzung von Kräften, welche nicht senkrecht zu einander wirken, in bekannter Weise.[1])

Berlin, 15. Oktober 1898.

---

1) Indem wir die durch den Herrn Verfasser in möglichst elementare Form gebrachte Herleitung hier veröffentlichen, wollen wir nicht unterlassen, auf die gründlichen Untersuchungen hinzuweisen, die Herr Siacci in Napoli Rend. (2) **5** über die bei diesen Herleitungen zugrunde liegenden Hypothesen veröffentlicht hat. Dort findet sich auch die Angabe, dafs der Grundgedanke des gewöhnlich auf Poisson zurückgeführten Beweises bei d'Alembert zu finden ist (Mémoire sur les principes de la mécanique. Hist. de l'Ac. 1769). Red.

Über einen Steinerschen Satz und dessen Beziehungen zur Konfiguration zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder.

Von Emil Müller in Königsberg i. Pr.

Beim Lesen des 1896 von J. H. Graf herausgegebenen interessanten Briefwechsels zwischen J. Steiner und L. Schläfli fand ich in dem Briefe Steiners vom 22. April 1856 auf S. 203 den folgenden Satz ohne Beweis ausgesprochen[1]):

„Zieht man in einer Fläche 2. O. F^2 irgend drei Sehnen aa', bb', cc', welche ein Paar reziproke Geraden M, N schneiden, so gehen die vier Ebenen abc, $ab'c'$, $ba'c'$, $ca'b'$ durch einen Punkt d, sowie die vier Ebenen $a'b'c'$, $a'bc$, $b'ac$, $c'ab$ durch einen Punkt d', beide Punkte liegen in der Fläche F^2, und die Sehne dd' schneidet M und N",

den Steiner selbst als einen „schönen" bezeichnet, der aber wenig bekannt zu sein scheint. Meine Vermutung, daſs er mit der Konfiguration zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder in nahem Zusammenhange stehe, bestätigte sich bei näherer Untersuchung. Es ergaben sich hierbei, auſser dem Beweise des Steinerschen Satzes, einige Eigenschaften dieser Konfiguration, insbesondere für den Fall, daſs sie einer Fläche 2. O. ein- oder einer Fläche 2. Kl. umbeschrieben ist, die, wie ich hinterher fand, zum gröſsten Teile bekannt sind[2]), deren ganz elementare Ableitung aber von einigem Interesse sein dürfte. Mittels bekannter Abbildungsmethoden ergaben sich daraus zwei mir neu scheinende ebene Kreiskonfigurationen. Eine kurze zusammenhängende Darlegung dieser Dinge ist die Aufgabe der folgenden Zeilen.

Ich gehe von dem bekannten Fundamentalsatze aus, daſs die drei Gegenseitenpaare eines ebenen vollständigen Vierecks jede Gerade seiner

1) Die Bezeichnung ist gegen das Original ein wenig geändert.

2) Vgl. R. Sturm: „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung" I. T. Nr. 49, 50. Leipzig 1892.

Ebene in Punktepaaren einer Involution[1]) schneiden, den ich aber in einer etwas geänderten Form ausspreche:

1. *Jede Gerade G in der Ebene eines Dreiecks abc wird von dessen Seiten und von den Verbindungslinien ihrer Gegenecken mit irgend einem Punkte d' derselben Ebene in Punktepaaren einer Involution geschnitten.*

Wie unmittelbar zu sehen, gilt davon auch die Umkehrung:

2. *Bezeichnen α, β, γ die Schnittpunkte der Seiten $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ eines Dreiecks abc mit einer Geraden G seiner Ebene und α', β', γ' Punkte auf G, die α, β, γ in einer Involution entsprechen, so gehen die Geraden $[a\alpha']$, $[b\beta']$, $[c\gamma']$ durch einen Punkt.*

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt unmittelbar:

3. *Werden in zwei Ebenen mit der Schnittlinie G die Dreiecke abc und $a'b'c'$ so angenommen, dafs, wenn α, β, γ und α', β', γ' die bezüglichen Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit G bezeichnen, $[\alpha a']$, $[\beta b']$, $[\gamma c']$ durch einen Punkt d gehen, so gehen auch $[\alpha' a]$, $[\beta' b]$, $[\gamma' c]$ durch einen Punkt d'.*

Denn zufolge der Annahme sind nach Satz 1. $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ Punktepaare einer Involution, es gehen daher nach Satz 2. die Geraden $[\alpha' a]$, $[\beta' b]$, $[\gamma' c]$ durch einen Punkt.

Dies ist der Beweis, den Möbius für die Existenz zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder oder, wie ich kürzer sagen will, zweier *doppelt umschriebenen Tetraeder* am Schlusse seiner Abhandlung: „Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden etc." im J. f. Math. **3**, 273—276, 1828[2]) andeutet, und den Cayley im J. f. Math. **34**, 1847[3]) ausgeführt hat. $abcd$ ist das eine, $a'b'c'd'$ das andere Tetraeder.

Nennt man Gegenecken zweier doppelt umschriebenen Tetraeder jede Ecke des einen und die in seiner gegenüberliegenden Fläche liegende Ecke des andern, so sind aa', bb', cc', dd' Gegeneckenpaare.

Dem Steinerschen Satze liegt der folgende, leicht beweisbare Satz zugrunde:

4. *Werden die drei nicht in einer Ebene liegenden Strecken aa', bb', cc' von zwei Geraden M und N harmonisch geteilt, so gehen die Ebenen $[abc]$, $[ab'c']$, $[a'bc']$, $[a'b'c]$ durch einen Punkt d' und die Ebenen $[a'b'c']$, $[a'bc]$, $[ab'c]$, $[abc']$ durch einen Punkt d.*

Da nämlich a und a', b und b', c und c' entsprechende Punkte der

1) Unter einer „Involution" soll hier stets eine „quadratische Involution" verstanden werden.

2) Ges. Werke Bd. I S. 441—446.

3) Math. Papers I Nr. 55.

durch M und N bestimmten windschiefen Involution[1]) sind, so müssen die beiden einander entsprechenden Ebenen $[abc]$ und $[a'b'c']$ sich in einer selbstentsprechenden Geraden G schneiden. Bezeichnet man mit m und n die Punkte, in denen G die Geraden M und N trifft, so werden die auf G liegenden Paare einander in der windschiefen Involution entsprechender Punkte von mn harmonisch getrennt, bilden also eine Punktinvolution. Solche Punktepaare sind aber die Schnittpunkte α, β, γ und α', β', γ' der Dreiecke abc und $a'b'c'$ mit G. Nach Satz 2 gehen dann die Geraden $[a\alpha']$, $[b\beta']$, $[c\gamma']$ durch einen Punkt d' und die Geraden $[a'\alpha]$, $[b'\beta]$, $[c'\gamma]$ durch einen Punkt d. In d und d' schneiden sich mithin die im Satze angegebenen Ebenen.

Nach dem bei Satz 3. Erwähnten sind aa', bb', cc', dd' Gegeneckenpaare zweier doppelt umschriebenen Tetraeder. Man kann also auch folgenden Satz aussprechen:

Drei Paare in einer windschiefen Involution einander entsprechender Punkte sind Gegeneckenpaare zweier doppelt umschriebenen Tetraeder. Das vierte Gegeneckenpaar ist dadurch eindeutig bestimmt und linear konstruierbar.

Insbesondere bilden drei Punkte und die durch Spiegelung an einer Geraden daraus hervorgehenden drei Gegeneckenpaare zweier solcher Tetraeder.

Von Satz 4. gilt auch die Umkehrung:

5. *Liegen die Punktepaare aa', bb', cc' derart, dafs die Ebenen $[abc]$, $[ab'c']$, $[a'bc']$, $[a'b'c]$ durch denselben Punkt gehen, so sind sie entsprechende Punktepaare einer windschiefen Involution.*

Denn haben $G = [abc \cdot a'b'c']$, α, β, γ, α', β', γ' dieselbe Bedeutung wie früher, und bezeichnet man den Schnittpunkt der im Satze auftretenden Ebenen mit d', so gehen durch ihn die Geraden $[a\alpha']$, $[b\beta']$, $[c\gamma']$. Zufolge Satz 1 sind $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ Punktepaare einer Involution, deren Doppelpunkte m und n heifsen mögen. Legt man nun durch m bezw. n die $[aa']$ und $[bb']$ schneidenden Geraden M bezw. N, so schneiden die vier Geraden $[ab]$, M, $[a'b']$, N auf jeder der drei Geraden $[mn] = G$, $[aa']$ und $[bb']$ vier Punkte von demselben Doppelverhältnis aus. Das Doppelverhältnis auf G (γ, m, γ', n) ist aber harmonisch, es müssen mithin alle harmonisch sein, d. h. a und a', sowie b und b' werden von M und N harmonisch getrennt oder sind entsprechende Punkte in der durch M und N bestimmten windschiefen Involution. Da jedoch α und α', β und β' entsprechende Punkte

1) So soll mit R. Sturm („Liniengeometrie" I. T. p. 70) eine geschart-involutorische Kollineation genannt werden.

dieser Involution sind, so mufs dem Punkte c, als Schnittpunkt von $[b\alpha]$ mit $[a\beta]$, der Schnittpunkt von $[b'\alpha']$ mit $[a'\beta']$, d. i. der Punkt c' entsprechen, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Er kann offenbar auch in folgender Form ausgesprochen werden:

6. *Die Gegenecken zweier doppelt umschriebenen Tetraeder sind stets entsprechende Punkte in einer windschiefen Involution.*[1])

Die Sätze 4 und 5 kann man auch in den einen zusammenfassen:

7. *Damit die Punktepaare aa', bb', cc' einander in einer windschiefen Involution entsprechen, ist notwendig und hinreichend, dafs die vier Ebenen $[abc]$, $[ab'c']$, $[a'bc']$, $[a'b'c]$ durch einen Punkt gehen, oder dafs sie Gegenecken zweier doppelt umschriebenen Tetraeder sind.*

Seien jetzt wieder, wie beim Satze 1, $abcd'$ ein vollständiges Viereck und $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ die durch dasselbe auf einer beliebigen Geraden G seiner Ebene bestimmten Punktepaare einer Involution; dann schneiden bekanntlich die dem Viereck umschriebenen Kurven 2. O. auf G Punktepaare derselben Involution aus. Umgekehrt läfst sich leicht zeigen:

8. *Jede Kurve 2. O. K, die a, b, c und ein Punktepaar $\varkappa\varkappa'$ der von dem Viereck $abcd'$ auf G bestimmten Involution enthält, geht auch durch d'.*

Die Involution auf G ist nämlich durch $\varkappa\varkappa'$ und etwa $\alpha\alpha'$ bestimmt. Angenommen nun, K schnitte $[a\alpha']$ in d_1', so müssten $[bd_1']$ und $[cd_1']$ G in denjenigen Punkten, welche β und γ in obiger Involution entsprechen, also in β' und γ', treffen, d. h. d_1' fällt mit d' zusammen.

Aus dem Satze 8. und der ihm vorausgehenden Bemerkung schliefst man unmittelbar auf die Richtigkeit des folgenden Satzes:

9. *Seien wie im Satze 3. die beiden Punktgruppen $abcd$ und $a'b'c'd'$ gegeben, und legt man durch $abcd'$ irgend einen Kegelschnitt, so giebt es immer einen Kegelschnitt durch $a'b'c'd$, der G in denselben Punkten trifft wie der durch $abcd'$ gelegte.*

Nimmt man nun, was immer möglich ist, die 7 Punkte a, b, c, d, a', b', c' auf einer beliebigen Fläche 2. O. F^2 an, die auch eine *Kegelfläche* sein darf, und wählt als Kegelschnitt durch a', b', c', d den Schnitt der Ebene $[a'b'c']$ mit F^2, so liegt der zugehörige Kegelschnitt durch a, b, c, d' ebenfalls auf F^2, da er mit ihr die Punkte a, b, c und die beiden auf $G = [abc \cdot a'b'c']$ liegenden Schnittpunkte gemeinsam hat. Punkt d' liegt mithin auch auf F^2. Da in dieser Konfiguration kein Punkt ausgezeichnet ist, so kann man das Ergebnis folgendermafsen aussprechen:

---

1) Auf andere Art ist der Satz bewiesen bei R. Sturm a. a. O. p. 69.

10. *Die Eckpunkte zweier doppelt umschriebenen Tetraeder besitzen die Eigenschaft, dafs jede Fläche 2. O., welche durch 7 der Punkte geht, auch durch den achten geht; sie bilden also die Grundpunkte eines Bündels von Flächen 2. O.*

Der duale Satz lautet dann:

10′. *Die Flächen zweier doppelt umschriebenen Tetraeder besitzen die Eigenschaft, dafs jede Fläche 2. Kl., welche sieben der Ebenen berührt, auch die achte berührt; sie bilden also die Grundebenen einer Scharschar von Flächen 2. Kl.*[1]

Diese beiden Sätze können auch in der folgenden, später zur Verwendung kommenden Form ausgesprochen werden:

11. *Legt man auf einer Fläche 2. O. (insbesondere auch einer Kegelfläche) durch einen Punkt 4 Kegelschnitte, so schneiden sie sich in 6 Punkten, von denen vier mal je drei in neuen Ebenen liegen. Die Schnitte dieser Ebenen mit der Fläche gehen dann durch denselben Punkt.*

11′. *Legt man an eine Fläche 2. Kl. (insbesondere an eine Kurve 2. Kl.) durch eine Tangentialebene 4 Tangentialkegel, so haben sie 6 weitere gemeinschaftliche Tangentialebenen, von denen vier mal je drei durch neue Punkte gehen. Die Tangentialkegel aus diesen Punkten an die Fläche (Kurve) berühren dieselbe Ebene.*

Mit Hilfe des Satzes 8. läfst sich der eingangs angeführte Steinersche Satz beweisen. Nimmt man nämlich die Geraden M und N als reziproke Polaren einer F^2 an, die keine Kegelfläche sein darf, und wählt auf dieser die Punktepaare aa', bb', cc' derart, dafs ihre Verbindungslinien M und N schneiden, so entsprechen diese Punktepaare einander in der durch M und N bestimmten windschiefen Involution. Nach Satz 4. schneiden sich dann die beiden Gruppen von 4 Ebenen in den Punkten d und d'. Es ist nur noch zu beweisen, dafs diese beiden Punkte auf F^2 liegen. Das folgt aber aus dem Hilfssatze 8. Denn die in den Ebenen $[abc]$ und $[a'b'c']$ liegenden Kegelschnitte von F^2 treffen $G = [abc.\ a'b'c']$ in denselben zwei Punkten, die in der windschiefen Involution einander entsprechen; daher liegt d' auf dem Kegelschnitt $[abc]$ und d auf dem Kegelschnitt $[a'b'c']$ von F^2. Damit ist der Steinersche Satz bewiesen.

Eine durch zwei reziproke Polaren einer allgemeinen F^2 bestimmte windschiefe Involution transformiert F^2 in sich selbst. Die eben betrachtete Involution transformiert zugleich die beiden doppelt um-

---

1) Vgl. R. Sturm a. a. O. p. 66.

schriebenen und der F^2 eingeschriebenen Tetraeder $abcd$ und $a'b'c'd'$ in einander. Es soll nun untersucht werden, ob es zu zwei doppelt umschriebenen Tetraedern immer eine die Fläche in sich selbst transformierende windschiefe Involution giebt, in der die Gegenecken der beiden Tetraeder einander entsprechen. Vorerst erkennt man:

12. *Eine F^2 in sich selbst transformierende windschiefe Involution ist durch zwei Paare entsprechender Punkte aa' und bb' auf F^2 eindeutig bestimmt.*

Da nämlich die Achsen einer solchen Involution reziproke Polaren bezüglich F^2 sind und die Geraden $[aa']$, $[bb']$ schneiden, so müssen sie auch deren Polaren schneiden. Sucht man nun dasjenige Geradenpaar M, N, das $[aa']$, $[bb']$ und deren Polaren schneidet, so sind es zwei reziproke Polaren von F^2; denn da M die Geraden $[aa']$, $[bb']$ und deren Polaren schneidet, so mufs die Polare von M dieselben Geraden schneiden, also mit N identisch sein. Dies sind daher die Achsen der gesuchten Involution. Der Fall, dafs die beiden Geraden M und N zusammenfallen, kann hier nicht eintreten.

Ferner gilt der Satz:

13. *Legt man durch einen beliebigen Punkt einer allgemeinen F^2 4 Ebenen, so schneiden die Gegenkantenpaare dieses vollständigen Vierflachs F^2 in 3 Punktepaaren einer windschiefen Involution, deren Achsen reziproke Polaren von F^2 sind.*

Bezeichne d den Scheitel des Vierflachs und aa', bb', cc' die Schnittpunkte seiner Gegenkantenpaare mit F^2. Durch aa' und bb' ist nach Satz 12. eine windschiefe Involution der angegebenen Art bestimmt; in ihr wird dem Punkte d ein Punkt d' von F^2 entsprechen. Zufolge des Steinerschen Satzes, angewandt auf die Punktepaare aa', bb', dd' schneiden sich die Ebenen $[a'b'd']$, $[a'bd]$, $[ab'd]$, $[abd']$ in einem Punkt von F^2 und die Ebenen $[abd]$, $[ab'd']$, $[a'bd']$, $[a'b'd]$ in dem durch die Involution zugeordneten Punkte. Diese beiden Punkte liegen aber in den Gegenkantenpaaren $[a'bd \cdot ab'd]$ und $[abd \cdot a'b'd]$ unseres Vierflachs, sind daher mit c und c' identisch. cc' gehören also mit aa', bb' und dd' derselben Involution an.

Da die Ebenen $[a'b'd']$ und $[abd']$, wie wir eben sahen, durch c und die Ebenen $[ab'd']$, $[a'bd']$ durch c' gehen, so kann man auch sagen, die vier Ebenen $[a'b'c]$, $[abc]$, $[ab'c']$, $[a'bc']$ gehen durch den Punkt d', während die vier Ebenen $[a'bc]$, $[ab'c]$, $[abc']$, $[a'b'c']$ durch den Punkt d gingen. aa', bb', cc', dd' bilden daher die Gegeneckenpaare zweier doppelt umschriebenen und F^2 eingeschriebenen Tetraeder.

Sind umgekehrt zwei solche Tetraeder gegeben, so gehen durch jeden Eckpunkt, z. B. durch d_0 vier Ebenen; die Gegeneckenpaare des durch sie bestimmten Vierflachs treffen F^2 in Punktepaaren aa', bb', cc', die nach Satz 13. mit dd' einer windschiefen Involution angehören, deren Achsen reziproke Polaren von F^2 sind. Daher der Satz:

14. *Die Gegenecken zweier doppelt umschriebenen und einer F^2 eingeschriebenen Tetraeder entsprechen einander in einer bestimmten windschiefen Involution, deren Achsen reziproke Polaren von F^2 sind.*[1])

Denken wir uns jetzt F^2 als *Kugelfläche* und bilden sie stereographisch auf eine Ebene ab, so entsprechen je zwei Punkten auf F^2, die in einer durch zwei reziproke Polaren von F^2 bestimmten, windschiefen Involution einander zugeordnet sind, in der Ebene zwei Punkte, die in einer Möbiusschen Involution einander zugeordnet sind. Von den beiden Achsen der windschiefen Involution schneidet nämlich eine, etwa M, die Kugel in zwei reellen sich selbst entsprechenden Punkten. Nennt man ihre stereographischen Projektionen m_1, m_2, so entsprechen je zwei zugeordneten Punkten der Kugel in der Ebene zwei Punkte, die mit m_1, m_2 auf einem Kreise liegen und von ihnen harmonisch getrennt werden. Das ist aber die von Möbius[2]) als *Involution in der Ebene* bezeichnete Verwandtschaft.

Dies berücksichtigend schliefst man von dem Satze 13., indem man die stereographische Projektion der entsprechenden Figur (vgl. Beweis des Satzes 13.) in Betracht zieht, auf die Richtigkeit des folgenden:

15. *Legt man in der Ebene durch einen Punkt d vier Kreise, so schneiden sie sich in drei Punktepaaren einer Möbiusschen Involution. Umschreibt man ferner den vier entstehenden, von Kreisbogen gebildeten Dreiseiten Kreise, so schneiden sich diese in dem d entsprechenden Punkte d'.*[3])

Schliefslich sollen aus den beiden Sätzen 11. und 11.' mittels der von W. Fiedler in seiner „Cyklographie"[4]) gelehrten Abbildung der Punkte des Raumes auf die Kreise einer Ebene zwei Sätze über letztere abgeleitet werden. Diese Abbildung besteht bekanntlich darin, dafs man jeden Punkt des Raumes als Spitze eines Rotationskegels betrachtet, dessen Erzeugende gegen die Ebene unter 45° geneigt sind,

---

1) Vgl. den etwas allgemeineren Satz bei Sturm a. a. O. p. 69.

2) „Über die Involution von Punkten in einer Ebene". Ber. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 5, 1853. = Ges. Werke 2, S. 221 u. f.

3) Möbius: „Die Theorie d. Kreisverwandtschaft in rein geom. Darstellung" Abh. d. sächs. Gesellschaft d. W. 2, 1855 § 47, 9. = Ges. Werke 2, S. 314.

4) Leipzig 1882.

und den Schnittkreis des Kegels mit der Ebene als Abbild der Spitze ansieht. Damit auch jedem Kreise der Ebene nur *ein* Raumpunkt entspreche, betrachte ich die Kreise als *„orientiert"*, d. h. ich denke mir mit Laguerre für jeden Kreis (durch einen Pfeil) einen Umlaufsinn festgelegt und ordne die Kreise mit dem einen Sinn den Punkten oberhalb, die Kreise mit dem entgegengesetzten Sinn den Punkten unterhalb der Ebene zu. Zwei orientierte Kreise sollen nur dann „berührend" heifsen, wenn sie im Berührungspunkte auch die gleiche Richtung besitzen. Wendet man nun auf den einem beliebigen orientierten Kreis k der Ebene zugeordneten Kegel den Satz 11. an und bildet die Punkte durch orientierte Kreise ab, so gelangt man zu folgendem Satz über *orientierte* Kreise:

16. *Legt man an einen Kreis, der k berührt, vier berührende Kreise, so giebt es zu je zweien von ihnen noch einen sie und k berührenden Kreis. Unter den sechs auf diese Art erhaltenen Kreisen befinden sich vier Tripel, deren jedes aufser k keinen der schon gezeichneten Kreise als zweiten gemeinschaftlichen Berührungskreis besitzt, daher einen solchen neuen Kreis bestimmt. Diese vier Kreise nun werden samt k von einem und demselben Kreise berührt.*[1])

Den Satz 11′ wenden wir auf denjenigen Kegelschnitt der unendlich fernen Ebene an, der von allen die Zeichenebene unter 45° schneidenden Ebenen berührt wird, indem wir beachten, dafs jede solche Ebene in der cyklographischen Abbildung eine orientierte Gerade bestimmt, nämlich die gemeinschaftliche Tangente aller orientierten Kreise, die den Punkten der Ebene entsprechen. Wir gelangen dadurch zu folgendem Satz über *orientierte* Geraden und Kreise in der Ebene:

17. *Legt man an eine Gerade berührend vier beliebige Kreise, so haben sie sechs weitere gemeinschaftliche Tangenten, von denen vier mal je drei einen neuen Berührungskreis besitzen. Diese vier Kreise berühren immer eine und dieselbe Gerade.*[2])

Königsberg i. Pr. den 26. Januar 1900.

---

1) Dieser Satz läfst sich noch verallgemeinern. Er gilt nämlich auch dann noch, wenn statt der k berührenden Kreise solche gelegt werden, die k unter einem bestimmten Winkel schneiden.

2) Auf anderem Wege habe ich den Satz abgeleitet: „Die Geometrie orientierter Kugeln" § 6, p. 289, Monatsh. f. Math. u. Phys. 9, 1898.

Über die Torsion der geodätischen Linien durch einen Flächenpunkt.

Von Konrad Zindler in Innsbruck.

Betrachtet man alle geodätischen Linien, die durch einen regulären Flächenpunkt gehen, so kann man nach der Beziehung fragen, die zwischen ihren ersten oder ihren zweiten Krümmungen besteht. Die erste Frage wird durch den Eulerschen Satz erledigt; die zweite wollen wir auf einem für Vorlesungen geeigneten Wege mit möglichst einfachen Mitteln beantworten, obgleich sich unsere Geichung (9) auch aus Darboux, Théorie des surfaces, Bd. II, S. 388, Gl. (4) durch Spezialisierung ergeben würde.

Wir setzen voraus, dafs der Ursprung U eines rechtwinkligen Systems erster Art in den betrachteten Flächenpunkt fällt, die x- und die y-Achse Tangenten der Krümmungslinien sind. Für eine auf der Fläche gezogene Kurve betrachten wir die Bogenlänge σ als unabhängigen Parameter; die gestrichelten Symbole bedeuten stets Ableitungen nach σ. Die Flächengleichung setzen wir in der Form $z = f(x, y)$ voraus. Dann gilt für jede Kurve auf der Fläche bei der üblichen Bezeichnung der partiellen Ableitungen:

$$z' = px' + qy', \tag{1}$$

$$z'' = px'' + qy'' + p'x' + q'y', \tag{2}$$

$$\Sigma x'^2 = 1, \tag{3}$$

$$\Sigma x'x'' = 0. \tag{4}$$

Ist insbesondere die Kurve eine geodätische Linie und bezeichnet man

$$P = y'z'' - y''z', \; Q = z'x'' - z''x', \; R = x'y'' - x''y',$$

so gilt:

$$Pp + Qq - R = 0, \text{ also} \tag{5}$$

$$Pp' + Qq' + P'p + Q'q - R' = 0. \tag{6}$$

Für U reduzieren sich diese Gleichungen der Reihe nach auf:

(1a) $$z' = 0,$$

(2a) $$z'' = rx'^2 + ty'^2 \quad \text{(Eulerscher Satz)},$$

(3a) $$x'^2 + y'^2 = 1,$$

(4a) $$x'x'' + y'y'' = 0,$$

(5a) $$-y'x'' + x'y'' = 0.$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt für U:

(7) $$x'' = y'' = 0,$$

und hiermit:

(6a) $$x'''y' - y'''x' = z''(t - r)x'y'.$$

Der Ausdruck der Torsion einer Raumkurve ist:

(8) $$\tau = \frac{D}{\Sigma x''^2},$$

wobei

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Für den Punkt U einer geodätischen Linie reduziert er sich also auf:

(8a) $$\tau = \frac{x'''y' - x'y'''}{z''}$$

oder mit Rücksicht auf (6a) auf:

$$\tau = (t - r)x'y'.$$

Führen wir noch den Winkel ω ein, den die Tangente der geodätischen Linie in U mit der x-Achse bildet, so wird:

(9) $$\tau = (t - r)\sin\omega\cos\omega.$$

In Nabelpunkten haben alle geodätischen Linien einen Undulationspunkt; wenn wir von diesen Punkten absehen, können wir für elliptische Punkte stets voraussetzen

$$r < t < 0,$$

was darauf hinauskommt, die z-Achse in die äufsere Flächennormale, die x-Achse in die Richtung der stärksten Krümmung zu verlegen. Dann ist τ im ersten Quadranten positiv; die geodätischen Linien sind also hier rechtsgewunden.[1] Die leicht im Gedächtnis zu behaltende

---

1) Nach der Terminologie der Maschinenlehre; in der theoretischen Geometrie ist die Bezeichnung häufig umgekehrt.

Fig. 1 veranschaulicht diesen Umstand. Es sind sowohl die Indicatrix als zwei geodätische Linien des Punktes U von der Aufsenseite betrachtet und auf die Tangentialebene projiziert. Ist die Fläche in U negativ gekrümmt, so können wir voraussetzen:

$$t > 0 > r.$$

Wählen wir die Indicatrix auf der positiven Seite der z-Achse, so hat die Fig. 2 für hyperbolische Punkte eine analoge Bedeutung wie Fig. 1 für elliptische Punkte; der schraffierte Teil ist der Flächenstreifen zwischen Berührungsebene und Indicatrix. Der Fall der parabolischen Punkte ist als Grenzfall der elliptischen leicht zu übersehen.

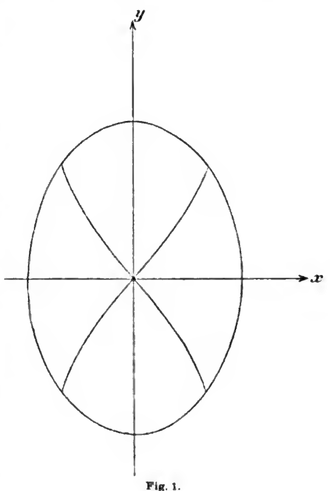


Fig. 1.

Bezeichnet man mit T den für $\omega = 45^0$ hervorgehenden gröfsten Wert von τ, so geht (9) über in:

$$\tau = T \sin 2\omega.$$

Zählt man auch noch den Winkel von der Richtung der stärksten Torsion, also

$$\omega = \alpha + 45^0,$$

so wird:

$$\tau = T \cos 2\alpha. \tag{10}$$

Sind k_1 und k_2 die Krümmungen der Hauptschnitte, k die eines beliebigen Normalschnittes, so geht (9) über in:

$$\tau = (k_2 - k_1) \sin\omega \cos\omega$$

ferner (2a) in:

$$k = k_1 \sin^2\omega + k_2 \cos^2\omega$$

oder in:

$$k = k_1 + (k_2 - k_1) \cos^2\omega = k_2 + (k_1 - k_2) \sin^2\omega,$$

also

$$(k_2 - k)(k - k_1) = \tau^2,$$

womit wir den Satz erhalten, den Herr Kommerell vor kurzem in dieser Zeitschrift mitgeteilt hat, der übrigens in der Gleichung (8) auf

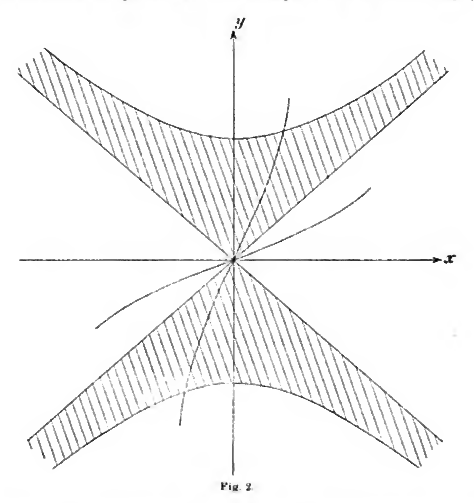


Fig. 2.

S. 258 von Knoblauchs „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen" enthalten ist.

Es ist bemerkenswert, dafs die Verteilung der Torsionswerte auf die verschiedenen Richtungen von der Form der Indicatrix unabhängig ist.

Ergänzungen zum Fermatschen und Wilsonschen Satze.

Von W. Fr. Meyer in Königsberg. i. P.

Nach dem Fermatschen Satze ist für jede zu einer Primzahl p teilerfremde Zahl a die Differenz $a^{p-1} - 1$ durch p teilbar. Für welche Zahlen a findet eine Teilbarkeit durch höhere Potenzen von p statt?[1])

Indem wir zunächst das Quadrat von p als Modul in Betracht ziehen, zerlegen wir die $p(p-1)$ zu p^2 teilerfremden Zahlen, die $< p^2$ sind, in die $p-1$ Gruppen $a + \mu p (a = 1, 2, \ldots, p-1; \mu = 0, 1, \ldots, p-1)$, wo die p Individuen, die zu einem und demselben a gehören, alle mod. p kongruent sind, dagegen je zwei, zu zwei verschiedenen a gehörende Zahlen mod. p inkongruent sind.

Es soll bei festgehaltenem a die Zahl μ so bestimmt werden, dafs $(a + \mu p)^{p-1} - 1$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $(a + \mu p)^p - (a + \mu p)$ durch p^2 teilbar wird. Nun ist[2]):

$$(1) \qquad (a + \mu p)^p = a^p + \nu p^2,$$

andererseits nach dem Fermatschen Satze:

$$(2) \qquad a^p = a + \lambda p,$$

somit:

$$(3) \qquad (a + \mu p)^p - (a + \mu p) = (\mu - \lambda) p + \nu p^2.$$

Die rechte, also auch die linke Seite ist mindestens durch p^2 teilbar, wenn $\mu \equiv \lambda$ (mod. p), sonst nur gerade[3]) durch p teilbar.

Demnach gilt:

(A) Unter den zu p^2 teilerfremden Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, p^2$ befinden sich $p - 1$, *mod. p inkongruente*, durch (2) repräsentierte Zahlen

---

1) Weitere Litteratur über diese Frage s. bei P. Bachmann: Encyklopädie der math. Wiss. I p. 562.

2) Unter $\nu, \lambda, \ldots$ sind ganzzahlige Faktoren zu verstehen. Über den Grundgedanken der Entwicklung s. Dedekind: Suppl. V in Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie.

3) Ein Ausdruck heifst „gerade" oder „genau" teilbar durch p^ν, wenn p^ν die höchste Potenz von p bezeichnet, die in ihm aufgeht.

$b = a + \lambda p$, für die $x^{p-1} - 1$ durch mindestens p^2 teilbar wird, während für die übrigen $p(p-1) - (p-1) = (p-1)^2$ Zahlen nur eine genaue[1]) Teilbarkeit durch p stattfindet.

Bezeichnet man die letzteren $(p-1)^2$ Zahlen wiederum mit a, so lassen sich die $p^2(p-1)$ zu p^3 teilerfremden Zahlklassen repräsentieren durch die Gruppen $a + \pi p^2$, $b + \varrho p^2 (\pi, \varrho = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Für irgend eine Zahl aus der ersten Gruppe gilt:

$$(4) \qquad (a + \pi p^2)^p = a^p + \omega p^3,$$

andererseits:

$$(5) \qquad a^p = a + kp \ (k \not\equiv 0 \text{ mod. } p),$$

also:

$$(6) \qquad (a + \pi p^2)^p - (a + \pi p^2) = kp + \omega' p^2.$$

Somit findet für diese $p(p-1)^2$ Zahlen $a + \pi p^2$ eine genaue Teilbarkeit von $(a + \pi p^2)^{p-1} - (a + \pi p^2)$ durch p statt. Dagegen ergiebt sich für die $p(p-1)$ Zahlen $b + \varrho p^2$ der zweiten Gruppe:

$$(7) \qquad (b + \varrho p^2)^p = b^p + up^3,$$

andererseits gemäss (A):

$$(8) \qquad b^p = b + \nu p^2,$$

also:

$$(9) \qquad (b + \varrho p^2)^p - (b + \varrho p^2) = (\nu - \varrho) p^2 + \nu' p^3.$$

Dann und nur dann, wenn $\varrho \equiv \nu$ (mod. p), findet Teilbarkeit der linken Seite durch mindestens p^3 statt, andernfalls nur eine Teilbarkeit gerade durch p^2.

Bezeichnet man die ersteren $p-1$ Zahlen $b + \varrho p^2$ mit c, so hat man für irgend zwei dieser Zahlen c, c', die den Zahlen b, b' entsprechen mögen:

$$(10) \qquad c' = b' + \varrho' p^2, \quad c = b + \varrho p^2,$$

somit:

$$(11) \qquad c' - c = b' - b + \sigma p^2,$$

woraus unmittelbar folgt, daſs auch die Zahlen c', c mod. p inkongruent sind, da es gemäſs (A) die Zahlen b', b sind.

Somit gilt:

(B) Unter den $p^2(p-1)$, zu p^3 teilerfremden Zahlklassen mod. p^3 befinden sich $p(p-1)^2$, für die $x^{p-1} - 1$ gerade durch p, ferner

---

1) Ein Ausdruck heiſst „gerade“ oder „genau“ teilbar durch p^ν, wenn p^ν die höchste Potenz von p bezeichnet, die in ihm aufgeht.

$(p-1)^2$, für die $x^{p-1}-1$ gerade durch p^2, endlich $p-1$, *mod.* p *inkongruente* Zahlklassen, für die $x^{p-1}-1$ mindestens durch p^3 teilbar wird.

Durch unvollständige Induktion wird man so zu folgendem allgemeinen Satze geführt:

I. Unter den $p^{n-1}(p-1)$, zu p^n teilerfremden Zahlklassen[1]) *mod.* p^n *befinden sich resp.* $p^{n-2}(p-1)^2$, $p^{n-3}(p-1)^2$, ..., $p^1(p-1)^2$, $(p-1)^2$, *für die $x^{p-1}-1$ gerade durch resp.* p, p^2, ..., p^{n-2}, p^{n-1} *teilbar wird, während für die noch übrigen $p-1$ Zahlklassen, die alle zu einander mod. p inkongruent sind, $x^{p-1}-1$ mindestens durch p^n teilbar wird.*

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.

Gesetzt, der Satz sei richtig für den Modul p^n, so sei $a_i (i < n)$ eine der $p^{n-(i+1)}(p-1)^2$ Zahlen, für die x^{p-1} gerade durch p^i teilbar sei, d. h. es sei für eine festgehaltene dieser Zahlen a_i:

$$a_i^p - a_i = kp^i, \quad k \not\equiv 0 \pmod{p}. \tag{12}$$

Man betrachte die Gruppe der p Individuen $a_i + \mu p^n$, $\mu = 0, 1, \ldots, p-1$. Dann wird:

$$(a_i + \mu p^n)^p = a_i^p + \nu p^{n+1}, \tag{13}$$

also mit Rücksicht auf (12):

$$(a_i + \mu p^n)^p = a_i + kp^i + \nu p^{n+1} \tag{14}$$

und demnach:

$$(a_i + \mu p^n)^p - (a_i + \mu p^n) = kp^i - \mu p^n + \nu p^{n+1}. \tag{15}$$

Da aber k nicht teilbar durch p ist, und $i < n$, so ist die linke Seite von (15) wiederum gerade durch p^i teilbar. Aus den $p^{n-(i+1)}(p-1)^2$ mod. p^n Zahlklassen a_i gehen daher $p \cdot p^{n-(i+1)}(p-1)^2 = p^{n+1-(i+1)}(p-1)^2$ mod p^{n+1} neue, zu p^{n+1} teilerfremde Zahlklassen hervor, für die gleichfalls $x^{p-1}-1$ gerade durch p^i teilbar wird.

Ist dagegen a_n eine der $p-1$ Zahlklassen mod. p^n, für die $x^{p-1}-1$ mindestens durch p^n teilbar wird:

$$a_n^p = a + \lambda p^n, \tag{16}$$

---

1) Aus Gleichung (15) des Textes geht unmittelbar hervor, dafs, wenn $x^{p-1}-1$ für eine Zahl α gerade durch p^i teilbar ist, dies auch für alle Zahlen der zu α mod. p^n gehörigen *Zahlklasse* gilt, und ebenso auch, wenn $x^{p-1}-1$ mindestens durch p^n teilbar ist. Die sämtlichen Zahlklassen des Satzes I lassen sich auf Grund des Satzes II explizite hinschreiben.

so betrachte man die Gruppe der p Individuen $a_n + \mu p^n$, $\mu = 0, 1, \ldots, p-1$, dann ergiebt sich:

$$(17) \qquad (a_n + \mu p^n)^p = a_n^p + \pi p^{n+1},$$

also mit Rücksicht auf (16):

$$(18) \qquad (a_n + \mu p^n)^p = a + \lambda p^n + \pi p^{n+1},$$

und somit:

$$(19) \qquad (a_n + \mu p^n)^p - (a_n + \mu p^n) = (\lambda - \mu) p^n + \pi p^{n+1}.$$

Mithin findet für die linke Seite von (19) eine Teilbarkeit gerade durch p^n statt, wenn $\mu \not\equiv \lambda$ (mod. p), dagegen eine solche durch mindestens p^{n+1}, wenn $\mu \equiv \lambda$ (mod. p) gewählt ist. Demnach gehen aus den $p-1$ Zahlklassen a_n mod. p^n einmal $(p-1)^2$ neue, zu p^{n+1} teilerfremde Zahlklassen mod. p^{n+1} hervor, für die $x^{p-1} - 1$ gerade durch p^n, sodann aber $p-1$ neue, zu p^{n+1} teilerfremde Zahlklassen a_{n+1} mod. p^{n+1}, für die $x^{p-1} - 1$ mindestens durch p^{n+1} teilbar wird.

Endlich gilt für irgend zwei dieser letzteren Zahlen a_{n+1}, a'_{n+1}, die den Zahlen a_n, a'_n entsprechen mögen:

$$(20) \qquad a'_{n+1} = a'_n + \mu' p^n, \quad a_{n+1} = a_n + \mu p^n,$$

also:

$$(21) \qquad a'_{n+1} - a_{n+1} = a'_n - a_n + \nu p^n.$$

Da aber nach Voraussetzung $a'_n - a_n$ nicht teilbar durch p ist, kann es auch $a'_{n+1} - a_{n+1}$ nicht sein, d. h. die $p-1$ Zahlen a_{n+1} repräsentieren gerade die $p-1$, mod. p inkongruenten und zu p primen Zahlklassen, die es überhaupt giebt.

Hiermit ist der Satz I vollständig bewiesen.

Aus der Herleitung des Satzes entnimmt man aber auch unmittelbar das Kriterium dafür, dass für eine beliebig vorgegebene Zahl A $x^{p-1} - 1$ gerade durch eine i^{te} Potenz von p teilbar ist, und das Mittel, diesen Exponenten i zu finden.

Sei wieder a irgend eine der $p-1$ Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$, so ist nach dem von Euler erweiterten Fermatschen Satze:

$$(22) \qquad \frac{a^{p^\varrho} - a^{p^{\varrho-1}}}{p^\varrho} = \lambda_\varrho \ (\lambda_\varrho \text{ ganz}, \ \varrho = 1, 2, \ldots),$$

so dass mit jeder der Zahlen a für irgend eine Primzahl p die unendliche Kette von Zahlen λ_ϱ als mitgegeben betrachtet werden darf.

Nun ist jede durch p nicht teilbare Zahl A, die zwischen den beiden Primzahlpotenzen p^n und p^{n+1} gelegen sein mag, offenbar auf eine und nur eine Weise in der Form darstellbar[1]):

$$(23)\qquad A = a + \mu_1 p + \mu_2 p^2 + \mu_3 p^3 + \dots + \mu_n p^n + \mu_{n+1} p^{n+1} + \mu_{n+2} p^{n+2} + \dots$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, p-1; \quad \mu_k = 0, 1, \dots, p-1\ (k = 1, 2, \dots, n); \\ \mu_{n+1} = \mu_{n+2} = \dots = 0. \end{array}\right\}$$

Dann gilt:

II. Ist in der Darstellung (23) *einer (nicht durch p teilbaren) Zahl A i der kleinste Index, für den:*

$$(24)\qquad \mu_i \not\equiv \lambda_i \ (\text{mod. } p), \quad \mu_h \equiv \lambda_h \ (\text{mod. } p)\ (h < i),$$

so ist $A^{p-1} - 1$ *genau durch die* i^{te} *Potenz von* p *teilbar.*

Nunmehr wenden wir uns wieder den ein besonderes Interesse beanspruchenden $p-1$ Zahlklassen a_n mod. p^n des Satzes I zu, die zu p^n relativ prim sind, die mod. p inkongruent sind, und für die $x^{p-1} - 1$ mindestens durch p^n teilbar ist.

Bekanntlich sind die durch $1, 2, \dots, p-1$ repräsentierten $p-1$ Zahlklassen a, die dem Fermatschen Satze genügen: $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ mod. p, gerade die sämtlichen Wurzeln der Kongruenz:

$$(25)\qquad x^{p-1} - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p);$$

nach Lagrange wird dann aus der identisch, d. h. für alle Werte x, erfüllten Kongruenz:

$$(26)\qquad x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)\dots(x-p+1)\ (\text{mod. } p)$$

unter andern der Wilsonsche Satz hergeleitet:

$$(27)\qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) \equiv -1 \ (\text{mod. } p).$$

Die Ableitung von (26) aus (25) stützt sich, abgesehen von allgemein gültigen Hülfssätzen aus der Algebra, ausschließlich auf den arithmetischen Satz, daß die Differenz irgend zweier der Wurzeln $1, 2, \dots, p-1$ von (25) stets zum Modul p teilerfremd ist.

1) Allgemein lassen sich, wie sofort zu verifizieren ist, die $\varphi(k)$, zu einer in ihre Primfaktoren zerlegten Zahl $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots$ *teilerfremden* Zahlklassen repräsentieren durch den Ausdruck

$$k \cdot \sum_i \frac{A_i}{p_i^{\alpha_i}}, \text{ wo } A_i = i_0 + i_1 p_i + i_2 p_i^2 + \dots + i_{\alpha_i - 1} p_i^{\alpha_i - 1},$$

und i_0 die Zahlen $1, 2, \dots, p_i - 1$, alle übrigen i aber die Zahlen $0, 1, 2, \dots, p_i - 1$ durchlaufen.

Für die $p-1$ Zahlen $a_n = a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(p-1)}$ des Satzes I gilt das vollkommen Analoge. Zunächst sind sie die sämtlichen Wurzeln der Kongruenz:

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^n}, \tag{28}$$

und da die Differenz irgend zweier dieser Wurzeln nicht teilbar durch p, also teilerfremd zum Modul p^n ist, so besteht, analog zu (26), die für alle Werte von x erfüllte Kongruenz:

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x - a_n^{(1)})(x - a_n^{(2)}) \ldots (x - a_n^{(p-1)}) \pmod{p^n}: \tag{29}$$

III. Sind $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(p-1)}$ die Repräsentanten der $p-1$ Zahlklassen, für die $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$ wird, so besteht als Analogon zum Wilsonschen Satze (27) die Kongruenz:

$$a_n^{(1)} \cdot a_n^{(2)} \ldots a_n^{(p-1)} \equiv -1 \pmod{p^n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{30}$$

so daſs der Wilsonsche Satz nur als das erste Glied einer unendlichen Kette gleichgebauter Kongruenzen erscheint.

Man ersieht ferner sofort aus (29), daſs die Summe der a_n, sowie die Summe ihrer Produkte zu je $2, 3, \ldots, p-2$ durch p^n teilbar ist. Allgemein gilt der Satz:

IV. Ist $S_i(a_n)$ eine ganze homogene symmetrische Funktion der a_n vom Grade i, so ist S_i teilbar durch p^n, wenn i nicht teilbar durch $p-1$ ist.

Für $n = 1$ hat den Satz Herr K. Hensel (s. diese Zeitschrift (3) **1**, 319) aufgestellt und bewiesen. Seine Beweismethode ist, wie leicht zu sehen, für $n > 1$ nicht mehr verwendbar.

Wir führen den Beweis mit Hülfe einiger Sätze aus der Algebra der symmetrischen Funktionen. Versteht man unter $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ die elementarsymmetrischen Funktionen von ν Gröſsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, so ist jede ganze (homogene) symmetrische Funktion i^{ten} Grades der α eine ganze ganzzahlige Funktion $f_i(e)$ i^{ten} Grades der e; zugleich ist das Gewicht von $f_i(e)$ gleich i, d. h. für jeden Term $A.e_1^{\varepsilon_1}.e_2^{\varepsilon_2} \ldots e_n^{\varepsilon_n}$ von f ist $1.\varepsilon_1 + 2.\varepsilon_2 + \ldots + n.\varepsilon_n = i$. Es seien nun im besonderen die α, also auch die e ganze Zahlen, und seien alle e excl. e_n durch eine ganze Zahl k teilbar, so muſs auch f_i durch k teilbar sein, wenn i nicht teilbar durch n ist. Denn in f_i kann nie eine Potenz von ε_n allein, etwa ε_n^ω, als Term auftreten; sonst wäre das Gewicht $i = n\omega$, also i teilbar durch n, gegen die Voraussetzung.

Im obigen Falle sind die α vertreten durch die a_n, die Zahl k durch p^n, womit Satz IV bewiesen ist.

Königsberg i. Pr., 2. Juli 1901.

Remarques sur la théorie des forces centrales;

Par M. Cyparissos Stéphanos à Athènes.

1. Lorsque dans un plan XOY on considère un point mobile (x, y) soumis à l'action d'une force accélératrice issue d'un point fixe (x_1, y_1), les composantes de cette force sont:

$$X = \frac{d^2x}{dt^2} = -c^2(x - x_1)\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x', & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3},$$

$$Y = \frac{d^2y}{dx^2} = -c^2(y - y_1)\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3},$$

les dérivées x', y', x'', y'' étant prises par rapport à une variable in dépendante quelconque et la constante (des aires) c étant telle que:

$$(x - x_1)dy - (y - y_1)dx = c\,dt.$$

Si maintenant la trajectoire du mobile a pour équation $f(x, y) = 0$, on doit avoir:

$$\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3} = \frac{f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2}{[(x - x_1)f_1 + (y - y_1)f_2]^3},$$

étant posé

$$f_1, f_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)f,$$

$$f_{11}, f_{12}, f_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f.$$

On arrive ainsi à cette expression invariante remarquable:

$$\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3} = \frac{H}{(m - 1)^2[x_1f_1 + y_1f_2 + f_3]^3},$$

où H désigne la hessienne $\Sigma \pm \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ de la forme $F = z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ et f_3 la dérivée $\frac{\partial F}{\partial z}$ (dans lesquelles on devra faire ensuite $z = 1$).

Lorsque le point (x_1, y_1) s'éloigne à l'infini sur la droite $ay - bx = 0$, les composantes de la force accélératrice du point (x, y) deviennent

$$X = -ac^2\frac{(x'y'' - y'x'')}{(ay' - bx')^3} = -ac^2\frac{H}{(m-1)^2(af_1 + bf_2)^3},$$

$$Y = -bc^2\frac{(x'y'' - y'x'')}{(ay' - bx')^3} = -bc^2\frac{H}{(m-1)^2(af_1 + bf_2)^3}.$$

Si la courbe donnée est une conique, H se réduit à une constante et les formules précédentes conduisent aisément aux divers résultats connus[1]), relatifs au mouvement sur une conique d'un point sollicité par une force centrale, ou bien par une force ayant une direction fixe.

2. Si un point mobile (x, y) est soumis à une force issue d'un point fixe (x_1, y_1) et telle que:

$$X = k(x - x_1)\omega, \quad Y = k(y - y_1)\omega,$$

où k désigne une constante et ω une fonction de x et y, les courbes décrites par ce point, sous diverses conditions initiales, ont pour équation différentielle celle obtenue en éliminant la constante $\frac{k}{c^2}$ de l'équation:

$$\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3} = -\frac{k}{c^2}\omega.$$

Réciproquement, il est clair que, si l'équation différentielle obtenue en éliminant les constantes a et b de l'équation

$$f(x, y, a, b, c) = 0$$

est de la forme

$$\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3} = c'\omega,$$

c' désignant une constante, fonction de c, et ω une fonction de x et y, les courbes $f = 0$ peuvent être considérées comme les trajectoires d'un point sollicité par une force centrale telle que

$$X = k(x - x_1)\omega, \quad Y = k(y - y_1)\omega,$$

et cela quelle que soit la constante k.

---

1) Voir les notes de MM. Darboux et Halphen dans le tome 84 des Comptes Rendus de Paris (1877), ainsi que l'article de M. Appell: *Sur l'homographie en mécanique*, inséré dans le tome XII de l'American Journal (1890).

[Pour compléter la bibliographie relative au sujet traité par M. Stéphanos, nous ajoutons ces titres: G. Battaglini: „Nota sul movimento per una linea di 2° ordine". Atti dei Lincei (3) **2**, 211—212 (1877). — J. Bertrand: Note sur un problème de mécanique. C. R. **118**, 13—15, 1894. — A. Potier: Note sur un problème de mécanique. C. R. **112**, 102—104, 1894. Réd.]

3. Considérons, par exemple, les diverses transformées d'une même courbe $f(x, y) = 0$, par des homologies ayant pour centre l'origine des coordonnées O. Si en résolvant par rapport à z l'équation $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ on obtient $z = \sqrt{\varphi(x, y)}$, $\varphi(x, y)$ désignant une fonction homogène de second degré de x et y, l'équation

$$ax + by + c = \sqrt{\varphi(x, y)}$$

représentera les diverses transformées de $f(x, y) = 0$ par les homologies en question.

L'élimination de a et b de l'équation précédente conduit maintenant à l'équation différentielle suivante:

$$c(x'y'' - y'x'') = (xy' - yx')\left(x'^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2x'y'\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\sqrt{\varphi(x, y)},$$

soit

$$4c(x'y'' - y'x'') = (xy' - yx')^3\frac{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}},$$

étant posé

$$\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi.$$

Les courbes en question peuvent donc être considérées comme les trajectoires d'un mobile soumis à l'action d'une force issue du point O et telle que:

$$X = kx\frac{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}}, \quad Y = ky\frac{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}}.$$

On remarquera en particulier le cas où φ est un polynôme du second degré $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. On obtient alors des coniques tangentes aux deux droites $\varphi = 0$. Si $\varphi = x^2 + y^2$, ces coniques ont l'origine O comme foyer commun, et la force centrale suit dans ce cas la loi d'attraction de Newton.

Des propriétés analogues ont évidemment lieu pour les transformées d'une courbe par des homologies ayant comme centre un point fixe quelconque, pouvant même être à l'infini.

Cette propriété des transformées d'une courbe par des homologies ayant un centre fixe a été d'abord obtenue par M. Darboux (loc. cit.), à l'aide de coordonnées polaires.

4. La seconde proposition du n° 2 peut être complétée comme il suit:

Si l'équation différentielle obtenue en éliminant a et b d'une équation $f(x, y, a, b, c) = 0$ est de la forme

$$\frac{x'y'' - y'x''}{\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3} = c'\omega,$$

c' étant une constante, fonction de c, et ω une fonction de x et y, les courbes $f = 0$ ne peuvent être considérées comme les trajectoires d'un point (x, y) sollicité par une force dépendant seulement des coordonnées (x, y), que d'une seule manière, qui consiste à admettre

$$X = k(x - x_1)\omega, \quad \Psi = k(y - y_1)\omega$$

quelle que soit du reste la constante k.

Pour démontrer cette propriété, remarquons d'abord qu'elle a lieu dans le cas où $\omega = 0$, soit $x'y'' - y'x'' = 0$, les trajectoires en question étant alors des droites.

Considérons maintenant l'équation différentielle des courbes décrites, sous diverses conditions initiales, par un point mobile sollicité par une force

$$X = \chi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

ne dépendant que des coordonnées du point (x, y). Cette équation différentielle sera obtenue en éliminant t entre les deux équations:

$$t'x'' - t''x' = t'^3\chi,$$

$$t'y'' - t''y' = t'^3\psi,$$

ou encore entre celles-ci:

$$x'y'' - y'x'' = t'^2(x'\psi - y'\chi),$$

$$t''(x'y'' - y'x'') = t'^3(x''\psi - y''\chi),$$

où les dérivées x', x'', y', y'', t', t'' sont prises par rapport à une variable indépendante quelconque. On obtient ainsi

$$\frac{x'y''' - y'x'''}{x'y'' - y'x''} = \frac{3(x''\psi - y''\chi) + \left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)(x'\psi - y'\chi)}{x'\psi - y'\chi}.$$

Cette équation différentielle devant coïncider avec l'équation:

$$\frac{x'y''' - y'x'''}{x'y'' - y'x''} = 3\frac{(x - x_1)y'' - (y - y_1)x''}{(x - x_1)y' - (y - y_1)x'} + \frac{x'\frac{\partial\omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\omega},$$

obtenue par l'élimination de c' de l'équation

$$x'y'' - y'x'' = c'\begin{vmatrix} x - x_1, & x' \\ y - y_1, & y' \end{vmatrix}^3 \omega,$$

il faut que l'on ait les identités

$$\frac{x''\psi - y''\chi}{x'\psi - y'\chi} = \frac{(x-x_1)y'' - (y-y_1)x''}{(x-x_1)y' - (y-y_1)x'},$$

$$\frac{\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)(x'\psi - y'\chi)}{x'\psi - y'\chi} = \frac{x'\frac{\partial\omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\omega}$$

quelles que soient les valeurs de x, y, x', y', x'', y''.

La première de ces identités, pouvant être écrite comme il suit

$$(x'y'' - y'x'')\begin{vmatrix} x-x_1, & \chi \\ y-y_1, & \psi \end{vmatrix} = 0,$$

exige soit que l'on ait $x'y'' - y'x'' = 0$, ce qui correspond au cas déjà considéré, où les trajectoires données sont des droites, soit que l'on ait identiquement:

$$\frac{\chi}{x-x_1} = \frac{\psi}{y-y_1},$$

c'est-à-dire

$$\chi = (x-x_1)\Omega,$$

$$\psi = (y-y_1)\Omega,$$

Ω désignant une fonction de x et y.

Si l'on remplace maintenant ces valeurs de χ et ψ dans la seconde des identités précédentes, on obtient:

$$\frac{x'\frac{d\Omega}{dx} + y'\frac{d\Omega}{dy}}{\Omega} = \frac{x'\frac{d\omega}{dx} + y'\frac{d\omega}{dy}}{\omega}.$$

Cette relation, devant aussi être une identité, montre que l'on doit avoir

$$\Omega = k\omega,$$

k désignant une constante.

Ainsi se trouve démontrée la proposition énoncée.

On peut considérer comme cas particulier de cette proposition un résultat dû à Bertrand (Comptes Rendus, t. 84), mais obtenu par une analyse différente, celui relatif au système de coniques

$$ax + by + c = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$

ayant pour foyer commun le point (x_1, y_1). Voici ce que Bertrand dit à ce propos: «Si Kepler n'avait déduit de l'observation qu'une seule de ses lois: *Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe le foyer*, on aurait pu, de ce seul résultat érigé en principe général, conclure que la force qui les gouverne est dirigée vers le Soleil et inversement proportionnelle au carré de la distance.»

5. Remarquons enfin que l'on peut démontrer, d'une manière analogue, cette proposition plus générale:

Les diverses courbes que peut décrire un point (x, y) sollicité par une force

$$X = \chi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

ne dépendant que des coordonnées du point (x, y), ne peuvent coïncider avec les trajectoires d'un point (x, y) sollicité par une autre force analogue

$$X = \chi_1(x, y), \quad Y = \psi_1(x, y),$$

que si l'on a:

$$\chi_1 = k\chi, \quad \psi_1 = k\psi,$$

k désignant une constante.

Athènes, 3 mars 1901.

Bemerkung zu einem Theoreme des Herrn Cwojdziński.

Von EDUARD JANISCH in Prag.

Dafs solche sechs Punkte, wie sie in Theorem V auf S. 178 in (3) **1** dieser Zeitschrift auftreten, überhaupt auf einem Kegelschnitte liegen, ist ohne weiteres zu ersehen; denn sie sind zu zweien zentrisch-symmetrisch inbezug auf den angegebenen Mittelpunkt. Liegt speziell der Punkt, von dem Lote auf die Seiten des Dreiecks gefällt werden, auf dem Umkreis, so zerfällt der Kegelschnitt in die *doppelt zu zählende Simsonlinie* (Wallacelinie) des Punktes.

Der in Rede stehende Satz bleibt auch aufrecht, wenn an Stelle des Höhenschnittes ein beliebiger Punkt tritt, die Höhen durch die nach diesem Punkte gezogenen Ecktransversalen ersetzt und an Stelle der Lote auf die Seiten Parallele zu diesen Ecktransversalen eingeführt werden. Es giebt dann ebenfalls eine dem Dreiecke umschriebene Kurve 2. Ordnung (eine Ellipse), für deren Punkte die durch sie gelegten Parallelen zu den Ecktransversalen Fufspunkte auf den Dreiecksseiten liefern, die in gerader Linie liegen. Die Enveloppe dieser Geraden ist ersichtlich eine *Affine* der *Steinerschen Hypocykloide.*

Die punktweise Konstruktion der erwähnten Kurve 2. Ordnung bietet keine Schwierigkeiten. Nehmen wir eine beliebige Gerade $\mathfrak{g}$ an, welche die Seiten BC, CA, AB des Bezugsdreiecks in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ trifft, nennen wir S den Vertreter des Höhenschnittpunktes, und ziehen wir folgeweise durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die sich zu zweien in $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$ schneiden mögen, so laufen die drei Geraden $A\mathfrak{A}_0$, $B\mathfrak{B}_0$, $C\mathfrak{C}_0$ durch einen Punkt T jenes Kegelschnittes. Dafs die 3 Geraden durch einen Punkt T gehen, ist sofort zu ersehen; denn sie sind die Kollineationsstrahlen für die zwei perspektiven Dreiecke ABC, $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$, deren Kollineationsachse $\mathfrak{g}$ ist. Dreht man nun $\mathfrak{g}$ etwa um $\mathfrak{A}$, so läfst sich leicht nachweisen, dafs der Büschel ($\mathfrak{g}$) projektiv ist mit den Büscheln der Strahlen $B\mathfrak{B}_0$, $C\mathfrak{C}_0$. Das Erzeugnis der letzteren — der Ort von T — ist mithin ein Kegelschnitt, dem die Punkte A, B, C angehören.

Genau dieselben Schlufsfolgerungen gelten aber auch, wenn wir noch weiter verallgemeinern und verlangen: Es soll der Ort der Punkte T gesucht werden, welche die Eigenschaft besitzen, dafs die Schnittpunkte der Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC mit den durch solch einen Punkt gezogenen Parallelen zu den Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ eines zweiten Dreiecks $A'B'C'$ jeweils in einer Geraden g liegen. Der Ort von T wird auch hier ein dem Dreiecke ABC umschriebener Kegelschnitt sein und die Einhüllende der g eine Kurve 3. Klasse, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente besitzt. Über den besonderen Fall, dafs die Ecken des Dreiecks $A'B'C'$ der Reihe nach identisch sind mit den Ecken B, C, A (oder C, A, B) des Dreiecks ABC, wird der Verfasser in dieser Zeitschrift einen längeren Aufsatz veröffentlichen.

Prag, 10. Juni 1901.

Notiz zu meinem Aufsatze[1]): „Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes“.

Von O. Lummer in Charlottenburg.

In meinem oben genannten Aufsatz habe ich das Drapersche Gesetz, demgemäfs alle festen Körper bei derselben Temperatur zu leuchten beginnen, als ungiltig erwiesen. Unmittelbar nach dem Erscheinen des Aufsatzes fiel mir eine Arbeit[2]) neueren Datums in die Hände, in der auf Grund sorgfältiger Versuche von neuem jenes Gesetz bestätigt und die niedrigste Leuchttemperatur des blanken *und* des berufsten Platins zu etwa 370° C angegeben wird. Es sei mir gestattet, ganz kurz auch diese Resultate als einen Trugschlufs nachzuweisen, der durch die Unkenntnis des schwarzen Körpers hervorgerufen ist.

Zunächst revidiert Gray die schon von Draper angewendete Formel, um aus der Ausdehnung des Platins auf seine Temperaturänderung zu schliefsen. Dadurch bringt er die von Draper beobachtete Temperatur (525° C) der ersten Glut mit der von ihm beobachteten (370° C) in genügenden Einklang.

Gray findet, dafs je nach der Helligkeit im Beobachtungsraum (Morgens, Mittags und Abends) die Temperatur der ersten Glut variiert. Systematische Versuche über den Einflufs der Ermüdung des Auges auf jene Temperatur ergeben, dafs ein im dunklen Zimmer (bei Nacht) ausgeruhtes Auge die erste Glut schon bei 370° C bemerken kann. Diese Temperatur geht weit unter die von H. F. Weber und Emden (vergl. meinen vorigen Aufsatz S. 85) an Glühlampenkohle beobachtete (420° C) herab, von deren Versuchen der Verf. keine Kenntnis hat. Über die Farbe dieser ersten Glut wird nichts mitgeteilt.

Uns interessiert hier vor allem das merkwürdige Resultat: „*that the minimum temperature of visibility is the same for a bright polished metallic surface as for one covered with lampblack, although the intensity of the radiation in the two cases may be different.*“

---

1) O. Lummer: Archiv der Math. u. Phys. (3) 1 p. 77—90.

2) P. L. Gray: „The Minimum Temperature of Visibility.“ Proceed. of Roy. Soc. Bd. 13 p. 122—132, 1894—1895, London.

Thatsächlich ist die Strahlung eines blanken und berufsten Platinblechs sehr verschieden grofs, und in meinem vorigen Artikel habe ich gezeigt, dafs zwei so verschiedene Strahler notwendig bei *verschiedenen* Temperaturen über die Schwelle schreiten *müssen*. Obwohl P. L. Gray von seinem Resultat selbst sagt „This result may at first be, to some, unexpected“, glaubt er doch dasselbe a priori als möglich nachweisen zu können; denn er fährt fort; „but a little consideration will show that it might have been, *a priori*, anticipated“.

Die versuchte Erklärung ist aber irrig, ebenso wie das Resultat. Draper kam zu seinem Gesetz, indem er die verschiedenen Substanzen in einem *gleichtemperierten Hohlraum* (Flintenlauf) erhitzte. P. L. Gray erhält ähnliche Resultate, indem er das strahlende Platinblech mit einem kastenförmig gebogenen Messingblech umgiebt, um es vor Zug etc. zu schützen. Eine solche Versuchsanordnung wird freilich keinen grofsen Unterschied in der Glühtemperatur des Platins zeigen, gleichviel ob das Platinblech spiegelnd oder geschwärzt ist. Denn der Beobachter erhält in beiden Fällen nicht nur die reine Platin- oder Rufsstrahlung, sondern *aufserdem die an den Wänden des Messingkastens zum Platinblech zurückgeworfene* „erborgte“ *Strahlung*. Ein im vollkommen spiegelnden Hohlraum befindlicher Strahlungskörper von der Temperatur T liefert sogar nach Kirchhoff die vollkommen „schwarze“ Strahlung dieser Temperatur.

Wollte Gray die *blanke* Platinstrahlung beobachten, so hätte er notwendig den *Kasten* schwärzen müssen, damit jede erborgte Strahlung ausgeschlossen worden wäre. Im spiegelnden Kasten mufsten die Unterschiede zwischen blankem und berufstem Platin wenigstens nahezu verschwinden.

Im Einklang damit, dafs Gray die Strahlung des annähernd schwarzen Körpers beobachtet hat, steht auch sein Resultat, dafs das Leuchten schon bei 370° C beginne. Bei gut im Dunkeln ausgeruhtem Auge konnte ich bei so niedriger Temperatur nur den absolut schwarzen Körper leuchten sehen und zwar nur bei peripherer Beobachtung mittelst der Stäbchen, da die erste Glut die von den Netzhaut*stäbchen* vermittelte, sogenannte „Grauglut“ ist (vergl. meinen vorigen Artikel).

Charlottenburg, 15. Juli 1901.

Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre praktische Verwendung.

Von O. LUMMER in Charlottenburg.[1])

Einleitung: Für die gasförmigen Körper mit diskontinuierlichen Spektren hat man schon aus der Qualität der Strahlung wichtige Schlüsse ziehen können (Spektralanalyse). Bei den kontinuierlichen Spektren der festen und flüssigen Körper sind quantitative Messungen erforderlich, um überhaupt Unterschiede im Strahlungscharakter nachweisen zu können.

Im folgenden beschränken wir uns auf die Betrachtung der reinen *Temperaturstrahlung*, welche vollkommen bekannt ist, sobald man die Strahlungsenergie als *Funktion von Wellenlänge und Temperatur* darstellen kann.

Zwei allen festen und flüssigen Körpern gemeinsame Strahlungseigenschaften bieten sich ohne weiteres der Beobachtung dar:

1. Die Strahlungsenergie steigt mit der Temperatur rasch an und
2. die spektrale Verteilung der Energie (Farbe) ändert sich mit der Temperatur so, dafs mit steigender Temperatur die relative Intensität der kürzeren Wellen zunimmt.

Die älteren, an beliebig herausgegriffenen Körpern unternommenen Versuche konnten zu keinem Strahlungsgesetze von *genereller* Bedeutung führen, da diese Gesetze von Körper zu Körper variieren. Dies ist bis in die neueste Zeit häufig aufser Acht gelassen worden, wiewohl Kirchhoff schon im Jahre 1860 ausgesprochen hat, dafs Strahlungsgesetze von *genereller* Bedeutung nur für einen Körper von besonderer Art zu erwarten sind, den von ihm bei der Herleitung seines Gesetzes

1) Dieser Aufsatz ist als eine Folge des früheren Artikels „Über die Giltigkeit des Draperschen Gesetzes" zu betrachten. Der Verf. giebt hierin auf Ersuchen seitens der Redaktion eine erweiterte Darstellung der neueren in seinem Rapport „Sur le rayonnement des corps noirs" niedergelegten Ergebnisse unter Hinzufügung der inzwischen von ihm und Herrn Pringsheim gewonnenen neuesten Resultate über die Temperaturbestimmung hocherhitzter Körper.

Die Redaktion.

über Absorption und Emission theoretisch definierten *absolut schwarzen* Körper. Dieser ist dadurch charakterisiert, dafs er *„alle Strahlen, die auf ihn fallen, vollkommen absorbiert, also Strahlen weder reflektiert, noch hindurchläfst."* Kirchhoff spricht es auch aus, dafs die Funktion, welche die Energie des schwarzen Körpers in Beziehung zu Wellenlänge und Temperatur setzt, unzweifelhaft von einfacher Form ist, wie alle Funktionen es sind, die nicht von den Eigenschaften einzelner Körper abhängen, und fügt hinzu, dafs erst, wenn auf experimentellem Wege diese Funktion gefunden ist, die ganze Fruchtbarkeit seines Satzes sich zeigen werde. Dieser Satz lautet:

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = e_\lambda ,$$

wo E_λ und A_λ das Emissions- und Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers und e_λ das Emissionsvermögen des vollkommen schwarzen Körpers für die gleiche Temperatur und dieselbe Wellenlänge bedeuten. *Kennt man also die Strahlung des schwarzen Körpers als Funktion von Wellenlänge und Temperatur, so sind dadurch die Strahlungsgesetze für alle diejenigen Körper bekannt, deren Absorptionsvermögen ebenfalls als Funktion von Wellenlänge und Temperatur gegeben ist.* Experimentell einfacher dürfte der umgekehrte Weg sein, durch die Untersuchung der Strahlung eines Körpers mit Hülfe der Kenntnis von e auf die Absorption A zu schliefsen.

1. Das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz. — Auf Grund des bis 1879 vorliegenden Beobachtungsmaterials hat Stefan[1]) das nach ihm benannte Strahlungsgesetz aufgestellt, dafs die *Gesamtstrahlung eines Körpers proportional ist der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur.* Dieser Satz, von dem Stefan irrtümlich glaubte, dafs er die Strahlungseigenschaften so verschiedener Körper, wie Rufs, Platin, Glas etc. darstellte, erlangte seine wahre Bedeutung erst, als Boltzmann auf theoretischem Wege das gleiche Gesetz für den *vollkommen schwarzen* Körper abgeleitet hatte.[2])

a) *Theorie von L. Boltzmann.* — Nach der elektromagnetischen Lichttheorie übt ein Strahl auf die Flächeneinheit bei senkrechter Incidenz einen Druck aus, welcher gleich ist der in der Volumeneinheit in Gestalt dieser Strahlung enthaltenen Energie. Nach Analogie einer in der kinetischen Gastheorie üblichen Schlufsweise wird gefolgert, dafs in einem Würfel mit gleichtemperierten Wänden auf jede Würfelfläche

1) J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Wien (2) **79**, 391—428. 1879.

2) L. Boltzmann, Wied. Ann. **22**, 31 ff. und 291—294, 1884.

nur ein Drittel der gesamten Strahlen drückend wirkt. In einem solchen Raume ist nach Kirchhoff die Strahlungsdichtigkeit die eines *schwarzen* Körpers und die Strahlungsenergie eine bloſse Funktion der Temperatur. Ist die Gesamtstrahlung in der Volumeneinheit gleich $\psi(t)$, so wird der Ätherdruck $f(t)$ auf die Flächeneinheit:

$$f(t) = \tfrac{1}{3}\,\psi(t). \tag{1}$$

Bartoli[1]) hatte einen Kreisprozeſs ausgedacht, durch den er die Existenz des Ätherdrucks in einem durchstrahlten Raume als Folge des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie erweist. Die Existenz und die Gröſse des Ätherdrucks folgert Boltzmann, wie oben erwähnt, aus der elektromagnetischen Lichttheorie; den Bartolischen Kreisprozeſs benutzt er, um zwischen dem Ätherdruck $f(t)$ und der Strahlungsenergie $\psi(t)$ des schwarzen Körpers eine quantitative Beziehung abzuleiten, von der Form:

$$t\,df - f\,dt = \psi\,dt. \tag{2}$$

Mit Hülfe der Formel (1) folgt somit:

$$\frac{t \cdot d\psi}{3} = \tfrac{4}{3}\psi\,dt,$$

welche Gleichung durch Integration giebt:

$$\psi = \text{const.}\ t^4. \tag{3}$$

Hier bedeutet t die absolute Temperatur; die Integrationskonstante ist gleich Null gesetzt, d. h. es wird angenommen, daſs für den absoluten Nullpunkt die Strahlung des schwarzen Körpers gleich Null ist. Das Stefan-Boltzmannsche Gesetz wollen wir in der Form schreiben:

$$S = \int_0^\infty E\,d\lambda = \text{const.}\ T^4, \tag{I}$$

wo S die Gesamtstrahlung und E die zur Wellenlänge λ gehörige Strahlung des schwarzen Körpers von der absoluten Temperatur T bedeutet.

b) *Versuche von O. Lummer und E. Pringsheim.* — Die Prüfung des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes scheiterte lange daran, daſs keine schwarzen Körper bekannt waren, welche „Strahlen weder reflektieren, noch hindurchlassen“. Erst als die von Kirchhoff aus seinem Gesetze gefolgerte charakteristische Eigenschaft eines gleichtemperierten Hohlraums (vergl. den Aufsatz p. 164 und ff.) erkannt und benutzt war,

1) Bartoli: „Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore“. Le Monnier 1876. Vergl. auch L. Boltzmann. Wied. Ann. 22, 31. 1884.

um die Strahlung des schwarzen Körpers mit grofser Annäherung auch bei den höchsten Temperaturen zu verwirklichen[1]), konnte eine experimentelle Prüfung vorgenommen werden, welche ich mit W. Wien begann und mit E. Pringsheim durchführte. Wir bedienten uns zu diesem Zwecke[2]) metallischer, innen geschwärzter Hohlkörper, aus deren Innerem die Strahlung durch eine Öffnung der Wand nach aussen gelangen konnte. Es zeigte sich, dafs thatsächlich innerhalb des beobachteten Temperaturintervalls von 100° bis etwa 1300° C die Gesamtstrahlung mit grofser Annäherung zur vierten Potenz der absoluten Temperatur fortschreitet.

In unserer damaligen Publikation hatten wir die thermoelektrischen Temperaturmessungen auf das von Holborn und Wien[3]) an das Gaspyrometer angeschlossene Le Chateliersche Normalelement bezogen. Nachdem nunmehr die Temperaturskala von Holborn und Day[4]) bis 1150° C mit dem *Stickstoff*thermometer neu festgelegt und darüber hinaus mittels Extrapolation an die thermoelektrische Kraft des Thermoelementes angeschlossen worden ist, haben wir die damals gemessenen Temperaturen auf die neue Skala umgerechnet. Die so umgerechneten Resultate sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Nr.	I. Schwarzer Körper	II. Abs. Temp. beobachtet	III. Reduziert. Ausschlag	IV. $C.\ 10^{10}$	V. Abs. Temp. berechnet.	VI. T. beob. — T. ber.
1	Siedetopf	373,1	156	127	374,6	− 1,5°
2	Salpeterkessel	492,5	638	124	492,0	+ 0,5
3	„	723,0	3 320	124,8	724,3	− 1,3
4	„	745	3 810	126,6	749,1	− 4,1
5	„	810	5 150	121,6	806,5	+ 3,5
6	„	868	6 910	123,3	867,1	+ 0,9
7	Chamotteofen	1378	44 700	124,2	1379	− 1
8	„	1470	57 400	123,1	1468	+ 2
9	„	1497	60 600	120,9	1488	+ 9
10	„	1535	67 800	122,3	1531	+ 4
			Mittel	123,8		

In ihr ist A der mit dem Bolometer und Galvanometer gemessene und auf die Klappentemperatur 17° C (290° abs.) reduzierte Ausschlag

1) W. Wien u. O. Lummer, Wied. Ann. **56**, 451—456. 1895.
2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Wied. Ann. **63**, 395—410. 1897.
3) L. Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. **47**, 121. 1892.
4) L. Holborn und A. Day, Wied. Ann. **68**, 817. 1899; Ann. d. Phys. **2**, 505. 1900.

und T die zugehörige absolute Temperatur des schwarzen Körpers; es folgt also C nach dem Stefanschen Gesetz aus der Gleichung

$$A = C(T^4 - 290^4).$$

Die so gefundenen Werte von C multipliziert mit 10^{10} sind in Kolumne IV angegeben. Mit dem Mittelwert von C ist aus der obigen Gleichung T berechnet und in Kolumne V eingetragen worden. Die Zahlen der Kolumne VI zeigen, dafs sich die Abweichungen der Resultate vom Stefanschen Gesetz schon durch relativ kleine Fehler in der Temperaturbestimmung würden erklären lassen. Der kleine, bei Benutzung der alten Temperaturskala beobachtete Gang in der Abweichung vom Stefanschen Gesetz fällt bei der neuen Skala ganz fort.

Unsere Versuche bestätigen somit nicht nur die Richtigkeit des Stefanschen Gesetzes, sondern *unter Voraussetzung dieses Gesetzes hätten sie sogar dazu dienen können, eine wahrscheinliche Korrektion für die ältere Temperaturskala aufzustellen.*

Diese Versuche boten aufserordentliche technische Schwierigkeiten dar, da es nur mit grofser Mühe gelingt, Hohlkugeln in einem Chamotteofen auf eine überall gleichmäfsige Temperatur zu bringen und auf konstanter Temperatur zu halten.

c) *Versuche mit dem elektrisch geglühten schwarzen Körper.* — Um den Giltigkeitsbereich dieses Fundamentalgesetzes der schwarzen Strahlung noch zu erweitern, konstruierte ich mit F. Kurlbaum[1]) den *„elektrisch geglühten“* schwarzen Körper, welcher die schwarze Strahlung nicht nur in relativ einfacher Weise, sondern auch noch bis zu Temperaturen von über 1600° C liefert. Die mit diesem Körper ausgeführten Versuche lehren, dafs das Stefan-Boltzmannsche Gesetz unter Zugrundelegung der Holborn-Dayschen extrapolierten Temperaturskala sogar bis 1600° C und darüber hinaus giltig ist.

Wenn auch erst unsere Versuche mit der „schwarzen“ Strahlung eine Klärung und endgiltige Entscheidung gebracht haben, so möchte ich es nicht unterlassen, der Versuche Schneebelis[2]) zu gedenken, welcher ebenfalls das Stefansche Gesetz bestätigte und mit seinem Resultat ganz vereinzelt dasteht, insofern die Experimentatoren vor und nach ihm, wie Schleiermacher, Bottomley, H. F. Weber, Edler u. and. zum Teil ganz bedeutende Abweichungen vom Stefanschen Gesetze konstatieren und F. Paschen[3]) noch im Jahre 1893 aus seinen

1) O. Lummer und F. Kurlbaum: Verhdlgn. d. Phys. Ges. Berlin **17**, 106—111, 1898 und Ann. d. Physik (4) **5**, 829—836, 1901.

2) Schneebeli, Wied. Ann. **22**, 430—438, 1884.

3) F. Paschen, Wied. Ann. **49**, 50—68, 1893.

Messungen am blanken und berufsten Platin schliefsen zu müssen glaubt, dafs wahrscheinlich „sich alle festen Körper ähnlich wie Platin verhalten werden“. Demgegenüber sei erwähnt, dafs nach unseren Versuchen[1]) die Strahlung des blanken Platins fast genau zur fünften Potenz fortschreitet und Rufs, wenigstens in genügend dicken Schichten, nahe das Stefansche Gesetz befolgt.

d) *Versuche Schneebelis.* — Die auffallende Thatsache, dafs Schneebeli als der Einzige das Stefansche Gesetz innerhalb eines ziemlich grofsen Temperaturintervalls fast vollkommen bestätigen konnte, läfst sich nach meiner Meinung leicht aus Schneebelis Versuchsanordnung erklären, die abweichend von allen vorhergehenden und nachfolgenden ist, und durch die Schneebeli eine Strahlung mifst, welche der „schwarzen“ sehr nahe kommen dürfte.

Schneebeli verwendet als Strahlungsquelle die *Gefäfswand eines Luftthermometers*, dessen Inhalt etwa 500 ccm beträgt und mit einem Kapillarrohr von 1 Meter Länge versehen ist. Als Heizquelle dient ein doppelwandiger sogen. Perrotscher Ofen aus Chamotte, in dessen innerem Hohlraum das Luftthermometergefäfs auf eine nahe gleichmäfsige Temperatur gebracht wird. So kann er zunächst sehr genau die Temperatur der strahlenden Gefäfswand beſtimmen, jedenfalls genauer, als es alle anderen Methoden zu jener Zeit erlaubten.

Um die Strahlung der äusseren Wand zum Bolometer gelangen zu lassen, *durchbohrt er die beiden Ofenwände, schiebt ein dünnes Eisenrohr bis nahe an die Gefäfswand* und bringt aufsen geeignete Öffnungen an, um jede „falsche Strahlung“ auszuschliefsen.

Diese Anordnung bewirkt aber gerade das Gegenteil und statt der blofsen Strahlung der äufseren Gefäfswand, mifst Schneebeli die Strahlung eines fast geschlossenen Hohlraums. Das im gleichen Heizraum wie das Thermometergefäfs befindliche Eisenrohr wird nämlich auch dessen Temperatur angenähert annehmen, sodafs man aufser der an und für sich schon stark strahlenden Porzellanwand des Luftthermometers auch noch die an ihr reflektierte „erborgte“ Strahlung des glühenden Eisenrohrs gleicher Temperatur erhält. In Wirklichkeit kommt also zum Bolometer *die Strahlung eines nahe gleichtemperierten Hohlraums*, deren „Schwärze“ diejenige von freistrahlenden Metalloxyden etc. jedenfalls bei weitem übertrifft.

Und um allen Bedingungen der Neuzeit gerecht zu werden, benutzt

1) O. Lummer und F. Kurlbaum, Verhdlgn. d. Deutsch. Physik. Ges. Bd. I, Nr. 12, 1899, und O. Lummer und E. Pringsheim ebenda Bd. I, Nr. 12, 1899.

Schneebeli nach dem Vorbild von Baur[1]) als Bolometer ein Stanniolgitter, welches mittelst *Platinchlorids* geschwärzt ist und verwendet so wiederum unbewufst den schwärzesten Stoff (Platinmoor) als Empfänger.

Durch diese glückliche Vereinigung verschiedener Umstände erhält Schneebeli bei sehr sorgfältiger Ausführung der Messungen die folgenden Werte:

T_1	379	719	854	1007	971	1013	1097	1177° abs.
$(T_1^4 - T_2^4)/S$	9,2	10,2	10,9	10,6	71	71,6	71,5	73,5

wo T_1 die absolute Temperatur der Gefäfswand, T_2 diejenige des Bolometers und S die auf gleiches Mafs (für jede Reihe) reduzierte Strahlungsmenge bedeutet.

Die geringen Abweichungen erklären sich zwanglos aus der Schwierigkeit der Temperaturbestimmung mittels des Luftthermometers bei hohen Temperaturen. Dahingegen scheint mir der Graetzsche Einwand, ob die gemessene Temperatur auch wirklich die der strahlenden Wand sei, von geringem Einflufs, insofern es ja nur auf *relative* Temperaturen ankommt. Auch der von Schneebeli selbst erörterte und später von Paschen gerügte Übelstand, dafs bei jedesmaliger Strahlungsmessung durch Hochziehen der Klappe ein kalter Luftstrom eintritt, dürfte aus demselben Grunde ohne grofsen Einflufs auf die Resultate gewesen sein.

Wie dem auch sei, durch die glücklich gewählte Versuchsanordnung hatte Schneebeli einen so gewaltigen Vorsprung vor allen anderen mit *freistrahlenden* Oberflächen operierenden Beobachtern, dafs er erst nach der Verwirklichung der schwarzen Strahlung überholt werden konnte. Alle zur Prüfung des Stefanschen oder zur Auffindung eines allgemein giltigen Strahlungsgesetzes an beliebigen Substanzen wie Platin, Eisenoxyd etc. unternommenen Versuche mufsten notwendig scheitern, *da nur der schwarzen Strahlung das Gesetz der vierten Potenz zukommt.*

Trotz Aufwandes von ungeheuerer Arbeit und Anwendung der verschiedensten, oft sinnreichen Methoden haben die Versuche mit *freistrahlenden* Oberflächen eigentlich nur gezeigt, dafs das anfangs lange für richtig gehaltene Gesetz von Dulong & Petit ganz auszuscheiden hat, ohne aber die Frage nach „dem Strahlungsgesetz" zu lösen. Dabei war man so tief in die von Stefan verbreitete Idee, dafs alle Körper

1) C. Baur, Verhdlgn. d. Phys. Ges. Berlin, Nr. 4, 15, 1882 und Wied. Ann. **19**, 17—21, 1883.

das gleiche Strahlungsgesetz befolgen, eingedrungen, *dafs man lieber die Richtigkeit der vorhandenen Versuche in Zweifel zog*, als dafs man aus den für Platin und Rufs, Eisenoxyd und Glas erhaltenen, einander widersprechenden Resultaten auf die Unrichtigkeit jener Idee schlofs.

2. Geschichtliches zur Verwirklichung der schwarzen Strahlung. — Beim Studium der Litteratur auf dem Gebiete der Strahlung kann man sich der Erkenntnis nicht erwehren, dafs im grofsen und ganzen ziemlich planlos gearbeitet worden ist. Auch begreift man schwer, warum der schwarzen Strahlung so wenig Beachtung geschenkt wurde, wenn man bedenkt, dafs Kirchhoff schon im Jahre 1860 mit genialem Scharfblick nur der schwarzen Strahlung allgemeingültige Naturgesetze voraussagte, und dafs Boltzmann 1884 auf theoretischem Wege das Stefansche Gesetz als das Gesetz der schwarzen Strahlung wahrscheinlich machte. Aber noch mehr! Auch kostbare Fingerzeige in Bezug auf die *Verwirklichung* der schwarzen Strahlung sind unbenutzt gelassen worden. Denn abgesehen von der Kirchhoffschen Hohlraumtheorie existieren zwei Arbeiten, in denen die Verwirklichung der schwarzen Strahlung teils ausgeführt, teils vorgeschlagen war, schon zu einer Zeit, nach der man noch lange vergeblich bemüht war, der schwarzen Strahlung beizukommen. Es ist nur eine Pflicht der Billigkeit, auch diese Arbeiten näher zu beleuchten.

a) Zunächst kommt hier die Arbeit Christansens „Über die Emission der Wärme von unebenen Oberflächen" in Betracht.[1])

Um die Thatsache zu erklären, dafs das Emissionsvermögen der Metalle durch Ritzen der Oberfläche wesentlich erhöht wird, geht Christiansen von folgender Überlegung aus: „Fällt strahlende Wärme auf eine unebene Fläche, so verlassen mehrere Strahlen erst nach der zweiten oder dritten Reflexion die Oberfläche; es findet also eine vergröfserte Absorption statt und daraus folgt nach dem bekannten Gesetze von dem Zusammenhang zwischen Wärmeemission und -absorption, dafs das Emissionsvermögen einer solchen Fläche gröfser als das einer ebenen Fläche ist."

Zur Verifikation dieser Überlegung liefs Christiansen einen Lesliewürfel strahlen, dessen 4 Seitenflächen verschieden gestaltet und matt versilbert waren. Von diesen war die erste ganz eben und glatt, die dritte aber mit 121 *konischen Löchern* versehen, während die anderen aus ebenen unter Winkeln von 45° und 90° gegen einander geneigten Flächenteilen bestanden. Bei Berücksichtigung der *durch Reflexion ge-*

1) C. Christiansen Wied. Ann. **21**, 364—369. 1884.

wonnenen Strahlungsmengen, folgt für das Verhältnis der Energie der vier Flächen in erster Annäherung:

$$W_1 : W_2 : W_3 : W_4 = 1 : 2 : \tfrac{3}{4} + \frac{\alpha}{4a} : 2{,}75,$$

wenn mit α das Emissionsvermögen der *Löcher,* mit a das Absorptionsvermögen des Silbers bezeichnet und das Absorptionsvermögen des schwarzen Körpers gleich Eins gesetzt wird. Der Versuch aber ergab für dieselben Flächen das Strahlungsverhältnis:

$$W_1 : W_2 : W_3 : W_4 = 1 : 2{,}05 : 8{,}7 : 2{,}66,$$

sodafs die Bedeutung der Oberflächenformen sehr deutlich herausspringt und aufserdem das interessante Resultat folgt:

$$\tfrac{3}{4} + \frac{\alpha}{4a} = 8{,}7, \text{ also } \alpha = 32a.$$

Setzt man auch noch das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers bei der Beobachtungstemperatur gleich Eins, so sagt diese Gleichung aus, dafs *das Emissionsvermögen der Löcher 32 mal gröfser als das der ebenen Fläche ist.* Für das Absorptionsvermögen des Silbers erhielt Christiansen $a = 0{,}039$, sodafs das Emissionsvermögen der Löcher

$$\alpha = 1{,}04$$

wird und Christiansen mit einigem Recht folgert: „*Man sieht also, dafs sie als kleine vollkommen schwarze Flecken wirken.*“

Abgesehen von der wichtigen Thatsache, dafs hier zum ersten Male der Weg zur Verwirklichung der schwarzen Strahlung gezeigt worden ist, scheint mir das Resultat wichtig, dafs in praxi schon konische Hohlräume die schwarze Strahlung liefern, welche nach Kirchhoffs Folgerung nur in vollkommen *geschlossenen* Hohlräumen besteht.

Aber auch Christiansen scheint mit der Kirchhoffschen Hohlraumtheorie nicht vertraut gewesen zu sein, da er weder diese als Erklärung für seine Resultate heranzieht, noch den Namen Kirchhoffs überhaupt erwähnt. Es bestätigt sich somit auch hier, dafs man bei dem ungeheuren Reichtum, welchen der Kirchhoffsche Satz für die Spektralanalyse und die Kenntnis der Gestirne mit sich brachte, die wichtigen strahlungstheoretischen Folgerungen Kirchhoffs aus seinem Gesetze fast gar nicht beachtete.

b) Um so überraschender wirkt es, dafs unmittelbar darauf Boltzmann sogar die wichtige *praktische* Konsequenz der Hohlraumtheorie Kirchhoffs zieht, welche zur Realisierung der schwarzen Strahlung führt. In seiner Arbeit[1]): „*Über eine von Hrn. Bartoli entdeckte Be-*

1) L. Boltzmann, Wied. Ann. 22, 31 u. ff. 1884.

ziehung der Wärmestrahlung zum zweiten Hauptsatz" streut Boltzmann gelegentlich mitten in die numerische Berechnung jener Beziehung folgende interessante Bemerkung ein:

„Ich bemerke hier gelegentlich, dafs ich schon längere Zeit die experimentelle Untersuchung der Wärmestrahlen teils im ganzen, teils zum Zwecke spektraler Zerlegung begann, indem ich die Strahlung eines rings mit gleichtemperierten Wänden umgebenen Raumes aus einem kleinen Loche oder Spalte dieser Wände für die eines schwarzen Körpers substituierte, ein Prinzip benutzend, welches unlängst Christiansen zur Erklärung der stärkeren Strahlung geritzter Metalle anwandte. Durch Vergleichung mit der Strahlung ebener Körper könnte dann auch deren Emissionsvermögen bestimmt werden."

In dieser Arbeit geht Boltzmann von der Bartolischen Herleitung aus, dafs die Wärmestrahlen bei der Bestrahlung einen *Druck* auf den Körper ausüben. Mit Hilfe eines Kreisprozesses wird sodann eine numerische Beziehung zwischen dem Ätherdruck und der Wärmestrahlung im spiegelnden Hohlraum berechnet und durch Übertragung des Stefanschen Gesetzes auf diese „schwarze" Strahlung die Gröfse des Ätherdrucks abgeleitet. Es ist dies die numerische Beziehung, welche Boltzmann kurz nachher in seiner oben excerpierten Arbeit: *„Ableitung des Stefanschen Gesetzes, betreffend die Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie"* verwendet, um das Stefansche Gesetz als dasjenige der schwarzen Strahlung zu erweisen.

In dieser viel gelesenen und berühmt gewordenen Arbeit spricht aber Boltzmann weder von seiner Absicht, experimentelle Strahlungsmessungen ausführen zu wollen, noch wiederholt er auch nur mit einem Wort jenen Vorschlag, die schwarze Strahlung durch einen gleichtemperierten Hohlraum mit einer Öffnung zu realisieren. Nur so konnte diese Idee in Vergessenheit geraten, zumal Boltzmann nach seiner eigenen Aussage die begonnenen Experimente wegen der experimentellen Schwierigkeiten nicht durchgeführt hat. Es dürfte interessieren, dafs sogar Boltzmann selber es vergessen hatte, seine Idee publiziert zu haben, wie überhaupt damals offenbar kein Interesse für die schwarze Strahlung vorhanden war, insofern auch die Referate in den Fortschritten der Physik und den Beiblättern nichts von Boltzmanns Vorschlag enthalten.

Während aber diese wichtigen Bausteine von den Experimentatoren unbenutzt am Boden liegen gelassen wurden, trug Boltzmanns Theorie noch reiche Früchte, zu denen vor allem die von W. Wien für die *maximale* Energie der schwarzen Strahlung im Spektrum abgeleiteten

Gesetze gehören. Auf die Herleitung dieser Gesetze und ihre experimentelle Bestätigung kommen wir später ausführlich zurück.

c) Wie schon erwähnt, datiert die experimentelle Messung der schwarzen Strahlung erst von dem Zeitpunkt, da W. Wien und ich von neuem die Verwirklichung schwarzer strahlender und *absorbierender* Körper in Gestalt gleichtemperierter Hohlräume vorschlugen.[1]) Durch die Erfahrung hatten wir erkannt, dafs der Verwendung von Platinblechen, die mit Metalloxyden überzogen sind, vorerst rein technische Hindernisse im Wege stehen. Die Überzüge sind nicht gleichmäfsig herzustellen und verdampfen in hoher Temperatur. Glüht man sie elektrisch, so grenzen infolge ungleichmäfsigen Überzuges bedeutende Temperaturdifferenzen an einander, die *stationär* neben einander bestehen bleiben. Bestreicht man z. B. ein blankes Platinblech auf einer Seite mit einer feuerfesten Substanz, so ist die Rückseite der bestrichenen Stelle stets dunkler als ihre Umgebung, während die Leuchtkraft der bestrichenen Stelle bei geringer Ausdehnung sogar heller vom glühenden Platin sich abhebt, trotz ihrer niedrigeren Temperatur. Aufserdem bereitet die Temperaturbestimmung eines solchen elektrisch geglühten Bleches sehr grofse Schwierigkeiten. Auch sind, wie erwähnt, die Metalloxyde weit entfernt, wie der schwarze Körper zu strahlen, während Rufs oder Platinmoor in höheren Temperaturen ihre Eigenschaften ändern und Glas schon bei niederen Temperaturen schmilzt. Das reine Platin ist aber selbst im geschmolzenen Zustand ein vollkommener Spiegel, ähnlich dem Quecksilber. Gerade diese Eigenschaft zu spiegeln führt nun dazu, die Körper zu schwarzen zu machen, wenn man zu ihrer Eigenstrahlung noch fremde „erborgte" Strahlung fügt, indem man sie durch andere glühende Körper bestrahlen läfst.

Es lassen sich leicht die Bedingungen ableiten, unter denen ein *beliebiger* Körper die *schwarze* Strahlung aussendet.

Für undurchsichtige Körper, wie Platin, gilt zwischen Absorptions- und Reflexionsvermögen die Beziehung:

$$A = 1 - R,$$

sodafs das Kirchhoffsche Gesetz die Form annimmt:

$$e = E + eR,$$

alle Gröfsen bezogen auf die gleiche Wellenlänge und Temperatur. In dieser Form lautet das Gesetz also: *Die Emission des schwarzen Körpers ist gleich der Emission eines beliebigen Körpers, vermehrt um den Bruchteil der schwarzen Strahlung, welcher von dem betreffenden Körper*

1) W. Wien und O. Lummer, Wied. Ann. 56, 451—456. 1895.

reflektiert wird. Nur wenn $R = 0$ ist, wird auch $e = E$. Ist, wie beim blanken Platin, R sehr grofs, das Absorptionsvermögen A also sehr klein [nicht zu verwechseln mit dem Absorptionsindex oder Absorptionskoeffizienten, welcher im Gegenteil für jedes Metall sehr grofs ist], so mufs auch die „erborgte" Strahlungsmenge (eR) sehr grofs werden, damit die Platinstrahlung der schwarzen gleich wird. Berechnet man z. B. die gegenseitige Zustrahlung zweier Platinbleche, so findet man, dafs sie sich wie zwei schwarze bestrahlen, wenn beide Bleche die gleiche Temperatur haben und einander entweder unendlich nahe sind oder bei endlicher Entfernung genügend grofse Ausdehnung haben.[1]) Man gelangt also auch hierdurch zu dem Resultat, welches Kirchhoff ganz allgemein in seiner Theorie des Hohlraums mit gleichtemperierten Wänden ausgesprochen hat.

Nach einer von Kirchhoff aus seinem Gesetze gezogenen Folgerung stellt sich nämlich im Innern eines jeden von gleichtemperierten, übrigens *beliebigen* Körpern umgebenen Raumes eine solche Dichtigkeit der Energie der Strahlung her, als ob diese Körper vollkommen schwarz wären. Man hat also die sogenannte Strahlung eines schwarzen Körpers als den Zustand des Wärmegleichgewichts aufzufassen, weshalb Herr Wien vorgeschlagen hat, die Strahlung eines schwarzen Körpers überhaupt als *„Zustand des Wärmegleichgewichts"* zu definieren.[2]) Diese strengere Definition wird auch gerechtfertigt durch die Überlegung, dafs es Körper, die in Luft sich wie schwarze Körper verhalten, praktisch nicht geben kann, weil jeder Körper Dispersion zeigen mufs, also nicht für alle Farben denselben Brechungsindex haben kann.

Um die schwarze Strahlung dem Experiment zugänglich zu machen, mufs man notwendig in den gleichtemperierten Hohlraum eine Öffnung machen, durch welche die Strahlung nach aufsen gelangt.

Von dieser Öffnung erhält die innere Oberfläche keine Strahlung, und hierdurch wird eine Abweichung vom Zustande des Wärmegleichgewichts bedingt. Den Grad der Abweichung berechnet man am besten durch Aufsuchung der Strahlung, die von einem ins Innere gelangenden Strahlenbündel wieder nach aufsen reflektiert wird.[3]) Nach dem Kirchhoffschen Satz ergiebt sich hieraus dann auch die Emission des Hohlraums.

Durch Umkehrung des ausgesprochenen Prinzips gelangten wir ohne weiteres auch zur Verwirklichung *schwarzer absorbierender* Bolo-

1) Näheres siehe O. Lummer, Naturwissensch. Rundschau **11**, No. 6, 7 und 8. 1896.

2) W. Wien, Wied. Ann. **52**, 133. 1894.

3) W. Wien und O. Lummer a. a. O.

meter. Da es aber schwer ist, vollkommene Hohlräume aus dünnem Blech von 1/1000 mm Dicke herzustellen, wie es Kurlbaum und ich zu unseren Bolometern[1]) verwenden, und da auch die Empfindlichkeit wegen des geringen Widerstands darunter leiden würde, so wendet man hier vorteilhafter *spiegelnde* Hüllen an. Denn nach Kirchhoff stellt sich nicht nur im gleichtemperierten, sondern auch im *vollkommen spiegelnden* Hohlraum die schwarze Strahlung her. Mag die spiegelnde Hülle aber genügen, um die mit stark absorbierenden Substanzen wie Rufs und Platinmoor belegten Bolometerstreifen noch absorbierender erscheinen zu lassen[2]), zur Erzeugung der schwarzen *Strahlungsenergie*, zumal bei hohen Temperaturen, ist die spiegelnde Hülle zu verwerfen. Hier verdient der gleichtemperierte Hohlraum entschieden den Vorzug, und es kann der von Paschen verwendete elektrisch geglühte Platinstreif im spiegelnden Hohlraum nicht als schwarzer Körper angesehen werden.

d) Auf sehr originellem Weg kam gleichzeitig mit uns St. John[3]) zu der Verwirklichung der schwarzen Strahlung, als er die Strahlungseigenschaften der im Auerstrumpf enthaltenen Erden untersuchte. St. John brachte in einem Chamotteofen blanke und geschwärzte Platinbleche zur Weifsglut und liefs deren Strahlung durch eine Öffnung des Ofens austreten. Die aufsen sehr verschieden emittierenden Substanzen erschienen im Ofen dem Auge von so nahe gleicher Helligkeit, dafs St. John anfangs glaubte, es seien die Oxyde abgefallen. Als durch Einführung eines *gekühlten* Eisenrohres die Reflexe der Ofenwände des glühenden Heizraumes abgeblendet wurden, erschienen die Helligkeitsunterschiede wieder wie aufserhalb des Ofens. Die Johnschen Versuche zeigen also aufser der Wirkung des gleichtemperierten Hohlraums, dafs die bedeutende Strahlung der Substanzen im Auerstrumpf nicht einer Luminiszenzwirkung zu verdanken, sondern eine Folge reiner Temperaturstrahlung ist. Um diese Frage exakt zu entscheiden und die Abweichungen luminiszierender Körper vom Kirchhoffschen Gesetz experimentell festzustellen, hatten auch Wien und ich a. a. O. vorgeschlagen, einen gleichtemperierten Hohlraum innen mit den betreffenden Substanzen zu belegen und die Strahlung mit der des schwarzen zu vergleichen.

Im Gegensatz zu St. John schiebt Bunte[4]) die enorme Strahlung der seltenen Erden auf eine „*katalytische*“ Wirkung, infolge deren den

1) O. Lummer und F. Kurlbaum, Wied. Ann. **46**, 204—224, 1892.

2) Über die Ausführung vergl. F. Paschen, Wied. Ann. **60**, 722, 1897 und O. Lummer und E. Pringsheim, Wied. Ann. **63**, 397, 1897.

3) Ch. E. Saint-John, Wied. Ann. **56**, 433—450, 1895.

4) Bunte, Verhdlgn. d. Deutsch. Chem. Ges. Berlin 1899.

feinsten Teilchen eine höhere Temperatur erteilt wird, als sie die Bunsenflamme besitzt. Und bei der experimentellen Prüfung der Strahlung der verschiedenen Erden findet Bunte thatsächlich, dafs die im Auerlicht stark- und schwachleuchtenden Mischungen *gleiches* Strahlungsvermögen haben. Da Bunte diese Substanzen aber in einem langen, elektrisch geheizten Kohlerohr glüht, so sind seine Versuche nicht beweiskräftig; vielmehr begeht er hier denselben Trugschlufs wie seinerzeit Draper (vergl. d. Z. S. I S. 82) und hat wie dieser durch das gefundene Resultat lediglich die Kirchhoffsche Theorie vom gleichtemperierten Hohlraum bestätigt.

So sehen wir auch an diesem Beispiele, dafs erst die Kenntnis des schwarzen Körpers und seiner Verwirklichung zu einwandsfreien Resultaten auf dem Gebiete der Strahlung führen konnte.

(Fortsetzung folgt.)

Über die Bedeutung elektrischer Methoden und Theorien für die Chemie.

Von W. Nernst in Göttingen.

Vortrag [1]), gehalten am 27. September 1901 auf der 73. Naturforscherversammlung zu Hamburg.

Wenn in der anschaulichen Sprache der Atomistik die Chemie als die Wissenschaft von der Bildung der Moleküle überhaupt aus den Atomen und von ihrem Zerfall in die Atome bezeichnet werden kann, so beschäftigt sich die *Elektrochemie* mit dem Werden und Vergehen elektrisch geladener Moleküle, die man nach Faraday kurzweg als Ionen bezeichnet. Da nun in zahlreichen chemischen Reaktionen die Ionen eine bereits klar erkannte Rolle spielen und da in vielen anderen ihre Mitwirkung, wenn auch noch nicht sicher, so doch wahrscheinlich ist, so springt die Bedeutung der Elektrizitätslehre auch für die reine Chemie, nicht nur für die Elektrochemie, in die Augen; alle elektrischen experimentellen Methoden und alle theoretischen Erwägungen aus der Elektrizitätslehre, die auf die Ionen Anwendung finden, sind der Chemie bereits von Nutzen oder können es werden.

Nun ist es eine wichtige Erfahrungsthatsache, dafs gerade das Wasser zahlreiche gelöste Stoffe in Ionen zu spalten vermag; dadurch ist dies Lösungsmittel für die Elektrochemie nicht nur, sondern für die Chemie überhaupt von der allergröfsten Bedeutung. Es ist übrigens kaum daran zu zweifeln, dafs auch die fundamentale Rolle des Wassers im tierischen und pflanzlichen Organismus auf verwandte Ursachen zurückzuführen ist. Wahrscheinlich hängt das eigenartige Verhalten des Wassers mit seiner hohen Dielektrizitätskonstante zusammen, welche in der That diesem Lösungsmittel eine ganz besondere Stellung zuerteilt. Jedenfalls ist es von vornherein klar, dafs in den experimentellen

---

1) Das Folgende ist ein Auszug aus dem Vortrag, den Herr W. Nernst am 27. IX. 1901 auf der 73. Naturforscherversammlung zu Hamburg gehalten hat. Der vollständige Vortrag ist bei Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, erschienen. Red.

Methoden der Elektrochemie die wässerigen Lösungen die vielseitigsten und bequemsten Versuchsobjekte sind.

Wenn wir also nunmehr dazu übergehen wollen, die wichtigsten elektrischen Methoden der Chemie kurz zu charakterisieren, so wissen wir bereits, dafs es sich hierbei immer um Ionen handeln wird. Bei der Behandlung dieser Frage ergab sich nun das von vornherein anschauliche Resultat, dafs bei der Untersuchung der Ionen alle Methoden anwendbar sind, die über den Bau der gewöhnlichen elektrisch neutralen Moleküle uns zu unterrichten sich eignen; man kann Molekulargewichtsbestimmungen und Konstitutionsbestimmungen an den Ionen genau so ausführen, wie an den gewöhnlichen Molekülen. Dazu aber treten als neu und eigenartig diejenigen Methoden hinzu, welche sich an die elektrische Ladung der Ionen wenden, und dieses sind eben die elektrischen Methoden der Chemie. Ich glaube, dafs der vorstehende einfache Satz die vollständige Systematik der elektrochemischen Forschungsmethode enthält.

Wenn wir also z. B. ein Salz in wässeriger Lösung untersuchen wollen, so werden wir zunächst durch Anwendung der van t'Hoff-Avogadroschen Regel das Molekulargewicht bestimmen können; hierdurch allein werden wir in vielen Fällen, wie Arrhenius, der Begründer der modernen Anschauung über die elektrolytische Dissoziation, zuerst gezeigt hat, über Menge und Art der Ionen, in welche das Salz zerfallen ist, Auskunft erhalten, besonders wenn wir damit das Heranziehen chemischer Analogien verbinden; in den meisten Fällen sind ja, wie Hittorf schon in seinen klassischen Arbeiten nachwies, die chemischen Radikale mit den Ionen identisch, und über die Natur dieser Radikale giebt das allgemeine chemische Verhalten des Salzes in der Regel hinreichenden Aufschlufs. Wie schon bemerkt, stehen uns aber auch spezifisch elektrische Methoden zur Verfügung, und indem wir einerseits von der Thatsache Gebrauch machen, dafs die Ionen unter dem Einflufs elektrischer Kräfte zu wandern vermögen, und dafs andererseits die elektromotorische Kraft zwischen Metall und der Lösung durch Natur und Menge der Ionen bestimmt wird, gewinnen sowohl Messungen der elektrischen Leitfähigkeit wie solche der elektromotorischen Kraft ihre Bedeutung auch für die rein chemische Forschung.

Dank den Arbeiten von Friedrich Kohlrausch ist die Bestimmung der Leitfähigkeit von Lösungen zu einem hohen Grade von Einfachheit und Sicherheit gebracht worden. Ein kleines Induktorium, eine Wheatstonesche Brücke, ein Widerstandskasten, ein Telephon und ein mit Elektroden versehenes Glasgefäfs bilden das ganze physi-

kalische Rüstzeug, dessen man zur Bestimmung der Leitfähigkeit bedarf. Einen umfassenden Überblick über die Anwendungen dieser Methode für die Chemie zu geben ist hier nicht der Ort; aber an einem Beispiele, das durch die Arbeiten von Ostwald hervorragende Wichtigkeit gewonnen hat, möchte ich wenigstens ihr Wesen veranschaulichen.

Dafs in wässeriger Lösung die verschiedenen Säuren sehr verschiedene Stärke besitzen, ist eine längst bekannte chemische Thatsache; ihre wissenschaftliche Formulierung gelang jedoch erst in neuerer Zeit mit Hilfe der Ionentheorie und der Lehre der chemischen Massenwirkung. Alle Säuren liefern nämlich, in Wasser aufgelöst, eine mehr oder minder grofse Menge der positiv geladenen Wasserstoffionen; die allen Säuren gemeinschaftlichen und daher spezifisch sauren Reaktionen sind nun eben Reaktionen des Wasserstoffions. Nach dem Gesetze der chemischen Massenwirkung aber reagiert eine Molekülgattung, gleichgiltig ob elektrisch neutral oder geladen, um so energischer, je mehr Wasserstoffionen sie enthält. Da man nun mit Hilfe der elektrischen Leitfähigkeit am einfachsten und genauesten die Menge der Wasserstoffionen einer in Wasser gelösten Säure ermitteln kann, so erkennen wir, wie die Messung der elektrischen Leitfähigkeit uns über die Stärke einer Säure und somit über die wichtigste Seite ihres chemischen Verhaltens Aufschlufs giebt.

In komplizierteren Fällen, besonders bei der Untersuchung der sogenannten komplexen Salze, tritt der Leitfähigkeitsmessung die Untersuchung der Ionenwanderung ergänzend an die Seite; indem man die zu untersuchende Lösung elektrolysiert und die mit Verschiebung der Ionen verbundenen Konzentrationsänderungen an den Elektroden bestimmt, läfst sich die Frage entscheiden, ob ein Element oder Radikal mit dem Strome oder dem Strome entgegen wandert; im ersteren Falle befindet es sich in einem positiven, im zweiten Falle in einem negativen Ion. Bereits Hittorf zeigte bei seinen grundlegenden Messungen der Überführungszahlen, dafs auf diesem Wege häufig die Frage leicht entschieden werden kann, ob man ein typisches oder ein sogenanntes komplexes Salz vor sich hat.

Während die Leitfähigkeit einer Lösung durch die Summe der Leitfähigkeiten aller darin vorhandenen Ionen bedingt wird, und somit, besonders in komplizierten Fällen, in denen eine gröfsere Anzahl verschiedener Ionen in der Lösung vorhanden ist, die Deutung der Versuchsergebnisse nicht ganz einfach wird, liefert die Bestimmung der elektromotorischen Kraft die Menge von einer ganz bestimmten Ionenart, weil die Spannung der Elektroden aufser von ihrer eigenen Be-

schaffenheit in wässerigen Lösungen nur noch von der Konzentration der Ionenart abhängt, welche die betreffende Elektrode in die Lösung entsendet. Der Apparat, der für die Ausführung dieser Messungen erforderlich ist, bietet in seiner Handhabung ebenfalls, wie bei der Messung der Leitfähigkeit, keine besonderen Schwierigkeiten; ein empfindliches Galvanometer oder Elektrometer, ein Normalelement und ein Widerstandskasten sind in den meisten Fällen zur Ausführung der Messung vollkommen ausreichend.

Bestimmen wir also die elektromotorische Kraft eines Silberdrahtes gegen eine Lösung, so vermag diese Messung uns Aufschlufs zu geben über die Menge der Silberionen, die in der Lösung vorhanden sind, und zwar liegt es in der Natur der Formel, welche die elektromotorische Kraft und die Konzentration der Silberionen verbindet, dafs die prozentische Genauigkeit unabhängig von der Menge der in der Lösung vorhandenen Silberionen ist. Man ist daher in der Lage, Konzentrationen von einer Kleinheit noch relativ sicher zu bestimmen, wie sie wohl auf keinem anderen Wege, z. B. auch nicht durch die Hilfsmittel der Spektralanalyse unter den günstigsten Bedingungen, gemessen werden können.

Auch hier mufs ich mich darauf beschränken, an einem Beispiele die Anwendbarkeit dieser Methode zu erläutern. Das Wasser ist in reinem Zustande ein fast völliger Nichtleiter der Elektrizität; es ist mit andern Worten nur zu einem äufserst kleinen Bruchteile in seine Ionen, das Wasserstoffion und das Hydroxylion, zerfallen. Da von diesen Ionenarten das eine für die Säuren, das andere für die Basen typisch ist, so ist das Wasser gleichzeitig saurer und basischer Natur, d. h. es ist gleichzeitig eine schwache Säure und eine schwache Basis. Für zahlreiche chemische Reaktionen des Wassers war es nun von Wichtigkeit, die Stärke der sauren und der basischen Funktionen des Wassers kennen zu lernen, und es mufsten zu diesem Zwecke die sehr kleinen Mengen von Wasserstoffionen bestimmt werden, die in einer neutralen oder besser alkalischen Lösung vorhanden sind. Ostwald und Arrhenius lösten gleichzeitig und unabhängig diese Aufgabe, indem sie die elektromotorische Kraft einer mit Wasserstoff beladenen Platinelektrode, die lediglich von der Konzentration der Wasserstoffionen abhängt, bestimmten und daraus die gesuchte aufserordentlich kleine Konzentration der Wasserstoffionen ermittelten.

Die bisher besprochenen elektrischen Methoden sind gleichsam Sonden, die der Forscher an chemische Verbindungen anzulegen und mit Hilfe deren er sie sozusagen abzutasten vermag. Die Elektrizität giebt aber auch Mittel an die Hand, durch die man, wie mit einem

scharfen Werkzeuge, die chemischen Verbindungen zerschneiden kann; dieses Hilfsmittel ist das erste, das die elektrochemische Forschung erbracht hat, nämlich die Elektrolyse. Vermöge der elektrolysierenden Kraft des galvanischen Stromes ist man ja imstande, auch die festesten Verbindungen mit Leichtigkeit in ihre einfacheren Bestandteile aufzulösen.

Der Mechanismus der Elektrolyse ist überaus einfach und durchsichtig; ein Strom, der einen Elektrolyten durchfliefst, führt die positiven Ionen zur einen, die negativen Ionen zur anderen Elektrode, und zwar findet diese Wanderung der Ionen, wie schon oben auseinandergesetzt, unter dem Einflufs des elektrischen Zuges statt, der von den entgegengesetzt geladenen Elektroden auf die Ionen ausgeübt wird. Bei hinreichend starker Ladung der Elektroden, d. h. bei hinreichender elektromotorischer Kraft des elektrolysierenden Stromes, gelangen die Ionen an beiden Elektroden zur Abscheidung; indem sie an die Elektroden ihre elektrische Ladung abgeben, gehen sie in gewöhnliche, d. h. elektrisch neutrale Moleküle über, welche dem elektrischen Zuge nicht mehr unterliegen und demgemäfs entweichen können. Der eigentlich primäre Vorgang in der Elektrolyse ist also nichts anderes, als der Übergang elektrisch *geladener* Ionen in elektrisch *neutrale* Molekülarten, und die Arbeit, welche der Strom bei der Elektrolyse zu leisten hat, besteht also in erster Linie darin, den Ionen ihre elektrischen Ladungen zu entreifsen, und zwar gleichzeitig den positiven Ionen ihre positive Elektrizität an der einen, den negativen Ionen ihre negative Elektrizität an der andern Elektrode. Diese Arbeit ist nun aber um so gröfser, je höher die an den Elektroden wirkende elektromotorische Kraft ist, und da wir letztere bei geeigneter Versuchsanordnung beliebig zu steigern imstande sind, so erkennen wir, dafs kein Ion seine Ladung so stark zu binden vermag, dafs wir nicht durch hinreichend starken elektrischen Zug sie den Ionen zu entziehen imstande wären. Mit Hilfe des Stromes können wir dementsprechend die stärksten chemischen Kräfte überwältigen.

Während bei der Elektrolyse der galvanische Strom chemische Verwandtschaften löst, wird bei dem umgekehrten Phänomen, der galvanischen Stromerzeugung, chemische Energie in elektrische umgesetzt. Auch der Mechanismus dieser Vorgänge ist mit Hilfe der Ionentheorie und der Theorie des osmotischen Druckes in neuerer Zeit, wie ich glaube, klargestellt worden. Die Auflösung des Zinks z. B. in einem galvanischen Elemente ist im Prinzip ähnlich der Auflösung irgend einer beliebigen Substanz in einem Lösungsmittel; das Eigentümliche, was bei der Auflösung des Zinks noch hinzukommt, besteht

lediglich darin, dafs hier, wie bei den Metallen überhaupt, nicht elektrisch neutrale Moleküle in Lösung gehen, sondern dafs es sich dabei um Ionen handelt. Dadurch aber ist notwendig mit der Auflösung des Zinks eine elektrische Verschiebung verbunden, die unter geeigneten Versuchsbedingungen als geschlossener galvanischer Strom in Erscheinung tritt.

Aber auch wenn man ohne besondere Vorkehrung Zink oder ein Metall in Säuren löst, ist damit ein elektrischer Vorgang untrennbar verbunden; von dem Zink werden Zinkionen in die Säure entsandt, während gleichzeitig die chemisch und somit auch elektrisch äquivalente Menge von Wasserstoffionen umgekehrt aus der Lösung zum Zink übertritt, um nach Abgabe der Ladung als elektrisch neutraler Wasserstoff zu entweichen. Genau so, wie für die Elektrolyse die Spannungsdifferenz an den Elektroden mafsgebend ist, wird auch dieser chemische Prozefs, wie in zahlreichen neueren Arbeiten gezeigt wurde, ausschliefslich durch die elektrische Potentialdifferenz zwischen Metall und Lösung bestimmt.

Der primäre Vorgang bei der Auflösung eines Metalls unter Wasserstoffentwicklung besteht also in der Abgabe der positiven Ladung des Wasserstoffions an das betreffende Metall. Leiten wir etwa Chlor in die Lösung eines Jodids, so wird gewöhnliches Jod in Freiheit gesetzt und das Chlorion tritt an die Stelle des Jodions; auch hier besteht der chemische Prozefs also wesentlich in einer Dislokation einer elektrischen Ladung, und zwar handelt es sich bei diesem Beispiele um eine negative Ladung. Nach aufsen verrät sich, wie es in der Natur dieser Erscheinung liegt, die elektrische Natur dieser Prozesse nicht weiter; elektrostatische Ladungen oder galvanische Ströme treten dabei nicht auf. Wohl aber läfst sich die Richtung, in der solche chemischen Umsetzungen stattfinden müssen, aus den Ionenpotentialen ableiten.

Schon daraus, dafs das Phänomen der Elektrolyse in der Spaltung selbst der festesten chemischen Verbindungen besteht, wird es klar, dafs bei chemischen Verbindungen elektrische Kräfte eine wichtige Rolle spielen; im einzelnen haben wir überdies soeben gesehen, dafs bei manchen chemischen Prozessen der primäre Vorgang in einer Dislokation elektrischer Ladungen besteht. Damit tritt denn zugleich die Frage an uns heran, ob nicht etwa die chemischen Kräfte überhaupt elektrischer Natur sind.

Ehe wir darüber Betrachtungen anstellen, inwieweit die Forschung in das äufserst hypothetische Gebiet der Natur der chemischen Affinität zur Zeit vorgedrungen ist, möchte ich kurz noch darauf eingehen, wie

die chemische Affinität gemessen werden kann. Wenn zwei Substanzen bei ihrer Berührung in rasche chemische Wechselwirkung zu treten vermögen, so sagt man in der Regel, dafs sie eine grofse chemische Affinität besitzen; dies ist einwandsfrei, aber keineswegs die Umkehrung dieses Satzes, dafs nämlich Substanzen, die sich auch bei innigster Berührung gegen einander indifferent verhalten, keine Affinität besitzen. Der Verlauf eines chemischen Prozesses ist zwar proportional der wirkenden chemischen Kraft, aber er hängt aufserdem auch noch von der Gröfse der Widerstände ab, die im betreffenden Fall zu überwinden sind. Auch bei sehr grofser chemischer Affinität kann die Reaktionsgeschwindigkeit verschwindend klein sein, wofür ein Gemenge von Wasserstoff und Sauerstoff ein Beispiel bildet; trotz der grofsen Affinität dieser Elemente bleiben sie bei gewöhnlicher Temperatur so gut wie vollkommen passiv, weil der zu überwindende chemische Widerstand sehr grofs ist. Genau wie die Intensität eines galvanischen Stromes der wirkenden elektromotorischen Kraft direkt und dem entgegenstehenden elektrischen Widerstande indirekt proportional ist, so gilt für die rein chemischen Prozesse ein analoges Gesetz: die Reaktionsgeschwindigkeit ist der chemischen Kraft oder der chemischen Affinität direkt und dem chemischen Widerstande indirekt proportional. In einem galvanischen Elemente werden beide Gesetze, das Ohmsche Grundgesetz der elektrischen Ströme und das chemische Grundgesetz des Reaktionsverlaufs, identisch, weil hier galvanischer und chemischer Widerstand zusammenfallen, die Reaktionsgeschwindigkeit nach Faradays Gesetz der Stromintensität gleich wird und die Kraft der chemischen Affinität des stromliefernden Prozesses in dem betrachteten galvanischen Elemente einfach seine elektromotorische Kraft ist. Ebenso aber wie das Ohmsche Gesetz auch auf elektrische Ketten Anwendung findet, in denen keinerlei chemische Prozesse sich abspielen, wie bei den Dynamomaschinen oder den Thermosäulen, so gilt das analoge chemische Grundgesetz auch bei Reaktionen, in denen, wie z. B. bei Verbrennungserscheinungen, das Auftreten galvanischer Ströme nicht nachgewiesen und, wenn es sich lediglich um die Einwirkung zwischen elektrischen Isolatoren handelt, geradezu ausgeschlossen ist. Immerhin weist die grofse Ähnlichkeit der beiden besprochenen Gesetze bereits auf eine Beziehung zwischen chemischem Prozefs und galvanischem Strome oder besser galvanischer Entladung hin.

Aus den vorstehenden Überlegungen ersehen wir bereits, dafs die Bestimmung der elektromotorischen Kraft eines galvanischen Elementes uns gleichzeitig die Gröfse der Affinität des betreffenden stromliefernden chemischen Prozesses liefert. Man kann letztere Gröfse aber auch auf

zahlreichen anderen Wegen ermitteln; wie nebenbei bemerkt sei, liefert jede Methode, die zur Kenntnis der maximalen Arbeitsleistung einer chemischen Umsetzung oder, wie man es auch ausdrückt, zur Bestimmung der damit verbundenen Änderung der freien Energie führt, gleichzeitig die chemische Affinität der betreffenden stofflichen Umsetzung. Die Messung der elektromotorischen Kraft ist aber die vielseitigste und genaueste Methode, und wir sehen also, wie auch hier wieder, wo es sich um die Messung einer der wichtigsten chemischen Gröfsen handelt, eine rein elektrische Methode an der Spitze steht.

Historisch wäre über die Frage nach der Natur der chemischen Verwandtschaft etwa folgendes zu bemerken. Bei der Beschäftigung mit der anorganischen Chemie zeigte sich in der Zusammensetzung zahlreicher chemischer Verbindungen ein deutlicher Dualismus; man konnte die Elemente und Radikale in zwei Kategorien teilen, die positiven und die negativen, und man fand, dafs die positiven, wie die negativen Radikale je untereinander meistens relativ schwierig reagieren, dafs aber ein stark positives mit einem stark negativen Radikale sich stets glatt zu einer wohl charakterisierten chemischen Verbindung vereinigt. Die Erkenntnis dieser Thatsache ist der bleibende Inhalt der elektrochemischen Theorie von Berzelius; dafs der grofse Begründer der analytischen Chemie dies Verhalten der Elemente dadurch zu erklären suchte, dafs er die eine Kategorie als in freiem Zustande positiv, die andere als negativ geladen ansah, eine Annahme, die gegen die Elemente der Elektrizitätslehre verstöfst, ist im Grunde eine unwesentliche Zugabe zu seiner Theorie. Thatsächlich war es Berzelius auch wohl mehr darum zu thun, den von ihm so oft beobachteten Dualismus in den chemischen Verbindungen durch die Analogie mit den beiden Elektrizitäten anschaulich zu machen, als eine streng physikalische Erklärung der Wirksamkeit chemischer Kräfte zu liefern.

Nun entdeckte die aufblühende organische Chemie zahllose chemische Verbindungen, bei denen die einseitig dualistische Auffassungsweise vollkommen versagte, und so entstand die, wie man sich kurz ausdrückt, unitarische Theorie der Konstitution organischer Verbindungen, d. h. eine Valenztheorie, die sich um jenen Dualismus nicht kümmert.

Gegenwärtig kann man wohl sagen, dafs eine rein unitarische Auffassungsweise der chemischen Verbindungen ebenso einseitig wäre, wie die rein dualistische Auffassungsweise von Berzelius; wir müssen eben annehmen, dafs bei der Bildung chemischer Verbindungen sowohl einheitlich wirkende Kräfte zur Geltung kommen, wie es z. B. die von Masse zu Masse wirkenden Newtonschen Attraktionskräfte sind, als

auch Kräfte polarer Natur thätig sind, wofür die elektrischen Kräfte das deutlichste Beispiel liefern.

Der von Berzelius erkannte Dualismus der chemischen Verbindungen läfst sich vom Standpunkte der Ionentheorie sehr einfach folgendermafsen deuten. Diejenigen Elemente oder Radikale, welche aus chemischen Verbindungen als positive Ionen abgespalten werden, bilden die eine Kategorie; diejenigen, welche als negative Ionen auftreten, bilden die andere Kategorie der Elemente und Radikale. Es sind also nicht die freien Elemente oder Radikale elektrisch geladen, wie Berzelius annahm, sondern *nach* der Vereinigung von positiven und negativen Radikalen untereinander vermag das Molekül unter geeigneten Bedingungen sich in Ionen zu spalten, wobei dann die positiven Radikale positiv, die negativen Radikale negativ elektrisch geladen sind. Diese elektrische Spaltung offenbart sich am deutlichsten durch elektrolytische Leitfähigkeit und die damit verbundene Fähigkeit, unter dem Einflusse eines hinreichend starken elektrischen Zuges sich in die freien Radikale spalten zu lassen, gleichzeitig aber auch, worauf Hittorf zuerst hinwies, in dem leichten chemischen Austausche eines positiven gegen ein anderes positives und eines negativen gegen ein anderes negatives Radikal, oder, mit anderen Worten, in der glatten Bildung und gegenseitigen Umsetzung von Salzen; Hittorf drückte dies sehr prägnant durch den einfachen Satz aus: „Elektrolyte sind Salze."

Berzelius nahm, wie schon bemerkt, ferner an, dafs der Grad der Positivität oder Negativität, wenn ich mich kurz so ausdrücken darf, durch die Stärke der elektrischen Ladung bestimmt sei; seit Faraday weifs man im Gegenteil, dafs die elektrische Ladung, die ein einwertiges Ion oder Radikal mit sich führt, ganz unabhängig von der Natur und demgemäfs auch von der Stärke dieses Radikales ist. Das äufserst stark positive Kaliumion ist genau so stark elektrisch geladen, wie das sehr schwach positive Silberion, und das Gleiche gilt auch für das äufserst stark negative Fluorion und das sehr schwach negative Jodion. Nicht in der Gröfse der Ladung zeigt sich der Grad der Positivität oder Negativität, sondern in der Festigkeit, mit der diese Ladung gebunden wird. Dementsprechend kann, um bei den obigen Beispielen zu bleiben, Jodsilber bereits durch sehr geringe elektromotorische Kräfte in die freien Elemente gespalten werden, während Fluorkalium umgekehrt nur unter dem Einflufs eines sehr starken elektrischen Zuges in die Bestandteile zerfallen kann.

Der experimentelle Ausdruck der Thatsache, dafs die verschiedensten einwertigen positiven oder negativen Radikale gleich stark elektrisch

geladen sind, ist das Faradaysche elektrolytische Grundgesetz, wonach die gleiche Strommenge aus den verschiedensten Elektrolyten immer chemisch äquivalente Mengen in Freiheit setzt. Da nach allem, was wir darüber wissen, das erwähnte Gesetz mit gröfster Exaktheit zutrifft, so kann die Thatsache, dafs die verschiedenartigsten einwertigen Ionen die gleiche Elektrizitätsmenge binden, als sicher verbürgt gelten.

Was die mehrwertigen Ionen anlangt, so findet man, dafs die zweiwertigen Elemente oder Radikale genau doppelt soviel, die dreiwertigen genau dreimal soviel Elektrizität binden, als die einwertigen u. s. w.

Diese höchst merkwürdigen Thatsachen lassen sich nun ungemein einfach und anschaulich deuten, wie schon Helmholtz in seiner Faraday-Rede *(1881)* angedeutet hat. Wenn wir an der stofflichen Natur der Elektrizität festhalten, wozu man, wie Helmholtz ebenda betonte, vollkommen berechtigt ist, — und ich glaube nicht, dafs sich seitdem hieran etwas geändert hat —, so sind die Ionen eine Art von chemischer Verbindung zwischen Elementen und Radikalen einerseits und der Elektrizität andererseits. Wenn nun ferner, wie wir schon sahen, die verschiedensten Elemente oder Radikale immer sich nur mit einer ganz bestimmten Quantität freier Elektrizität oder einem Multiplum davon verbinden, so kann man das am einfachsten durch den Satz ausdrücken: für die Verbindungen zwichen gewöhnlicher Materie und der Elektrizität gilt genau das gleiche chemische Grundgesetz, wie für die Verbindungen der gewöhnlichen chemischen Substanzen untereinander, nämlich das Gesetz der konstanten und multiplen Proportionen.

Erinnern wir uns, dafs vor etwa einem Jahrhundert die Entdeckung jenes chemischen Grundgesetzes Anlafs zur Einführung der Atomistik in die exakte Naturwissenschaft gab, und dafs bis auf den heutigen Tag dieses Gesetz die sicherste experimentelle Unterlage jeder molekulartheoretischen Betrachtung geblieben ist. Ohne die atomistische Naturauffassung ständen wir diesem fundamentalen Naturgesetze völlig ratlos gegenüber, während es uns vom Standpunkte der Atomistik aus geradezu selbstverständlich erscheint.

Genau so liegt die Sache offenbar, wenn es sich um die Auffassung des obigen elektrochemischen Grundgesetzes handelt; denken wir uns die elektrischen Fluida als kontinuierlich, so bleibt es völlig unerklärlich, warum die verschiedensten Elemente und Radikale immer gerade eine ganz bestimmte Elektrizitätsmenge bilden oder gerade ein Multiplum davon. Sofort aber wird es zur notwendigen Konsequenz, wenn wir die Elektrizität als in einzelne Atome von unveränderlicher Gröfse uns geteilt denken.

Hierdurch gelangen wir also sozusagen zu einer chemischen Theorie der Elektrizität, die wir zum Schlufs noch kurz betrachten wollen. Aufser den bekannten chemischen Elementen hätten wir zwei neue anzunehmen, gebildet von den positiven und negativen Elektronen, wie man diese elektrischen Atome bezeichnet; diese Elemente sind chemisch einwertig, d. h. die Valenz eines Elementes kann durch ein, die eines zweiwertigen Elementes durch zwei Elektronen gesättigt werden u. s. w. Das Atomgewicht dieser Elektronen kann für die Zwecke der Chemie als verschwindend klein angesehen werden. Forschungen auf ganz anderen Gebieten, die in erster Linie das Studium der Kathodenstrahlen betrafen, und worüber Herr Dr. Kaufmann, ein sehr erfolgreicher Bearbeiter dieses Gebietes, am letzten Mittwoch von dieser Stelle aus berichtet hat, haben es übrigens wahrscheinlich gemacht, dafs das Atomgewicht der negativen Elektronen etwa $^1/_{2000}$ des Atomgewichts des Wasserstoffs ist. Freilich ist die Frage noch offen, ob es sich hier um eine wirkliche Masse im gewöhnlichen Sinne handelt. Jedenfalls aber ist diese Gröfse in der That bei chemischen Arbeiten verschwindend, insofern als etwaige durch die negativen Elektronen bedingte Gewichtsveränderungen innerhalb der unvermeidlichen Fehler auch der genauesten bisherigen chemischen Analysen liegen. Ob die positiven Elektronen, wie nicht unwahrscheinlich, das gleiche Atomgewicht haben, wissen wir nicht, weil man in diesen die den Kathodenstrahlen entsprechende Erscheinung noch nicht aufgefunden hat. Die Eigentümlichkeiten, welche diesen beiden Elementen zwischen allen anderen eine ganz entschiedene Ausnahmestelle verleihen, sind die von ihnen ausgehenden eigenartigen Kraftwirkungen, die von der Newtonschen Attraktion der gewöhnlichen Elemente und Verbindungen so vollkommen verschieden sind. Die Behandlung dieser Kräfte bildet eben den physikalischen Teil der Elektrizitätslehre, die seit Coulomb und Ampère mit der Erforschung der Gesetze jener Kräfte sich beschäftigt hat. Dasjenige, was für die Chemie in Betracht kommt, nämlich die elektrolytische Leitung, die elektrolytische Zersetzung und die galvanische Stromerzeugung habe ich in dem ersten Teile meines Vortrages besprochen, und wir haben dabei konstatiert, dafs sich diese Erscheinungen in der That aus den elektrischen Grundgesetzen heraus anschaulich deuten lassen.

Wenn man fragt, warum denn diese beiden Elemente von polar entgegengesetztem Charakter eine solche Ausnahmestellung im Vergleich zu allen übrigen einnehmen, so kann man diese Frage allerdings mit gleichem Recht aufwerfen, aber ebensowenig beantworten, wie die: warum ist das Chlor gerade das Chlor, warum hat das Natrium gerade

die Eigenschaften des Natriums u. s. w. Die Eigenschaften der Elemente können wir zur Zeit eben nicht ableiten, wir müssen sie einfach nehmen, wie sie sind. — Übrigens erinnert das gegenseitige Verhältnis der positiven und negativen Elektronen ein wenig, aber auch nur ein wenig, an das Verhältnis zwischen zwei optischen Isomeren.

Die Ionen sind, wie schon bemerkt, als chemische Verbindungen zwischen gewöhnlichen Atomen und Radikalen und den Elektronen aufzufassen, und zwar sind es gesättigte chemische Verbindungen. Wenn wir nämlich etwa im Chlornatrium das Natriumatom durch ein negatives Elektron substituieren, so bekommen wir das negative Chlorion; wenn wir das Chloratom durch das positiv geladene Elektron ersetzen, so bekommen wir das positive Natriumion. Man sieht also, dafs die Ionen sich vollständig in das Schema der Substitutionstheorie einordnen, sobald wir die atomistische Auffassung der Elektrizität zu Hilfe nehmen. Gleichzeitig wird auch der gewaltige Unterschied zwischen freiem Chlor und dem Chlorion, zwischen freiem Natrium und dem Natriumion offenbar; denn genau so, wie das physikalische Verhalten des freien Chlors und des freien Natriums ganz anders ist, als wenn diese Elemente in einer chemischen Verbindung, wie etwa Chlornatrium, vorhanden sind, so wird ihr Verhalten durchgreifend durch die Verbindung mit den elektrischen Elementaratomen, d. h. durch den Übergang in den Ionenzustand, geändert.

Dafs sich übrigens die Ionen in der That wie gesättigte Verbindungen verhalten, geht unter anderem auch aus folgender Thatsache hervor. Aufser den chemischen Verbindungen, die sich dem Schema der Valenztheorie unterordnen, giebt es auch sogenannte Molekülverbindungen; um hierfür ein Beispiel zu nennen, so vermag das Platinchlorid sechs Ammoniakmoleküle zu addieren. Es ist nun sehr bemerkenswert, dafs die Ammoniakmoleküle durch Ionen ersetzbar sind, wie die Forschungen von Werner gezeigt haben, und dafs also auch die Ionen in der Art und Weise, Molekülverbindungen zu bilden, sich vollkommen den gewöhnlichen gesättigten Verbindungen an die Seite stellen.

Es liegt nun die Frage nahe, ob sich die Substitution im Chlornatrium nicht noch einen Schritt weiter führen, d. h. ob sich nicht gleichzeitig das Natriumatom und das Chloratom durch ein negatives und ein positives Elektron substituieren läfst; das Resultat dieser Substitution wäre also eine Verbindung aus einem positiven und einem negativen Elektron. Wir hätten so ein elektrisch masseloses, neutrales oder wenigstens so gut wie masseloses Molekül. Über diese Verbindung und über die Rolle, die sie vielleicht in chemischen und

elektrochemischen Prozessen spielt, wissen wir noch nichts Bestimmtes. Sollten diese Verbindungen wirklich existieren, und sollte es uns gelingen, ein Reagenz darauf zu finden, um mich der chemischen Ausdrucksweise zu bedienen, so würde sich uns vielleicht eine neue Welt von Erscheinungen erschliefsen; die Vermutung scheint mir jetzt schon unabweisbar, dafs im Verhalten des Lichtäthers, jenes bis heute noch völlig hypothetischen Agens, diese Molekülgattung eine Rolle spielt.

Auf Grund dieser Anschauung können wir uns nun bald ein klares Bild über das Verhältnis von dualistischer zu unitarischer Anschauungsweise verschaffen. Die verschiedenen Elemente (bez. Radikale) besitzen zu den positiven und negativen Elektronen verschiedene chemische Affinität; diejenigen Elemente, die zum positiven Elektron eine ausgesprochene Verwandtschaft zeigen, bilden die positive Gruppe von Elementen; entsprechend besitzen die negativen Elemente eine Verwandtschaft zum negativen Elektron. Aufserdem besitzen die verschiedenen Elemente untereinander eine chemische Affinität, die nicht polaren Charakters ist. Dementsprechend können, ohne dafs die Elektronen eine Rolle spielen, zwei Atome eines Elementes eine feste chemische Verbindung eingehen; ich erinnere nur an die Festigkeit, mit der sich zwei Wasserstoffatome oder zwei Stickstoffatome untereinander zu einem Molekül vereinigen. Dasselbe gilt von vielen Verbindungen der Metalloide untereinander, wie Chlorjod, Schwefelphosphor u. s. w. Ebenso vermögen die Metalle untereinander zahlreiche Verbindungen einzugehen, bei denen wir ebenfalls gar keinen Anlafs haben, auf eine Beteiligung von Elektronen zu schliefsen. Der Kohlenstoff insbesondere, der einen Übergang zwischen den ausgesprochen positiven und den ausgesprochen negativen Elementen bildet, vermag mit beiden Kategorien von Elementen zu reagieren, und da auch hier die Elektronen aus dem Spiele zu bleiben scheinen, so wird die Möglichkeit einer rein unitarischen Auffassungsweise bei den Kohlenstoffverbindungen verständlich.

Sobald aber ein positives und ein negatives Element miteinander reagieren, tritt die Fähigkeit der Ionenspaltung auf, d. h. mit diesem chemischen Prozesse ist eine Addition oder Aufspaltung eines masselosen elektrisch neutralen Moleküls verbunden; es scheint mir sehr bemerkenswert, dafs diese Vorgänge mit einer viel durchgreifenderen Veränderung des gesamten Verhaltens verbunden sind, als diejenigen, bei denen eine Mitwirkung der Elektronen nicht stattzufinden scheint; denn während die Verbindungen der Metalle untereinander deutlich metallischen Charakter bewahren und die Verbindungen zwischen Metalloiden ebenfalls deutlich an das Verhalten ihrer Bestandteile

erinnern, entsteht offenbar etwas ganz Neues und Eigenartiges, wenn ein Metall mit einem Metalloide reagiert. Eine Substanz wie Chlornatrium, weist gegen ihre Komponenten die denkbar gröfsten Verschiedenheiten auf, wie auch bei der Bildung solcher Verbindungen offenbar ganz besonders mächtige chemische Kräfte mitwirken.

Natürlich scheint es nicht unmöglich, dafs auch bei den nicht polaren Wechselwirkungen elektrische Kräfte im Hintergrunde sich befinden, wie man ja auch jetzt schon vielfach hofft, die Newtonsche Attraktion ähnlich wie es mit der Optik gelang, auf elektrische Phänomene zurückführen zu können. Das ist aber doch lediglich Sache der Zukunft; zur Zeit wird man gut daran thun, die Kräfte polarer Natur sorgfältig von den unitarischen zu trennen.

Das hier dargelegte Schema läfst die Möglichkeit vorhersehen, dafs ein Element oder Radikal mit einem positiven oder negativen Elektron zu reagieren vermag, ohne dafs gleichzeitig ein anderes Element von entgegengesetzt polarem Charakter sich des freigewordenen Elektrons bemächtigt. Wenn dies geschähe, so würde das freie Elektron in Analogie zu den gewöhnlichen chemischen Prozessen mit einem bestimmten Dissoziationsdruck in Freiheit gesetzt werden, der sich in der lebendigen Kraft des fortgeschleuderten freien Elektrons äufsern würde. Vielleicht verdanken die Becquerelstrahlen einem solchen chemischen Prozesse ihre Entstehung; da man auch hier bisher nur das Auftreten freier negativer Elektronen beobachtet hat, so gewinnt es überhaupt den Anschein, als ob die positiven Elektronen viel schwieriger zu isolieren, d. h. viel fester von den Elementen metallischer Natur gebunden seien, als die negativen Elektronen von den Metalloiden.

Rezensionen.

Adolf Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn. 1900. XVI u. 312 S. 8⁰.

Die Variationsrechnung hat eine eigenartige Geschichte. Unternimmt man es, das Interesse der Mathematiker für diese Disciplin festzustellen, indem man die darauf bezüglichen Abhandlungen und Werke Jahr für Jahr abzählt, so ergeben sich auffallende Verschiedenheiten. Drei scharf hervortretende Maxima fallen zunächst auf, die etwa zu den Jahren 1700, 1740, 1765 gehören; ihnen entsprechen die Namen Jac. und Joh. Bernoulli, Euler, Lagrange und die Stufen der Entwicklung von der Stellung und Lösung besonderer Aufgaben bis zur Auffindung allgemeiner Methoden und der Schaffung eines besonderen Algorithmus. Der ersten Blütezeit folgt im Abstande von etwa 70 Jahren eine zweite: mit Anfang der dreifsiger Jahre des neunzehnten Jahrhunderts beginnt die Häufigkeitskurve wieder zu steigen und bleibt von 1835 bis 1855 auf einer erheblichen Höhe. Einmal erfährt die Aufgabe der Variationsrechnung Erweiterungen, teils von geometrischer Seite durch Steiners noch lange nicht genug gewürdigte Arbeiten, teils von analytischer, indem nach dem Vorgange von Gaufs doppelte und mehrfache Integrale in den Kreis der Betrachtung gezogen wurden. Dann aber wird die durch Ansätze von Legendre (1786) und Lagrange (1801) begonnene Kritik der Variationsrechnung durch Jacobi fortgesetzt, dessen Untersuchungen über die zweite Variation bis in die neueste Zeit hinein ihre Fruchtbarkeit bewiesen haben.

Etwa seit 1875 beginnt ein neues Steigen der Kurve, und in dem Gebiete dieses Maximums befinden wir uns noch gegenwärtig. Die Weierstrafssche Schule hat hier einen hervorragenden Anteil; es handelt sich darum, die Theorie von Grund aus neu aufzubauen, sodafs den Forderungen der „Weierstrafsschen Strenge“ genügt wird. Was Weierstrafs selbst betrifft, so sind wir auf die Abhandlungen einiger seiner Schüler angewiesen, die, wie Herr Kneser sich ausdrückt, „zwar in erster Linie den eigenen Untersuchungen der Verfasser gewidmet sind, aber auch in modifizierter und verallgemeinerter Weise alle wesentlichen, auf unsern Gegenstand bezüglichen Ideen von Weierstrafs enthalten“.

Da Herr Kneser für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften einen Bericht über die Variationsrechnung liefern wird[1]), will er in seinem Lehrbuche unter Verzicht auf eingehende historische Angaben und die

1) Der Bericht ist bereits gedruckt, nur noch nicht ausgegeben.
Die Red.

Erörterung von Prioritätsfragen einen Abrifs dieser Disziplin geben, so wie er auf dem gegenwärtigen Standpunkt der Entwicklung gegeben werden kann. Eine solche nach einheitlichem Plane erfolgende, auf einheitlichen Grundsätzen beruhende Darstellung zu liefern, war keine leichte Aufgabe; denn wenn auch die Art der Durchführung und die Zielpunkte der Untersuchung von vornherein feststanden, so galt es doch, sich durch ein Gestrüpp dornenvoller Untersuchungen den Weg zu bahnen, und der eigenen Thätigkeit des Verfassers blieb vieles überlassen. Deshalb ist, was er geleistet hat, weit mehr als ein Lehrbuch im gewöhnlichen Sinne des Wortes, es ist, wie die folgende Übersicht über den Inhalt des Werkes zeigen wird, zugleich ein Beitrag zur Fortbildung der Variationsrechnung, der von bleibendem Wert sein wird; einen Beweis hierfür bildet die Thatsache, dafs bereits, dadurch angeregt, andere Autoren weitergehende Untersuchungen angestellt haben.[1])

Nachdem in dem ersten Abschnitt (S. 1—19) *Begriff und Grundregeln der Variationsrechnung* behandelt worden sind, werden in dem zweiten (S. 20—42) *notwendige Bedingungen* dafür aufgestellt, dafs ein Integral

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

ein Extremum ist. Herr Kneser bedient sich dabei einiger neuer termini technici, die sich in einer vom Ref. an der Universität Kiel gehaltenen, mit Übungen verbundenen Vorlesung sehr gut bewährt haben und allgemeine Einführung verdienen. Die Kurven, die der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

genügen, bezeichnet er als die zu dem Integrale J gehörenden *Extremalen* (S. 24). Soll ferner J unter der Bedingung ein Extremum sein, dafs der Endpunkt der Extremale auf einer gegebenen Kurve liegt, so sagt er, dafs die Extremale zu der Kurve *transversal* liege (S. 32).

In dem dritten, umfangreichsten Abschnitt (S. 43—116), der den Mittelpunkt des Buches bildet, werden *hinreichende Bedingungen des Extremums* von J entwickelt. Auch hier finden sich glücklich gewählte Ausdrücke, so die folgenden Bezeichnungen, deren Bedeutung leicht ersichtlich ist: *Feld* eines Bogens (S. 44), *weitere und engere Nachbarschaft, starkes und schwaches Extremum* (S. 54), *ordentliches und aufserordentliches Verschwinden* des Weierstrafsschen Ausdruckes $\mathcal{E}$ (S. 78), *extremaler Brennpunkt, extremal konjugierte Punkte* (S. 89), *Normalvariation* (S. 91). Unzweckmäfsig erscheint es dagegen, dafs von einer „Legendreschen Bedingung" bei einem *starken* Extremum gesprochen wird (S. 60); wer die Litteratur über den Gegenstand nicht kennt, wird daraus entnehmen, dafs Legendre diese Bedingung aufgestellt habe, während er doch nur das

1) Über das Verhältnis der Untersuchungen von Herrn Kneser zu denen von Herrn Hilbert vergleiche man dessen Bemerkungen in dem Abdruck seines Vortrages *„Mathematische Probleme"* (dieses Archiv (3) **1**, 231—236).
Zusatz Oktober 1901.

schwache Extremum behandelt hat; statt Jacobische und Legendresche Bedingung würde es vielleicht besser heifsen: Stetigkeits- und Vorzeichenbedingung.

Der Aufgabe, dafs J ein Extremum sein soll, während gleichzeitig ein zweites Integral K derselben Art einen gegebenen Wert hat, ist der vierte Abschnitt (S. 117—170) gewidmet. Es folgen Verallgemeinerungen der vorhergehenden Untersuchungen. Während die Kurven, die ein Extremum liefern sollen, ursprünglich als stetig gekrümmt vorausgesetzt wurden, werden im Abschnitt 5 (S. 171—192) auch diskontinuierliche Lösungen zugelassen, ohne dafs freilich dieser schwierige Gegenstand, dem besonders Steiner und Weierstrafs ihre Aufmerksamkeit zugewandt haben, erschöpfend behandelt würde. Im sechsten Abschnitt (S. 193—226) wird angenommen, dafs die Funktion unter dem Integralzeichen Ableitungen beliebig hoher Ordnung enthält; die scharfsinnigen Untersuchungen des Herrn Zermelo waren hier eine wichtige Vorarbeit. Schliefslich wird auch der Begriff des Integrals verallgemeinert, indem im siebenten Abschnitte (S. 227—262) an die Stelle der Quadratur das Integral eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen tritt. Endlich geschieht auch der Übergang zu Funktionen von mehreren Veränderlichen. Ohne sich in leere Allgemeinheiten zu verlieren, beschränkt sich Herr Kneser darauf (Abschnitt 8, S. 263—306), die Untersuchung für den Fall eines Doppelintegrals durchzuführen, auf den Herr Kobb die Weierstrafssche Theorie ausgedehnt hatte.

Es folgt noch ein ausführliches Litteraturverzeichnis (S. 307—311); sehr nützlich ist auch, dafs auf S. XV alle die Paragraphen zusammengestellt sind, in denen die 15 von Herrn Kneser ausgewählten Aufgaben behandelt werden. Mit Recht hat er auf die eingehende Diskussion von Aufgaben grofse Sorgfalt verwandt. Geistreich gestellten, geistreich gelösten Aufgaben verdankt ja die Variationsrechnung ihren Ursprung, und die Vertiefung in besondere Probleme ist auch später der Antrieb zu weiteren Fortschritten gewesen und wird es in Zukunft bleiben; denn zu allen Zeiten wird die von Leibniz am höchsten gestellte *ars inveniendi* des Mathematikers besonders in der Stellung schöner Aufgaben in Erscheinung treten.

Reichhaltigkeit des Inhalts und eine den Forderungen moderner Strenge entsprechende Behandlung des Stoffes sind grofse Vorzüge des Kneserschen Werkes. Bei einem *Lehrbuche* darf man jedoch auch noch andere Forderungen stellen. Vor allem soll die Darstellung den Bedürfnissen der Lernenden entsprechen. Dieses Ziel zu erreichen ist im Laufe der Jahre immer schwerer geworden, denn unbedingte Strenge und leichte Verständlichkeit stehen in einem gewissen Gegensatz zu einander; Strenge verlangt häufig lange Entwicklungen, deren Zweck nicht unmittelbar einleuchtet. Dafs diese Schwierigkeit überwunden werden kann, zeigt, um einige Beispiele herauszugreifen, Picards glänzend geschriebener Traité d'Analyse, es zeigen die Bände, in denen Engel und Scheffers die tiefgründigen Ideen von Sophus Lie dargelegt haben.

Worin besteht nun diese Kunst der Darstellung? Von wesentlicher Bedeutung ist wohl, dafs der Autor es versteht, die dem Stoffe immanente Gliederung dem Leser zum klaren Bewufstsein zu bringen. Das geschieht, um

einige elementare Regeln anzuführen, indem umfangreichen Untersuchungen ein Plan ihrer Durchführung vorausgeschickt, indem bei den einzelnen Stadien der Durchführung angegeben wird, was erreicht ist, und was zu thun noch übrig bleibt, indem die bewiesenen Lehrsätze und Theoreme jedesmal ausdrücklich formuliert und womöglich durch besondere Typen hervorgehoben werden. Dazu kommt dann die geschickte Anordnung des Stoffes, für die sich keine bestimmten Regeln geben lassen.

Das Gegenteil hiervon ist eine Darstellung, bei der der Leser ohne Ruhepause weitergeführt wird, ohne dafs er weifs, wohin der Weg geht und wo er sich gerade befindet, bei der er sich dem Autor als Führer blindlings anvertrauen mufs, der ihm zuruft: „Allez en avant, la foi vous viendra". Lobatschefskijs Schriften sind ein Beispiel. Von ihnen hat Gaufs gesagt, dafs sie einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, den Durchgang und die Übersicht zu finden. In vortrefflicher Weise kennzeichnet Gaufs hierdurch die Schwierigkeiten, die der Leser zu überwinden hat, wenn er sich auf einen Standpunkt erheben will, von dem aus er die dargestellte Theorie in der Gesamtheit ihrer Verzweigungen umfassen und erkennen kann, welche Bedeutung ihr in dem System der Mathematik zukommt.

Es genüge zu sagen, dafs die Forderungen, die Herr Kneser an diejenigen stellt, die sich nicht blofs die Handhabung eines Formelapparates aneignen, sondern den Geist der Variationsrechnung erfassen wollen, recht erheblich sind. Dazu kommt noch, dafs der Lernende nicht schrittweise vom Leichteren zum Schwereren geführt wird, sondern dafs er sich die Theorie sofort in der Allgemeinheit und Abstraktheit aneignen soll, die im Laufe der Entwicklung allmählich erreicht worden ist. Es ist gewifs für eine strenge Behandlung des Extremums eines Integrales

$$J = \int_a^b f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

unbedingt erforderlich, x und y als Funktionen eines Parameters t anzusehen. Im Grunde bedeutet das aber, dafs man Integrale der Form

$$\int_a^b F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx$$

betrachtet, bei denen y und z eindeutige Funktionen von x sind. Vom pädagogischen Standpunkte aus wird es sich aber empfehlen, den Kursus der Variationsrechnung mit Aufgaben zu beginnen, bei denen nach der Natur der Aufgabe die Ordinate als eindeutige Funktion der Abscisse anzunehmen ist, und erst auf Grund der hierbei gewonnenen Einsicht die Diskussion des allgemeinen Problems vorzunehmen. Ebenso läfst die Anordnung des Stoffes im dritten Abschnitt zu wünschen übrig, dessen centrale Bedeutung bereits hervorgehoben wurde. In ihm werden zunächst unter gewissen Voraussetzungen und Beschränkungen hinreichende Bedingungen des starken und schwachen Extremums von J entwickelt, und erst hinterher erfährt

der Leser, warum jene Voraussetzungen berechtigt und jene Beschränkungen erforderlich waren. Eine Darstellung, bei der das Ziel des Abschnittes: *die Aufstellung hinreichender Bedingungen* auch den Schlufs der Untersuchung bildete, wäre vorzuziehen; freilich müfste dann in einer Einleitung der Plan der Untersuchung dargelegt werden.

Man könnte gegen diese Ausstellungen einwenden, dafs alles das was im Vorhergehenden angeführt worden ist, nur die Schale betrifft, dafs aber der Kern des Kneserschen Werkes vortrefflich ist, dafs es auf solider und gewissenhafter Arbeit beruht, und dafs der Leser, der die Geduld und Ausdauer hat, dem Verfasser bis ans Ende zu folgen, für seine Mühe reich belohnt wird. Die Entscheidung mögen die Leser treffen, denen vor allem zu raten ist, dafs sie sich nicht etwa durch den ersten Abschnitt: *Begriff und Grundregeln der Variationsrechnung* abschrecken lassen, der weitaus der schwächste ist. Es sei gestattet, hierauf zum Schlufs noch mit einigen Worten einzugehen.

Aufgabe des ersten Abschnittes hätte es sein sollen, den Begriff der Variationsrechnung in voller Allgemeinheit und mit der für solche grundlegenden Auseinandersetzungen erforderlichen Schärfe des Ausdrucks zu entwickeln und den Übergang zu den in den folgenden Abschnitten durchgeführten Untersuchungen dadurch zu bewirken, dafs dargelegt wurde, warum dabei gewisse einschränkende Annahmen gemacht werden müssen und was zu leisten übrig bleibt, wenn man sich von diesen befreien will.

An Stelle davon giebt der erste Abschnitt eine durch kein inneres Band verknüpfte Zusammenstellung von Definitionen und Bezeichnungen, die im Folgenden gebraucht werden, und während sonst eine erfreuliche Präcision des Ausdrucks herrscht, ist hier das Gegenteil zu konstatieren. So heifst es z. B. S. 3—4: „Sieht man δx, δy und ihre ersten Ableitungen als kleine Gröfsen an und macht die entsprechenden Vernachlässigungen, so gehe Δu in δu über.“ Hier hätte gesagt werden müssen, dafs es eine Einschränkung für δx und δy bedeutet, wenn man ihre ersten Ableitungen als kleine Gröfsen derselben Ordnung ansieht. Bedenklich ist ferner, weil es den Lernenden leicht verwirrt, dafs hier, wie an mehreren anderen Stellen des ersten Abschnittes, von Vernachlässigungen die Rede ist. Der Mathematiker hat niemals das Recht etwas zu vernachlässigen, und wenn man bei einer Reihenentwicklung das Aggregat der Glieder erster Dimension mit einem besonderen Namen oder Buchstaben belegt, so ist das keine Vernachlässigung. Noch bedenklicher ist, dafs „δx und δy als kleine Gröfsen angesehen werden“. Ja es heifst sogar (S. 1): „Die Gröfse $dy = \varphi(x + dx) - \varphi(x)$ ist, wenn dx klein ist, das Differential von y“. Das ist zum mindesten eine Definition des Differentials, die von der üblichen abweicht, nach der Differentiale, wenn man ihnen überhaupt selbständige Existenz zubilligen will, gegen Null konvergierende Inkremente der Veränderlichen sind (vergl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II. S. 69).

Kiel. Paul Stäckel.

Bemerkungen zur Entgegnung des Herrn Föppl.[1])

Diese Entgegnung giebt mir, zu meinem Bedauern, keine Veranlassung, irgend eine der in meiner Besprechung vorgetragenen Bemängelungen zu modifizieren. Nur einige Bemerkungen der Entgegnung, welche den thatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechen, mögen einer näheren Beleuchtung unterworfen werden.

Den Satz von Castigliano über die Differentialquotienten der Deformationsarbeit habe ich in der Besprechung nach der zitierten Übersetzung des Originals, wo er sich auf den Seiten 18 und 42 befindet, dem Wortlaut nach angegeben. Unter „äufseren Kräften" versteht in diesem Satz Castigliano diejenigen in den Systempunkten angreifenden Kräfte, welchen, an den Systempunkten selbst, die *Spannungen* das Gleichgewicht halten. Auch sagt er (Seite 8), *dafs ein System, welches nach der Deformation als starr betrachtet wird, unter dem Einflufs der äufseren Kräfte im Gleichgewicht ist.* Bei Castigliano sind daher *sämtliche* Stützkräfte (Auflagerkräfte) *äufsere* Kräfte.

Herr Föppl erklärt, dafs die Auflagerreaktionen „*nicht* zu den äufseren Kräften gerechnet werden können".

Castigliano beherrschte die Statik so hinreichend, dafs er wufste, dafs beim Weglassen der Auflagerreactionen (oder einzelner derselben), die nach Herrn Föppl übrig bleibenden *äufseren* Kräfte, an dem als starr betrachteten Körper *nicht* Gleichgewicht hervorrufen.

Hiernach glaube ich, auf die weiteren Ausführungen des Herrn Föppl nicht eingehen zu sollen.

Rechnet man in jeder gröfseren Brückenbauanstalt wirklich nach den Auffassungen des Herrn Föppl?

Der Irrtum des Castiglianoschen Satzes, der auch bei dem gegebenen Beweise hervortritt, liegt darin, dafs Castigliano so verfährt, als ob *eine* bestimmte Funktionsdarstellung der Deformationsarbeit vermöge der *äufseren* Kräfte existierte, während es unbegrenzt viele solche Darstellungen giebt. Der Satz selbst ist daher, in dem von Castigliano ihm gegebenen Wortlaut, gänzlich unbestimmt. Diese Vielfachheit der Funktionsformen wird aber einflufslos, wenn man das *Minimum* der Deformationsarbeit, unter der Voraussetzung der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen zwischen den *äufseren* Kräften aufsucht, unter welcher Voraussetzung die verschiedenen Formen äquivalent sind.

In das Dilemma: „Ob die Lasten die Ursache der Durchbiegungen oder die Durchbiegungen Ursache der Lasten sind" verflochten zu werden, hat Poncelet wohl nicht verdient.

Die Bemängelungen des § 65 bezogen sich sachgemäfs auf die vom Verfasser gegebenen Gleichungen für die Verschiebungen der Punkte eines isotropen Körpers, bei deren Entwickelung das Gebiet des Wärmeeinflusses ausgeschlossen, und mit keiner Silbe erwähnt wurde. Herr Föppl überträgt den Dissens auf das ausgeschlossene Gebiet, um eine Widerlegung zu konstruieren. Ich will ihm gern auch auf dies Gebiet folgen. Schon vor sechzig Jahren haben Duhamel und Franz Neumann nachgewiesen,

1) Vgl. (3) 1, 352 ff.

dafs ein in seinen verschiedenen Stellen ungleich erwärmter isotroper Körper, auch ohne Einfluss von Kräften auf das Innere oder die Oberfläche desselben, *innere* Spannungen erlangt. Diese erfolgen so, als ob auf den Körper, sowohl im Innern wie an der Oberfläche, sich das Gleichgewicht haltende Kräfte einwirkten, deren einfache Darstellung von diesen Autoren gegeben wurde. Diese „etwaigen Eigenspannungen" sind daher der Theorie der allgemeinen Gleichungen für die Verschiebungen eines isotropen Körpers zugänglich. Allerdings *nicht* ähnlich liegt es mit den sogenannten „Gufsspannungen". Wenn solche in dem auf *gleichförmige* Temperatur gebrachten isotropen Körper vorhanden sind, so werden sie *Diskontinuitäten* in den Verschiebungen verdankt. Diese Diskontinuitäten sind von derselben Art, wie diejenige, die der von Herrn Föppl in demselben Band der Vorlesungen, Seite 330, behandelten Aufgabe entspricht. Wenn man über ein Rohr aus isotropem Material ein zweites erwärmtes überschiebt, dessen innerer Durchmesser im erwärmten Zustand diese Überschiebung noch gerade erlaubt, so hat man nach Abkühlung beider Rohre auf gleiche Temperatur einen isotropen Körper mit „Eigenspannungen" vor sich. Eine thatsächliche *Diskontinuität* der Verschiebungen findet statt längs der Cylinderfläche, welche der äufseren Oberfläche des inneren und der inneren Oberfläche des äufseren Rohres gemeinschaftlich ist. Daher die Möglichkeit der Eigenspannungen. Das tiefere Verständnis dieser Verhältnisse geht wohl weniger aus der angewandten Naturwissenschaft als aus den Betrachtungen der reinen Mathematik hervor.

In Beziehung auf die Bemängelungen der Entwickelung der Lagrangeschen Gleichungen, die aus einem Irrtum von meiner Seite hervorgegangen sein sollen, bemerke ich Folgendes. Wenn man für die Untersuchung der Bewegung eines Lagrangeschen Systems den Anfangspunkt und die Axenlage des zu verwendenden rechtwinkligen Koordinatensystems festgesetzt hat, und sich für eine bestimmte Wahl der unabhängigen Parameter (der allgemeinen Koordinaten) entschieden hat, so werden die rechtwinkligen Koordinaten der einzelnen Systempunkte völlig bestimmte Funktionen dieser Parameter, welche noch etwa *willkürlich* bleibende Konstanten nicht weiter enthalten. Wenn dagegen nach Herrn Föppl die Wahl des Anfangspunktes der Vektoren und die Achsenlage (Wahl der Vektoren i, j, k), ebenso wie die der Parameter q_i erledigt ist, so enthalten die Koordinaten der einzelnen Systempunkte noch anderweitige *willkürlich* bleibende Konstanten. Spaltet man, nach der Ausdrucksweise des Herrn Föppl, die Gleichungen für die $\mathfrak{r}$ in ihre drei Komponentengleichungen, so enthalten die Koordinaten der Systempunkte noch diejenigen *Willkürlichkeiten* als Konstanten, die mit der *willkürlichen* Wahl der *Normalstellung* (*irgend einer* Stellung des Systems) verbunden sind. Der Ausgangspunkt der Entwickelungen des Herrn Föppl deckt sich also nicht mit demjenigen von Lagrange. Wird die Übereinstimmung der Endformeln behauptet, so ist von Herrn Föppl der Nachweis zu führen, dafs *allgemein* bei der Bildung der lebendigen Kräfte L die *willkürlichen* Konstanten seiner Formeln herausfallen. Ein einzelnes Beispiel[1]) beweist dafür nichts. Auch gehört gerade dieses Beispiel zu den-

1) Gewöhnlich wird die Masse des „physikalischen Pendels" nicht in eine Ebene ausgebreitet vorausgesetzt. Versagt für das einfachste *räumliche* Beispiel die neue vereinfachende Methode?

jenigen, von denen er auf Seite 281 (Bd. IV) sagt: „Für solche Mechanismen haben aber die Lagrangeschen Gleichungen wenig Wert, obschon sie, wenn man die Sache recht gelehrt darstellen will, auch dazu verwendet werden können.“ Wir wollen aber den betreffenden Nachweis von Herrn Föppl nicht fordern, sondern ihm nur die Frage vorlegen: Welche Notwendigkeit gebietet die Einführung der Vektoren $\mathfrak{r}_0$?

Es scheint mir, um mit den eignen Worten des Herrn Föppl zu sprechen, dafs er seine Entwickelungen der Lagrangeschen Gleichungen selbst für Mathematiker sehr gelehrt dargestellt hat, und dafs in den Erwägungen, die dazu führen, nur eine für das Verständnis nutzlose Erschwerung der Untersuchung liegt.

Der Beweis, den Herr Föppl in der 2. Auflage der Vorlesungen für das Lagrangesche Theorem der Hydrodynamik vorlegt, ist wiederum sehr bedenklich. Er ist aus dem Traité de Mécanique von Poisson reproduziert, aber *ohne* die Kritik, die Poisson selbst an diesem Beweis vor mehr als siebzig Jahren geübt hat. Derselbe Beweis würde in wörtlicher Wiederholung auch für die *Flüssigkeitsbewegungen unter dem Einflufs der Reibung* das Lagrangesche Theorem ergeben. Für diese Bewegungen gilt es bekanntlich nicht.

In Beziehung auf das Theorem des Herrn Föppl, dafs bei der Bewegung einer Flüssigkeit (unter Voraussetzung eines Geschwindigkeitspotentials) in einem ringförmig geschlossenen Rohr, die Bewegung „im ganzen genommen“ *nicht* wirbelfrei sei, der Sitz des „Wirbels“ an den Flüssigkeitsgrenzen liege, ist zu der Entgegnung des Herrn Föppl Folgendes zu bemerken. Wenn für alle Punkte innerhalb eines abgegrenzten Raumes die Geschwindigkeitsverteilung, also die Komponenten u, v, w als Funktionen des Orts zu bestimmter Zeit *gegeben* sind, so sind auch die Rotationskomponenten (Wirbelkomponenten) an jeder Stelle *dieses* Raumes sofort mit gegeben und stehen fest, ohne jede Beziehung zu Angaben über Bewegungen in Räumen, die aufserhalb des abgegrenzten Raumes liegen. Für die Bewegung der Flüssigkeit in einem im Rohre abgegrenzten Stromfaden (bei stationärer Bewegung), die nach Herrn Föppl „im ganzen genommen“ nicht wirbelfrei ist, scheint nunmehr Herr Föppl den Sitz des Wirbels *aufserhalb* des Stromfadens zu suchen, da er Bedingungen für *aufserhalb* des Raumes desselben gelegene Räume heranzieht. Es handelt sich aber nur um die Bewegung *im* Stromfaden, die feststeht, und um eine ideale reibungslose Flüssigkeit. Was den angeführten Satz des Herrn Föppl über die widerstandslose Bewegung eines Körpers von *beliebiger Gestalt* in einer reibungslosen Flüssigkeit anbetrifft, so kann ich nicht einsehen, dafs er mit dem aus Lambs Hydrodynamics angeführten *identisch*, oder auch nur so nahe verwandt ist, dafs ich, wenn letzterer mir vorgelegen, die Bemängelung unterlassen hätte. Wenn der Satz, dafs für eine homogene Kugel jede durch den Schwerpunkt gehende Gerade Hauptachse ist, für einen Körper von *beliebiger Gestalt* in Anspruch genommen würde, so könnte ein solches Verfahren nicht auf den bekannten Satz der *drei stets existierenden* auf einander senkrechten Hauptachsen gestützt werden. Der Vorwurf des argen Mifsgriffs entfällt daher.

Die in diesen Bemerkungen nicht berührten Verschiedenheiten der Auffassung, die bestehen bleiben, sind durch die beiderseitigen Äufserungen

hinreichend präzisiert, und bedürfen keiner erneuten Beleuchtung. Meinerseits ist daher die Diskussion über den vorliegenden Gegenstand abgeschlossen.

Charlottenburg. J. Weingarten.

Erwiderung auf die vorstehenden Bemerkungen des Herrn Weingarten.

Für den Leser, der sich die Mühe nimmt, die einschlägigen Stellen in meinem Buche nachzuschlagen, wird es nicht schwer sein, sich über die zwischen Herrn Weingarten und mir bestehenden Streitpunkte auf Grund dessen, was vorausging, ein eigenes Urteil zu bilden, auch ohne dafs ich hier noch einmal ausführlich darauf zurückkäme. Nur ein Punkt, den ich in meiner ersten Entgegnung wohl nicht ausführlich genug behandelt habe, möge aus Anlafs der letzten Äufserungen des Herrn Weingarten noch einmal besprochen werden. Es handelt sich um die Gufsspannungen, über die Herr Weingarten sagt:

„Allerdings *nicht* ähnlich (wie bei den durch ungleichmäfsige Erwärmung hervorgebrachten Spannungen) liegt es bei den sogenannten „Gufsspannungen“.“

Um diese Behauptung zu widerlegen, betrachte ich wieder einen Lampencylinder, von dem ich jetzt voraussetzen will, dafs er bei irgend einer ungleichförmigen Erwärmung spannungslos gewesen sei. Wenn er nach der Abkühlung überall dieselbe Temperatur angenommen hat, besteht in ihm ein System von Eigenspannungen, die man mit vollem Rechte auch als Gufsspannungen bezeichnen kann, da ja in der That die Gufsspannungen durch Abkühlung aus einem spannungslosen Zustande, der bald nach dem Gusse noch besteht, dadurch hervorgehen, dafs sich die verschieden warm gebliebenen Teile um ungleiche Beträge abkühlen müssen, um in einen Zustand von gleicher Temperatur zu gelangen. Man sieht aber nun schon, dafs jeder durch verschieden starke Abkühlung hervorgebrachte Spannungszustand ebenso auch durch eine entsprechende ungleichmäfsige Erwärmung hervorgerufen werden könnte, und dafs daher zwischen beiden Fällen der von Herrn Weingarten behauptete Unterschied nicht besteht.

Richtig ist allerdings, dafs man in besonders einfach gelagerten Fällen die Eigenspannungen — wie sie nun auch im übrigen entstanden sein mögen — auf Diskontinuitätsflächen der elastischen Verschiebungen zurückführen kann. Im allgemeinen Falle ist eine solche Zurückführung aber nicht möglich. Nimmt man z. B. an, dafs in einem Lampencylinder ein System von Eigenspannungen bestehe, das auf eine einzige Diskontinuitätsfläche der Verschiebungen zurückgeführt werden könnte, so müfste der Cylinder, wenn man ihn längs dieser Fläche aufreifst und aufklaffen läfst, nachher überall im spannungslosen Zustande sein. Im allgemeinen wird aber ein einziger Sprung dieser Art natürlich nicht genügen, um alle Eigenspannungen zu beseitigen. Selbst nachdem man den Cylinder in beliebig viele Bruchstücke zerlegt hat, werden im allgemeinen in jedem Bruchstücke noch Eigenspannungen — wenn auch von entsprechend geringerem Betrage — zurückgeblieben sein. Man erkennt daher leicht, dafs im allgemeinsten Falle unendlich viele Diskontinuitätsflächen der Verschiebungen angenommen werden müfsten. Es mag ja nun sein, dass ein Mathematiker daran keinen An-

stofs nimmt; jeder Naturforscher wird aber wohl erklären, dafs ihm mit einer solchen Darstellung nicht gedient sei.

Der Satz in meinem Buche, an den sich diese Erörterungen knüpfen, lautet: „Diese (die Gufsspannungen) hängen aber von Umständen ab, die mit unserer Aufgabe nichts zu thun haben und deren Berechnung daher auch nicht verlangt werden kann". Der Leser möge nun entscheiden, ob mir ein Vorwurf daraus zu machen ist, dafs ich es unterliefs, hier beizufügen, dafs man diese Spannungen auf ein System von im allgemeinen unendlich vielen Diskontinuitätsflächen zurückzuführen vermöchte, dafs aber durch diese Darstellung die Berechnung der Spannungen selbst um keinen Schritt weiter gefördert würde.

Schliefslich erwidre ich noch auf die zum physikalischen Pendel gestellte Frage des Herrn Weingarten:

„Versagt für das einfachste räumliche Beispiel die neue vereinfachende Methode?"

dafs die Methode nicht versagt, und dafs sich die Formeln für diesen Fall nur wenig von den für den früheren Fall angeschriebenen unterscheiden. Da man aber von dem Leser, der sich ein zutreffendes Urteil über die Vektor-Methode bilden will, erwarten mufs, dafs er sich zuvor wenigstens so weit mit dieser Methode vertraut gemacht hat, um sich derartig einfache Fragen ohne fremde Beihülfe selbst beantworten zu können, sehe ich davon ab, die Formeln auch für diesen Fall anzuschreiben. Aus demselben Grunde gehe ich auch auf die übrigen hiermit im Zusammenhange stehenden Äufserungen des Herrn Weingarten nicht weiter ein.

München. A. Föppl.

Otto Pund. Algebra mit Einschlufs der elementaren Zahlentheorie. VIII + 345 Seiten. Göschen-Leipzig, 1899.

Um die im Bande VI der „Sammlung Schubert" gegebene Algebra beurteilen zu können, mufs man berücksichtigen, dafs die „Praxis der Gleichungen" in einem später herauszugebenden besonderen Bande durch Herrn Runge behandelt werden wird. Während dieses letztere Buch unzweifelhaft „den Anforderungen der Praktiker im weitesten Mafse Rechnung tragen" wird, ist die Pundsche Algebra für den Praktiker im wesentlichen ohne Bedeutung und nur für die Studierenden der Mathematik im engeren Sinne brauchbar. Herr Pund ist Anhänger Kroneckers und hat sich bemüht, dessen Terminologie und Begriffsbildungen auch schon bei elementareren Gegenständen zur Verwendung zu bringen, und zwar in gröfserem Umfange, als man dies in sonstigen modernen Lehrbüchern, z. B. denen Nettos und Webers, findet. Bekommt hierdurch das vorliegende Buch einen ausgesprochenen Charakter, so ist doch dieses Unternehmen gleichwohl nicht ohne Schwierigkeit. Die Benutzung des Begriffs der „Modulsysteme" für die Zwecke, die hier vorliegen, wird vielleicht von manchen für ein wenig bedenklich gehalten werden. Es ist ja freilich verständlich, dafs der Kenner der grofsen Bedeutung, welche dieser Begriff in der allgemeinen arithmetischen Behandlung der algebraischen Gebilde besitzt, denselben in möglichst weitem Umfange anzuwenden bestrebt ist. Auch soll gern zugestanden werden, dafs verschiedene Entwickelungen, die Behandlung der linearen

Kongruenzen, die Lösung linearer Gleichungen u. a., bei Gebrauch der Modulsysteme unter den einheitlichen Gesichtspunkt der Äquivalenz der Modulsysteme gerückt werden. Aber man könnte doch Bedenken hegen, ob der lernende Leser den Begriff des Modulsystems an der vom Verfasser zur Einführung gewählten Stelle und in der von ihm bevorzugten Gestalt als einen der Sache gemäfsen anerkennt. Es heifst S. 33: „Wir nennen den gröfsten gemeinsamen Teiler von $a, b, c, \cdots$ auch das aus den Zahlen $a, b, c, \cdots$ als Elementen gebildete Modulsystem." Wird die Einführung des Inbegriffs aller Zahlen $\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots$ mit ganzzahligen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ für zu schwierig gehalten, so bleibt bei der hier gewählten Definition für den Anfänger immer ein gewisser Widerstreit zwischen der Benennung und deren Bedeutung. Auch bei der späteren Rückkehr zum Begriff des Modulsystems (S. 104) hat es der Lernende nicht ganz leicht. Dort kommen Modulsysteme für lineare Funktionen zweier Variabeln mit beliebigen Koeffizienten in Betracht. Vielleicht wäre hier besser zunächst die Erweiterung des Begriffs des Modulsystems an die Spitze gestellt, ehe man zum Begriff der Äquivalenz der Modulsysteme vorgeht. Wenn Kronecker in Vorlesungen über Determinantentheorie u. a., an allgemeine Begriffe anknüpfend, im wesentlichen einen deduktiven Entwickelungsgang befolgte, so ist für ein einführendes Lehrbuch doch auch der induktive Weg seiner leichteren Fafsbarkeit wegen beachtenswert. Dafs der Herr Verfasser viel Neigung hat, deduktiv zu operieren, sieht man an seiner Einführung der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(m)$ S. 47 ff. Über methodische Fragen wird der Zwiespalt der Meinungen natürlich immer bestehen bleiben. Betrachtet man aber das vorliegende Buch allein auf seinen sachlichen Inhalt, so kann man nur bewundern, mit welchem Geschick der Verfasser bei dem geringen zur Verfügung stehenden Raume wirklich in die Tiefen der Algebra eingeführt hat. Vor allem gilt dies vom letzten Abschnitt, welcher von der algebraischen Auflösung der Gleichungen auf Grund der Theorie der Permutationsgruppen handelt. Dieser in der Gleichungstheorie unentbehrliche und der Algebra eigene Gruppenbegriff wird übrigens auch schon in früheren Teilen des Buches eingeführt und eingeübt. Eine Reihe zahlentheoretischer Abschnitte, welche die Teilbarkeit der ganzen Zahlen, sowie die Kongruenzen ersten und höheren Grades behandeln, fügen sich der Entwicklung zwanglos ein und dienen ihrerseits wieder zum Ausbau der algebraischen Abschnitte.

Braunschweig. Fricke.

M. Glöser. **Lehrbuch der Arithmetik für die erste und zweite Klasse der österreichischen Realschulen.** Vierte Auflage. 209 S. M. 1,80.

Grundzüge der allgemeinen Arithmetik für die dritte Klasse der österreichischen Realschulen. Vierte Auflage. 116 S. Wien 1899, A. Pichler. M. 1,30.

Das Lehrbuch enthält das Rechenpensum der Sexta bis Quarta eines preufsischen Gymnasiums in einer Darstellung, die dem Übungsmaterial nicht hinreichenden Raum gewährt, so dafs der Schüler neben dem Lehrbuch noch eine Aufgabensammlung nötig hätte. Derselbe Vorwurf ist gegen die

„Grundzüge" zu erheben. Auch hier macht sich der Text auf Kosten des Übungsmaterials viel zu breit. Es mufs immer wieder betont werden, dafs für den Rechen- und Algebra-Unterricht eine reichhaltige Aufgabensammlung die Hauptsache bleibt.

In den „Grundzügen" fällt weiter das gänzliche Fehlen der Gleichungen auf. Dieser Mangel dürfte allein genügen, um die „Grundzüge" als ungeeignet für eine Einführung in die Algebra erscheinen zu lassen.

Berlin. E. JAHNKE.

W. Goering. Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises und die Teilung jedes beliebigen Winkels und Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Teile. Dresden 1899, E. Schürmann. 13 S.

Die vom Verfasser mitgeteilte Konstruktion ist natürlich auch nur eine angenäherte und lautet so: Gegeben der Quadrant MAB mit M als Kreismittelpunkt. Errichte über der Sehne AB das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\sphericalangle ABC = 1R$, $\sphericalangle BAC = \frac{1}{4}R$; sodann über AC das rechtwinklige Dreieck ACD mit $\sphericalangle ACD = 1R$, $< CAD = \frac{1}{8}R$ u. s. w. Alsdann führt die ins Unendliche fortgesetzte Konstruktion zu einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $AZ = \frac{\pi}{4}$.

Das ist offenbar nur die Konstruktion der bekannten Formel

$$\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots},$$

durch welche jeder Kreisbogen darstellbar ist. Nach Cantors Gesch. d. Math. II, 595 geht diese Formel schon auf Vieta 1593 zurück.

Berlin. E. JAHNKE.

Wilh. Killing. Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. Erster Teil: Die ebene Geometrie. Mit 50 Figuren im Text. Paderborn 1900. Ferdinand Schöningh. XIII, 220 S. — Zweiter Teil: Die Geometrie des Raumes. Paderborn 1901. Ferdinand Schöningh. VIII, 361 S.

Wer eine Vorlesung über analytische Geometrie gehalten hat, wird unzweifelhaft, so viel er auch versucht hat, in dieselbe hineinzuverweben, am Schlusse die Empfindung haben, er habe noch immer sehr viel mehr bei Seite liegen lassen müssen, als er zu erörtern im stande war, und diese Empfindung wird ihm auch dann nicht erspart, wenn er, von vornherein auf höhere algebraische Kurven und um so mehr aut transcendente Kurven, auf Raumkurven und auf Oberflächen höherer Art verzichtend, einzig die Gerade und die Kegelschnitte, die Ebenen und die Oberflächen zweiten Grades zu behandeln sich vornahm. Herr Killing hat, offenbar von dem gleichen Gefühle aus, an eine Vorlesung ganz elementarer Natur, welche, scheint es, sich der einzigen Descartesschen Punktkoordinaten bedient, eine zweite angeschlossen, welche homogene Koordinaten und zwar sowohl homogene Punkt- als homogene Linienkoordinaten, später Tetraederkoordinaten, ver-

wendet, und welche in ihnen das Mittel findet, weit tiefer in den Gegenstand einzudringen, sowie auch weit allgemeinere Betrachtungen anzustellen, als sie bei einem ersten Unterrichte gestattet sind. Aus dieser zweiten Vorlesung ist das kleine Lehrbuch entstanden, dessen erster Teil die ebene Geometrie, der zweite Teil die Raumgeometrie behandelt. Von analytischen Hilfslehren setzt Herr Killing nur die Theorie der Determinanten als bekannt voraus, auf Infinitesimalbetrachtungen erhebt er keinen Anspruch. Wir gestehen gern, daſs, als wir das verhältnismäſsig dünne Buch durchgelesen hatten, zuerst die Frage sich uns aufdrängte, ob denn wirklich 220 und 361 Seiten ausgereicht hatten, den gewaltigen Stoff zu bewältigen, und daſs, als der Augenschein uns zur Bejahung zwang, als zweite Frage die erschien, ob Studierende im stande sein werden, den Killingschen Vorlesungen zu folgen? Auch diese Frage möchten wir für den ersten Teil etwa vom dritten Bogen an unbedingt bejahen, während wir die erste Einführung in die Lehre von den trimetrischen Koordinaten, deren Schwierigkeit Herr Killing sich vollständig bewuſst ist, gern noch etwas breiter angelegt sähen. Vielleicht täuschen wir uns; aber wir können Zweifel nicht unterdrücken, ob jene ersten Kapitel auf volles Verständnis treffen mögen, wie es zur Anwendung doch unumgänglich ist. Zu den bestgelungenen und klarsten Teilen des Buches rechnen wir dagegen §§ 8—11 von den uneigentlichen Gebilden in der Ebene, worunter Herr Killing die unendlich fernen Gebilde versteht. Bei den Kurven, d. h. bei den Kegelschnitten, ist die Lehre von den Polaren an die Spitze gestellt, indem ein Punktepaar gesucht wird, welches die Durchschnittspunkte einer Transversalen mit der Kurve zu vier harmonischen Punkten ergänzt; die durch den Pol selbst hindurchgehende Polare bildet den Sonderfall der Berührungslinie. Die Anordnung der letzten Paragraphen des Buches ist von der gewöhnlich gebrauchten sehr verschieden. Erst nachdem die Sätze von Pascal und von Brianchon erwiesen sind, wird mittels des Pascalschen Satzes die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlenbüschel hergeleitet. Dann schlieſst sich als § 29 der Kreis und die unendlichfernen Kreispunkte an. Hier kommen also ganz spät die Chordalen, der Chordalmittelpunkt, die Ähnlichkeitspunkte, lauter Gegenstände, welche häufig noch vor den Kegelschnitten erörtert werden. Nun kehrt Herr Killing zu den Kegelschnitten zurück und nimmt deren Hauptachsenproblem in Angriff. Endlich ist § 31 als letzter Paragraph den konfokalen Kegelschnitten gewidmet, welche als solche definiert werden, zu welchen die unendlich fernen Kreispunkte gehören: So erscheint der Begriff der Brennpunkte selbst ganz am Schlusse der Betrachtungen. In einer ersten Vorlesung über analytische Geometrie der Ebene wäre das wohl kaum zu empfehlen; aber in einer zweiten erhöht der Wechsel in der Reihenfolge unzweifelhaft den Reiz und erzeugt eine gewisse Spannung der Zuhörer, wann wohl diese oder jene ihnen bekannte geometrische Thatsache an die Reihe kommen werde. Der zweite Teil behandelt, wie schon gesagt worden ist, die Geometrie des Raumes. Das ist an sich ein erheblich schwierigerer Gegenstand als die Geometrie der Ebene, und auch die Killingsche Darstellung stellt an den Leser, den wir uns unter allen Umständen wiederum als mit den wichtigsten Thatsachen schon bekannt voraussetzen, ziemlich hohe Anforderungen, trotzdem infinitesimale Lehren nicht in Anspruch genommen werden. Diese letztere Beschränkung bildet eine wesentliche Verschiedenheit gegen Hesses

Analytische Geometrie des Raumes, von welchen sich Hr. Killing im übrigen ziemlich beeinflussen liefs, wie es bei den anerkannten Vorzügen jenes klassischen Werkes kaum anders möglich war. Wir müssen uns freilich dagegen verwahren, als sollte hiermit behauptet werden, Hr. Killing habe sich an Hesse angelehnt. Plan und Inhalt zeigen bei beiden Werken die bedeutendsten Unterschiede; nur in Einzelheiten, z. B. in der Behandlung des Hauptachsenproblems bei den Oberflächen zweiten Grades, tritt eine Ähnlichkeit hervor. Der Stoff ist in 36 Paragraphen gegliedert. Entsprechend dem in der Geometrie der Ebene eingeschlagenen Gange ist der Lehre von den Polarebenen, dann der von den Polartetraedern die gröfste Aufmerksamkeit geschenkt, und sie dient als Grundlage der späteren Untersuchungen. Von den Oberflächen zweiter Ordnung wendet sich der Verfasser im 20. Paragraphen zu den Oberflächen zweiter Klasse, und beide geben im weiteren Verlaufe Gelegenheit, Flächenbüschel zweiter Ordnung von Flächenscharen zweiter Klasse zu unterscheiden. Ein gewisser Parallelismus zur Geometrie der Ebene ist auch darin zu erkennen, dafs die Lehre von den konfokalen Flächen in drei Paragraphen den Abschlufs des Ganzen bildet.

Heidelberg. M. Cantor.

Henri Fehr. Application de la méthode vectorielle de Grafsmann à la géométrie infinitésimale. Thèse. Paris. Georges Carré et C. Naud. 1899. 94 S. 8°.

Schon in Grafsmanns „Ausdehnungslehre" von 1862 finden sich die Grundlagen der Differentialrechnung mit extensiven Gröfsen, jedoch nur nach der analytischen Seite hin entwickelt und ohne geometrische Anwendungen. Erst Hermann Grafsmann der Jüngere hat in drei Programm-Abhandlungen der Lateinischen Hauptschule (1886, 1888, 1893) die metrische Geometrie der Raumkurven und der krummen Flächen mit den Mitteln der Ausdehnungslehre von Grund aus und zusammenhängend aufgebaut, und zwar, entsprechend dem Gegenstande, ausschliefslich mit den Methoden der Streckenrechnung, unter Ausschlufs der mehr für die Geometrie der Lage geeigneten Punktrechnung. Später hat Burali-Forti in seiner „Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grafsmann" (Paris 1897) Anwendungen der Ausdehnungslehre gegeben auf die Theorie der Enveloppen von Linien und Ebenen, der Regelflächen, Schraubenlinien, orthogonalen Trajektorien, Evolventen und Evoluten und Verwandtes.

Der Verf. der vorliegenden Pariser Doktor-Dissertation verfolgt den Zweck, die vereinfachende Wirkung der Methoden der Ausdehnungslehre auf denselben Gebieten der Geometrie darzuthun, die schon Grafsmann der Jüngere behandelt hat. Es liegt in der Natur der Sache, dafs sich hieraus weitgehende Übereinstimmungen in den beiderseitigen Darlegungen und Resultaten ergeben. Auch erklärt der Verfasser schon im Vorwort, im Interesse des Zusammenhanges und der Klarheit seiner Darstellung manche Stellen der Grafsmannschen Arbeit direkt übernommen zu haben, während er seine selbständigen Untersuchungen hauptsächlich auf die Theorie der Flächen gerichtet hat. Neue Resultate will er nicht bieten; auch vermeidet er bei der Auswahl des Stoffes solche Spezialitäten, bei denen die Überlegenheit der Grafsmannschen Methoden in geringerem Grade hervortritt. — Nach-

dem diese Methoden in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten her, insbesondere durch unseren Landsmann Caspary, in ihren Grundlagen wie in ihren Anordnungen dem Interesse der französischen Mathematiker näher gerückt worden sind und speziell in Herrn Carvallo einen begeisterten Anhänger gefunden haben, ist es als ein verdienstliches Unternehmen zu bezeichnen, daſs Herr Fehr denselben Fachmännern die Vorteile dieser Methoden nun auch auf demjenigen Gebiete vorgeführt hat, welches gerade von den Mathematikern Frankreichs mit so lebhaftem Interesse betreten und mit so groſsem Erfolge angebaut worden ist.

Über den Inhalt ist im einzelnen folgendes zu berichten. In der Einleitung werden die zum Verständnis notwendigen Begriffe und Formeln der Ausdehnungslehre zusammengestellt. Es werden Linienteil und Strecke unterschieden, die äuſseren Produkte von zwei und drei Strecken gebildet und geometrisch gedeutet, sodann das innere Produkt zweier Strecken, das innere Quadrat und sein numerischer Wert. Es folgt der Begriff der Ergänzung, das System der drei zu einander normalen Einheitsstrecken (e_1, e_2, e_3) nebst der numerischen Ableitung einer beliebigen Strecke aus denselben, die innere Multiplikation zweier Flächenräume, die Determinante als Zahlfaktor eines äuſseren Produktes und der Zusammenhang der Einheiten mit den rechtwinkligen Koordinaten. Um schlieſslich eine Raumkurve darzustellen, wird die Strecke zwischen einem Kurvenpunkte M und dem Ausgangspunkte O der drei Einheitsstrecken durch den Ausdruck bestimmt:

$$x = M - O = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

wobei x_1, x_2, x_3 Funktionen einer unabhängigen reellen Variable t sind, sodaſs die Gleichung schlieſslich die Form erhält:

$$x = x_1(t)\, e_1 + x_2(t)\, e_2 + x_3(t)\, e_3 = \mathfrak{F}\,(t).$$

Die Gleichung einer Fläche unterscheidet sich von der vorstehenden nur dadurch, daſs x als Funktion zweier Variablen u und v erscheint. — Die Bezeichnungsweisen sind die der Ausdehnungslehre, in der Terminologie folgt der Verfasser zum Teil Hamilton, auch Burali-Forti. Doch sind auch Ausdrücke anderer Autoren nicht unerwähnt gelassen. Ebenso fehlt es nicht an sachlichen Hinweisen auf verwandte Untersuchungen.

Nach diesen Vorbereitungen werden im ersten Kapitel der Arbeit die Raumkurven behandelt, die Gleichungen der Tangente, der Normalebene, Schmiegungsebene und Hauptnormale aufgestellt. Hier wie in der darauffolgenden Krümmungstheorie stimmen Methoden und Resultate im wesentlichen mit denen von Graſsmann überein. Jedoch beschränkt sich Fehr mehr auf das Hauptsächlichste und fügt andrerseits noch einen Abschnitt über die dritte Krümmung mit der Lancretschen Formel, betreffend den Zusammenhang der drei Krümmungen, hinzu. — Das zweite Kapitel bringt die Elemente der Flächentheorie, ebenfalls in der Hauptsache in Übereinstimmung mit Graſsmann. Nach Definition der krummlinigen Koordinaten u und v werden die Ausdrücke für das Linien- und das Flächenelement aufgestellt. Durch Einführung der Tangentenstrecken l_u und l_v an die Koordinatenkurven (u) und (v) wird bei der Darstellung der Fundamentalbeziehungen erster und zweiter Ordnung eine wesentliche Vereinfachung erzielt. Es wird ferner der Winkel einer Kurve mit den Koordinatenkurven

und die Bedingung der Orthogonalkurven bestimmt. Aufserdem wird dem Netze der isothermischen Kurven eine kurze Betrachtung gewidmet und gezeigt, wie die ersten Ableitungen der Neigungsstrecke l_r in Funktion der ersten Ableitungen von x dargestellt werden können. — Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Linien. Es wird der Satz von Meusnier abgeleitet (etwas abweichend von Grafsmann), sodann die Ausdrücke für die Krümmung der Hauptschnitte nebst den Hauptrichtungen und Hauptkrümmungsradien, endlich die Eulersche Formel auf zwei verschiedenen Wegen. — Das vierte Kapitel handelt von der Krümmung der Flächen. Die allgemeinen Formeln der totalen Krümmung werden auf eine Regelfläche angewendet, die mittlere Krümmung führt zum Begriff der Minimalflächen. Hinzugefügt ist ein Abschnitt über die sogenannte mittlere quadratische Krümmung C_m^2, deren Begriff von Casorati eingeführt wurde, und die mit der totalen Krümmung C_t und der mittleren C_q durch die einfache Formel zusammenhängt:

$$C_m^2 = \tfrac{1}{2}(C_q + C_t).$$

Im letzten Kapitel werden die wichtigsten Linien auf einer Fläche untersucht. Der Verfasser geht von dem konjugierten System aus und behandelt die Krümmungslinien als Spezialfall der konjugierten, nämlich unter der Annahme, dafs die letzteren ein orthogonales System bilden, während Grafsmann den umgekehrten Weg einschlägt. Es werden dann unter Voraussetzung von Krümmungslinien als Koordinatenkurven noch weiter vereinfachte Ausdrücke für die Krümmungsradien und die Krümmungen einer Fläche gegeben, woran sich das Dupinsche Theorem schliefst. Es folgen die asymptotischen und geodätischen Linien nebst einem Schlufsabschnitt über die geodätische Krümmung.

Im Vergleich mit der Grafsmannschen Arbeit ist die vorliegende vielfach kürzer gefafst, weist auch gelegentlich auf die ausführlicheren Darlegungen jener Arbeit hin und geht endlich inhaltlich weniger ins Einzelne, fügt aber einiges Neue hinzu. Neben allen den unvermeidlichen Übereinstimmungen, die sich aus der Gleichheit des Stoffes und der Methode ergeben, zeigt die Fehrsche Arbeit doch sowohl in der Anordnung des Stoffes wie in der Behandlungsweise ein ausreichend originelles Gepräge, um für ihr Studium auch bei demjenigen Leser Interesse zu wecken, der die Grafsmannsche Arbeit bereits kennt.

Hagen i. W. V. Schlegel.

F. Klein und **E. Riecke. Über angewandte Mathematik und Physik** in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1900, bei Gelegenheit des Ferienkurses. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von **F. Klein.** Mit 84 Textfiguren. Leipzig und Berlin 1900, B. G. Teubner. VII, 252 S.

Die Herausgeber haben in einem Vorworte die Fragen näher bestimmt, auf welche die Mehrzahl der Ostern 1900 von den Göttinger Professoren der Mathematik und Physik abgehaltenen Ferienkurse die Antwort erteilen sollten. Sie lauten: Was sind angewandte Mathematik und Physik im

Sinne der neuen Prüfungsordnung, und was bedeuten sie für die höheren Schulen? Wie kann der Lehrer sich nötigenfalls durch Selbstunterricht die erforderlichen Kenntnisse erwerben? Wie andererseits sind mit Rücksicht auf das Bedürfnis der Schulen wie der Wissenschaft überhaupt unsere bezüglichen Universitätseinrichtungen zu ergänzen? In einem Nachworte haben alsdann die Herausgeber von den Gegnern gesprochen, welche teils an Universitäten, teils an technischen Hochschulen den durch sie in Göttingen geschaffenen Einrichtungen erwachsen sind. Man sieht daraus, dafs es recht eigentliche Orationes pro domo waren, welche damals gehalten wurden, welche jetzt im Drucke vereinigt sind, und wer noch zweifelhaft wäre, dem würden die in den gleichen Band aufgenommenen Vorträge und Aufsätze des Herrn Klein über die Wiedereinfügung in den Lehrplan der Universität von Dingen, welche seit kaum einem Jahrhundert sich aus ihm abgezweigt haben, insoweit sie damals schon vorhanden waren, Gewifsheit geben. Ein in einer bestimmten Richtung belehrender, naturgemäfs etwas polemischer Zweck lag mithin den Vorträgen zu Grunde, wenn auch die Form der Polemik durchweg vermieden, dort wo sie im Anhange früher vorhanden gewesen, wesentlich gemildert erscheint.

Sämtliche Vorträge sind aber auch an und für sich belehrend, und es will uns dem Charakter unserer gewöhnlichen Berichterstattung entsprechend erscheinen, in diesem Sinne auf deren Inhalt aufmerksam zu machen.

1. Zur Geschichte des physikalischen Institutes und des physikalischen Unterrichtes an der Universität Göttingen. Von Ed. Riecke. Eine fesselnde Darstellung der wechselvollen Schicksale dieses Lehrzweiges entrollt sich. Segner, Kästner, Tobias Mayer, Vater & Sohn, Lichtenberg, Wilhelm Weber sind die bekanntesten auftretenden Namen.

2. Allgemeines über angewandte Mathematik. Von F. Klein. Der Lehrplan, welcher den Göttinger Vorlesungen für mathematische Lehramtskandidaten zu Grunde liegt, ist entwickelt. Als Endziel wird angestrebt, durch Zusammenwirken des Lehrerkollegiums die Allseitigkeit nutzbar zu machen, die ein Gaufs schriftstellerisch vereinigte, wenn er auch verschmähte, sie als Lehrer zu bethätigen.

3. Über technische Mechanik. Von F. Klein. Die technische Mechanik wird im Gegensatze zu der reinen, theoretischen, oder wie der Vortragende sie nennt, zu der klassischen Mechanik gestellt. Bewegungserscheinungen ungemein verwickelter Art, deren Ursprung vielfach nur mangelhaft bekannt ist, werden studiert. Dieser Eigenart der Aufgabe entspricht eine Eigenart der Behandlung. Man sucht nicht die wahre, sondern nur eine von der wahren so wenig als möglich abweichende Lösung; man sucht sie auf dem Wege der Annäherung; man bedient sich deshalb eigens zu diesem Zwecke erfundener, insbesondere graphischer Methoden. Grade die Ersinnung solcher Methoden und die Ausscheidung des in erster Annäherung zu Vernachlässigenden hat der eigentliche Mathematiker zu leisten.

4. Über darstellende Geometrie. Von Fr. Schilling. An eine Schilderung der Lehrmittel und Lehrräume für den Unterricht in darstellender Geometrie knüpft sich in Gestalt der Überschriften von 36 Paragraphen das Gerippe des Lehrganges selbst.

5. Einführung in die Geodäsie. Von E. Wiechert. Eine ziemlich ausführliche Beschreibung einfacher feldmesserischer Hilfsmittel und der damit zu lösenden Aufgaben setzt den Leser in den Stand, lehrend auf diesem Gebiete zu wirken, vorausgesetzt allerdings, dafs er das Können sich aneigne, welches bei Benutzung der beschriebenen Vorrichtungen weit wichtiger als das Kennen ist.

6. Über Versicherungsmathematik. Von G. Bohlmann. Der Vortragende erörterte besonders eingehend die Anfertigung von Sterblichkeitstafeln unter Berücksichtigung der wichtigen, allerdings auch etwas schwierigen Arbeiten von Knapp und von Lexis.

7. Über Wärmekraftmaschinen. Von Eug. Meyer. Als Hauptinhalt dürfen wir die Angabe der bei solchen Maschinen erzielten thatsächlichen Wirkung im Gegensatze zur rechnungsmäfsig möglichen Wirkung nennen.

8. Über Elektrotechnik. Von Th. Des Coudres. Die Überschriften der nur wenig mit einander in notwendigem Zusammenhange stehenden Unterabteilungen sind: das magnetische Feld, das Ohmsche Gesetz, Dynamocharakteristiken, Temperaturgleichgewicht der Maschinen, wirtschaftlicher Querschnitt und rentable Spannung, Wechselstrom, die Göttinger elektrische Centrale.

Dieses sind die dem Drucke übergebenen Vorlesungen aus dem Ferienkurse. Der Anhang vereinigt folgende vier Arbeiten von F. Klein. 1. Über den Plan eines physikalisch-technischen Instituts an der Universität Göttingen (1895). 2. Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtskandidaten (1896). 3. Universität und technische Hochschule (1898). 4. Über die Neueinrichtungen für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen (1899).

Heidelberg. M. Cantor.

Eugen Netto. Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Zweiter Band. XII + 519 Seiten mit eingedruckten Holzschnitten. Leipzig 1900, Teubner.

Mit dem jüngst erschienenen zweiten Bande kommt das grofse Algebrawerk des als Kenner und Forscher der Algebra gleich hochgeachteten Herrn Verfassers zum Abschlufs. Der erste Band, der 1896 erschienen ist, wurde in der historisch-litterarischen Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 43, angezeigt und gewürdigt. Der vorliegende zweite Band schliefst sich methodisch und sachlich eng an den ersten an. Herr Netto zeigt sich in Ansehung der Methode auch hier als überzeugter Purist; er behandelt die „Algebra“ mit möglichst rein und ausführlich entwickelten „algebraischen“ Methoden. Unentbehrlich war schliefslich nur die Hinzunahme der Gruppentheorie. Die geometrischen Entwickelungen über die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung haben nur den Charakter eines beiläufigen Beispiels, und die Untersuchungen S. 374 ff., algebraische Zahlen betreffend, vermeiden arithmetische Gesichtspunkte fast ganz. Um so ausgiebiger kommt die eigentliche Algebra in Herrn Nettos Werk zur Geltung, und es eröffnet sich namentlich auch ein übersichtlicher Blick über die weit verzweigte algebraische Litteratur. In der That dürften die vielseitigen litterarischen Angaben des Verfassers, welche durch ein am Schlusse

angefügtes Namenregister noch erhöht zugänglich werden, einen besonderen Wert des vorliegenden Werkes darstellen.

Die Gruppentheorie hat Herr Netto um einige neue Benennungen bereichert. Das Wort „Subgruppe“ statt „Untergruppe“ ist zwar nicht so deutsch, hat dafür aber zwei Buchstaben weniger; übrigens hätte diese Benennung wohl S. 236 bei Einführung der gruppentheoretischen Terminologie genannt werden können. Etwas fremdartig berühren die Benennungen „conjuge“ und „autojuge“ Untergruppe. Eine „autojuge Untergruppe“ heifst sonst eine „monotypische“, „selbst-konjugierte“ oder „ausgezeichnete“ Untergruppe oder auch ein „Normalteiler“. Verfasser hält die von englischen Autoren hergenommene Bezeichnung „selbst-konjugierte“ Untergruppe für die treffendste, wogegen jedoch zu erwidern ist, dafs jede Gruppe sich selbst konjugiert ist; denn sie wird jedenfalls durch ihre eigenen Operationen in sich selbst transformiert. Das Beste an den Bezeichnungen „conjug“ und „autojug“ würde unzweifelhaft sein, wenn sie allseitig acceptiert und ausschliefslich in Benutzung genommen würden; doch läfst sich das nicht erzwingen. Übrigens ist Kürze der Bezeichnung gewifs gut; dafs man aber auch mit längeren Bezeichnungen, wenn anders sie sinngemäfs sind, ganz gut auskommen kann, zeigt uns das Beispiel der Chemiker in überzeugender Weise.

Der Abschlufs des ersten Bandes liefs die Vermutung zu, dafs der zweite Band zunächst die algebraische Auflösung der Gleichungen weiterfördern möchte, insoweit diese ohne ausführliche Heranziehung der Gruppentheorie durchführbar ist. Indessen unterbricht Verfasser diesen Gegenstand zunächst, um sich zur Theorie der Elimination zu wenden, deren Ergebnisse späterhin zur Verwendung kommen. Vorausgesandt wird erst noch ein Abschnitt über ganze rationale Funktionen mehrerer Variabeln, deren Irreduzibilität, sowie deren Wurzelsysteme. Die Eliminationstheorie, welche die Vorlesungen 33 bis 47 umfafst, ist so reichhaltig und erschöpfend angelegt, dafs kein irgend wesentlicher Zweig dieses Gegenstandes unberücksichtigt geblieben ist. Der Leser findet hier die grundlegenden Sätze über Resultanten und Eliminanten, die Eliminationsmethoden von Kronecker, von Cayley-Sylvester, die Theorie der Diskriminanten u. a. Auch die Charakteristikentheorie, vermöge deren Kronecker eine weitgehende Verallgemeinerung der Sturmschen Sätze erzielte, findet hier ihren Platz. Der fundamentale Satz von Hilbert, dafs man in einer irreduziblen ganzen ganzzahligen Funktion der $(m+n)$ Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n$ den letzten n Variabeln stets solche ganzzahligen Werte beilegen kann, dafs eine „irreduzible“ Funktion der $x_1, x_2, \cdots, x_m$ resultiert, wird in einer besonderen Vorlesung behandelt.

Im fünften Abschnitt (Vorlesungen 49 bis 68) wird erstlich die am Schlusse des ersten Bandes unterbrochene algebraische Auflösung der Gleichungen insoweit fortgeführt, dafs die cyklischen Gleichungen sowie die allgemeinen Abelschen Gleichungen ohne Zuhilfenahme des Gruppenbegriffs behandelt werden. Dann aber folgt in neun Vorlesungen die Theorie der Substitutionsgruppen, wobei der Kontinuiät halber die Abelschen Gruppen voranstehen. Nach allgemeinen Betrachtungen über die Gesamtgruppe aller $n!$ Substitutionen, sowie über alternierende und cyklische Funktionen wendet sich die Darstellung gleich wieder im speziellen zur linearen Gruppe,

wo der binäre Fall wegen seiner Anwendungen im Gebiete der elliptischen Funktionen besonders interessant ist. Demnächst greifen algebraische Entwickelungen über die zu den einzelnen Untergruppen gehörenden Funktionengattungen, über Resolventenbildung u. s. w. mit dem weiteren gruppentheoretischen Ausbau die Komposition der Gruppen, die Galoissche Gruppe einer Gleichung, die Transitivität und Primitivität u. s. w. betreffend in einander. Ehe die Anwendung der Gruppentheorie zur Gewinnung der fundamentalen Theoreme über algebraische Auflösung der Gleichungen, über auflösbare Gleichungen von Primzahlgrad u. s. w. behandelt werden, sind in einer besonderen Vorlesung die Begriffe des Rationalitätsbereiches, des Gattungsbereiches, der Adjunktion von natürlichen, bez. accessorischen Irrationalitäten u. s. w. zu entwickeln. Mit den alsdann folgenden Sätzen über algebraische Auflösung der Gleichungen erreicht die Darstellung ihren Höhepunkt. Als Anwendungen werden einmal die beim Problem der Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung auftretenden Gleichungen behandelt, andererseits sind die beiden letzten Vorlesungen den algebraisch auflösbaren Gleichungen fünften Grades und der allgemeinen Gleichung dieses Grades gewidmet.

Bei der erschöpfenden Art, mit welcher der Herr Verfasser seine Gegenstände zu behandeln pflegt, war es ihm unmöglich, ohne weit mehr Raum zu brauchen, alle mit dem letzten Abschnitt in Berührung stehenden neueren Untersuchungen anderer Algebraforscher zur Darstellung zu bringen. Indessen besteht nach einer Andeutung des Verfassers die Hoffnung, dafs er in dieser Hinsicht bei anderer Gelegenheit noch eine Ergänzung nachfolgen lassen wird.

Braunschweig. Fricke.

Le Perspecteur. Appareil inventé par **Ch. v. Ziegler.** Genève. Librairie R. Burkhardt. 1899. 14 S.

Es giebt manche Apparate, mit denen aus Grund- und Aufrifs ein perspektivisches Bild gezeichnet werden kann. Zu den einfachsten gehört wohl der „Perspecteur", und deshalb machen wir hier auf denselben aufmerksam. Derselbe gleicht einem Zirkel, durch dessen Kopf C aufser den 2 Armen noch eine feste Stange geht. Die Arme können bei der gleichzeitigen Bewegung stets so eingestellt werden, dafs ihr Winkel durch die feste Stange halbiert wird. Ist dann C das Projektionszentrum (Auge), und durchläuft die Spitze des einen Armes (le directeur) eine Figur (Grundrifs, Façade etc.), so zeichnet der andere Arm (le traceur) auf jede beliebige Ebene das perspektivische Bild. Zum praktischen Gebrauche sind mit dem Apparate noch 3 Ebenen in Verbindung gebracht, welche leicht als Grundrifsebene, Aufrifsebene und perspektivische Bildebene eingestellt werden können.

Besonders bequem gestaltet sich die Anwendung des Apparates, wenn aus den Höhenkurven einer Karte das Panorama in Vogelperspektive gezeichnet werden soll. Diese Aufgabe führte den Erfinder zur Konstruktion des Apparates. Er läfst sich aber auch zur Herstellung von architektonischen Perspektivbildern benutzen.

Zürich. Christian Beyel.

F. Hochheim. Über eine Art der Erzeugung der Kurven dritter Klasse mit einer Doppeltangente. Leipzig 1899, B. G. Teubner. 50 S.

Es ist eine durchaus fleifsige Arbeit. Doch dürfte den Verf., der eine Fortsetzung seiner Untersuchungen in Aussicht stellt, eine genauere Kenntnis der Litteratur, z. B. der Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Kurven und Flächen als deren Erzeugnisse von Emil Weyr, Leipzig, B. G. Teubner 1869, belehren, dafs die von ihm behandelte Aufgabe bereits gelöst ist. Insbesondere sind die von ihm „rekurrierend" genannten Punktreihen als einzweideutige Gebilde längst bekannt.

Berlin. E. Jahnke.

Felix Müller. Mathematisches Vokabularium. Französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Erste Hälfte: Französisch-deutscher Teil. Leipzig 1900, B. G. Teubner. Paris 1900, Gauthier-Villars. IX, 132 S.

Wem, und wäre er der französischen Sprache noch so mächtig, wäre es noch nicht vorgekommen, dafs er beim Lesen einer französischen Abhandlung über ein Wort strauchelte, von welchem er nicht gleich wufste, welchem in Deutschland üblichen Ausdrucke es entspreche? Nimmt er aber das beste, das vollständigste Wörterbuch zur Hand, so bleibt er ratlos wie vorher; denn es enthält das betreffende Wort entweder überhaupt nicht, oder doch nicht in dem fachmännischen Sinne, dessen er bedarf. Genau ebenso geht es unseren westlichen Nachbaren beim Lesen einer deutschen Abhandlung über reine oder angewandte Mathematik. Die Klage ist alt, eine Abhilfe schien schwer. Herr Müller hat gezeigt, dafs sie möglich ist. Wir haben heute die erste Hälfte des mühsam vollendeten Buches, den französisch-deutschen Teil, vor uns, dem der deutsch-französche nachfolgen soll. Ein derartiges Buch liest man nicht, kann man nicht lesen. Man kann nur Stichproben anstellen, und das haben wir gethan. Wir haben die ausgefallensten, die landläufigsten Wörter aufgeschlagen. Jene fanden wir nicht unerwähnt, an diesen war der Verfasser nicht achtlos vorübergegangen, ein Versehen, welches nur zu leicht vorkommt. Wir fanden überall, wo wir nachsuchten, die richtigen Übersetzungen, aber mitunter auch noch mehr, nämlich die sehr erwünschte kurze Angabe, wann und von wem das Wort gebildet oder in fachwissenschaftlichen Gebrauch genommen worden ist. Wir können das Buch mit gutem Gewissen aufs dringendste empfehlen. Es gehört unbedingt in die Bibliothek einer jeden Mittelschule; aber auch der einzelne Mathematiker wird, sofern er in bleibender Verbindung mit seiner Wissenschaft zu stehen wünscht, kaum umhin können, den „Felix Müller", wie das Vokabularium bald kurzweg heifsen dürfte, anzuschaffen.

Heidelberg. M. Cantor.

O. Dziobek. Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene. Berlin, Hans Th. Hoffmann, 1900. 350 S. 8°. 85 Fig.

Referent ist häufig von Studierenden der technischen Hochschule gebeten worden, ihnen ein für sie geeignetes Lehrbuch der analytischen Geo-

metrie zu nennen, und ist dabei immer in eine gewisse Verlegenheit gekommen; gerade deshalb begrüfst er mit besonderer Freude das vorliegende Werk, dessen Verfasser, ein langjähriger, bewährter und beliebter Dozent der Charlottenburger Hochschule, es verstanden hat, in seinem Buche den frischen lebendigen Stil des mündlichen Vortrages festzuhalten; die Probleme werden nicht blofs gelöst, sondern es werden auch genau die Schwierigkeiten hervorgehoben, die Klippen, an denen der Anfänger scheitern kann. Die Elemente sind musterhaft klar und breit dargestellt, nirgends aber wird dem Leser das eigene Nachdenken gespart; auch bei den einfachsten Dingen werden die Beziehungen zu tiefer liegenden Fragen aufgedeckt und angeregt. Jedem Paragraphen sind einige Übungsaufgaben angehängt; ihre Lösung erfordert nicht blofs genaues Verständnis, sondern meist auch längere, algebraische oder numerische Rechnungen; im Anhang sind die Lösungen in knapper Form mitgeteilt. Einige Angaben über den Umfang des Stoffes mögen das Gesagte ergänzen und bestätigen.

Im ersten Abschnitt (§ 1—5) finden wir zunächst die Geometrie der geraden Linie und des Strahlenbüschels; die ganz ausführliche Behandlung des Doppelverhältnisses und der linearen Substitutionen wird alsdann für perspektive, projektive und involutorische Beziehungen verwertet. Dann erst kommen die Koordinatensysteme, die Transformationsformeln und die Grundaufgaben der analytischen Geometrie zur Erledigung. Der zweite Abschnitt (§ 6—11) erläutert die Beziehungen zwischen Kurve und Gleichung ausführlich an gut gewählten Beispielen, die historisch oder technisch interessant sind; es folgt die Parameter-Darstellung, die Einteilung der Kurven. An die verschiedenen Formen der Gleichung der geraden Linie knüpft sich die Einführung der Linienkoordinaten; die Methode der abgekürzten Bezeichnung wird u. a. auf die Konfiguration von perspektiven Dreiecken angewendet. Der dritte Abschnitt (§ 12—18) behandelt Kreis und Kreisbüschel, die wichtigsten speziellen Eigenschaften und Erzeugungsarten der Kegelschnitte, die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, ihre Ausnahmefälle und einige numerische Beispiele. Der vierte Abschnitt endlich (§ 19—26) giebt eine Reihe von Ergänzungen; er beginnt mit dem Transversalen-Satz und den Sätzen von Pascal und Brianchon; nach einer Darstellung der Determinantenlehre folgt die Einführung homogener Koordinaten, die Theorie von Pol und Polare und zwar auf quadratische und bilineare Formen gestützt, die projektiven Erzeugungen der Kegelschnitte, Kegelschnittbüschel und Schar, Abbildungen und geometrische Verwandtschaften.

Berlin. RICHARD MÜLLER.

F. Klein. Über die Neueinrichtung für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen. Mit einer Antwort auf die von Prof. Slaby in der Sitzung des preufsischen Herrenhauses vom 30. März 1900 gehaltene Rede. Leipzig 1900, B. G. Teubner. 23 S.

Universität und technische Hochschule waren einst, insbesondere in Deutschland, Bildungsstätten durchaus verschiedener Natur. Die Vorbildung ihrer Zöglinge war eine verschiedene, und verschieden war, wie der Zweck, auch der Inhalt des dort Gelehrten. Die technische Hochschule war es,

wenn wir nicht sehr irren, welche den Gegensatz zuerst einigermafsen aus dem Wege räumte, indem sie die wenigstens teilweise Ausbildung von Mittelschullehrern auf ihr Programm setzte und, um dieser Aufgabe gerecht zu werden, Vorlesungen halten liefs, an denen kaum je andere Zuhörer als solche, die sich dem Lehrfache widmen wollten, teilnahmen. Wir erinnern uns nicht, dafs die Universitäten versucht hätten, dem entgegenzutreten. Nun hat die Universität Göttingen ihrerseits einen entsprechenden Schritt gewagt. Sie hat Einrichtungen getroffen, und zwar unter Aufwendung reicher Privatmittel getroffen, welche es ihren Studierenden ermöglicht, Elektrotechnik und allgemeine technische Physik theoretisch und praktisch zu erlernen, ohne die Universität zu verlassen. Alsbald wurde wenigstens von Seiten einzelner Lehrer an technischen Hochschulen lebhafter Widerspruch erhoben. Herr Felix Klein hat in der uns vorliegenden Broschüre die Antwort auf diesen Widerspruch erteilt, wie es sein Recht, wir möchten fast sagen seine Pflicht war; denn nur durch seinen in alle in Betracht kommenden Schichten tief eingreifenden Einflufs ist der Göttinger Versuch möglich geworden. Was aus diesem Versuche schliefslich wird, das ist eine ganz andere Frage, und wir wagen es nicht, den Schleier der Zukunft lüften zu wollen. Wird es möglich sein, für längere Dauer Privatmittel wie seither flüssig zu machen? Wird der Staat mit Rücksicht auf erzielte Erfolge vor den Rifs treten? Wird er es können, wenn etwa in dem kleinen Grofsherzogtum Baden die beiden vorhandenen Universitäten auf ähnliche Erweiterung ihrer Anstalten, ihrer Lehrkräfte Anspruch erheben, während zugleich die technische Hochschule in Karlsruhe mit Recht verlangt, in den ihr nötigen Zuwendungen nicht verkürzt zu werden? Wird einzig Göttingen ausersehen bleiben, die glücklich zur Geltung gebrachte Doppelrolle weiter zu spielen? Das sind Einzelfragen, in welche die oben gestellte Frage, deren Beantwortung wir verweigerten, zerfällt, und welche sich leicht vermehren liefsen.

Heidelberg. M. Cantor.

P. Sauerbeck. Lehrbuch der Stereometrie nebst zahlreichen Übungen und einem Abschnitt über Krystallographie. Stuttgart 1900. A. Bergsträfser. 291 S. M. 6.

Die Stereometrie gehört zu den schwierigeren Unterrichtsgegenständen am Gymnasium. Die vorliegende Arbeit ist ein ausgezeichneter Wegweiser, um die mannigfachen Schwierigkeiten zu überwinden. Sie tritt den bekannten Lehrbüchern von Hauck, Martus und Schwering ebenbürtig an die Seite.

Der Verf. geht von dem Gesichtspunkt aus, „das vielfach in neuester Zeit zu Gunsten der algebraischen Rechnung zurückgedrängte geometrische Moment wieder mehr zur Geltung zu bringen; denn die Hauptaufgabe der Stereometrie ist und bleibt die Pflege räumlicher Anschauung".

Das Lehrbuch umfasst 7 Abschnitte. In den drei ersten (S. 1—59) werden die allgemeinen und besonderen Lagenverhältnisse von Punkt, Gerade und Ebene besprochen. Hier wird u. a. das Dualitätsprinzip (der Verf. spricht vom „Gesetz" der Dualität; dieser Ausdruck ist wohl nicht ganz korrekt, da sich das Dualitätsprinzip doch nicht beweisen läfst) erörtert und auf zahlreiche Beispiele angewendet, ferner der Desarguessche Satz herange-

zogen, der überhaupt für eine Einführung in die Raumanschauung besonders geeignet ist, und im Anschlufs an Monges Géométrie descriptive wird eine Einleitung in die Methoden der darstellenden Geometrie gegeben. Wie in allen Teilen der Arbeit, so findet sich auch hier eine Fülle von Beispielen und Aufgaben.

Der vierte Abschnitt (S. 59—84) handelt von den natürlich vorkommenden Vielflächnern, den Krystallen. Gegenstand des fünften Abschnitts sind die Beziehungen der Kugel zu ihrem Zentralstrahlenbündel, wobei u. a. das Dreikant und die Geometrie auf der Kugel untersucht werden. Der sechste Abschnitt beschäftigt sich mit den Umdrehungsflächen. Hier werden u. a. die Schnitte des Kreiscylinders und Kreiskegels eingehend betrachtet und ferner die bekanntesten Abbildungen der Kugel dargelegt. Der letzte Abschnitt enthält Berechnungen von Oberflächen und Rauminhalten von Körpern, insbesondere auch Aufgaben über Maxima und Minima. Hervorzuheben sind hier das delische Problem, wo die von Archytas und Menächmus herrührenden Lösungen eines besonderen Falles und die allgemeine Lösung mittels der Wende- und Neilschen Parabel eingehend besprochen werden, ferner das Cavalierische Prinzip (der Verf. spricht vom „Satz“ des Cavalieri, obwohl sich derselbe bekanntlich nicht beweisen läfst) und die Simpsonschen Körper, welche die Eigenschaft haben, dafs sich der Inhalt einer zur Grundfläche parallelen Schnittfläche durch eine ganze rationale Funktion von höchstens drittem Grade des Abstandes darstellen läfst.

Berlin. E. Jahnke.

M. Brückner. Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Leipzig 1900. B. G. Teubner. 227 S.

Seitdem durch Chr. Wiener in seiner klassischen Schrift „Über Vielecke und Vielflache“ die Theorie der regelmäfsigen Polygone und Polyeder höherer Art zum Abschlufs gebracht worden ist, hat die Lehre von den durch Gerade und Ebenen begrenzten Gebilden bedeutende Fortschritte aufzuweisen. Einerseits handelt es sich dabei um das noch heute ungelöste Problem, sämtliche von einer bestimmten Anzahl Flächen begrenzten Vielflache zu bestimmen, ein Problem, das Herr V. Eberhardt zu einem vorläufigen Abschlufs gebracht hat.

Andererseits haben die Untersuchungen besondere Vielecke und Vielflache zum Gegenstand, die als gleicheckige, gleichkantige, gleichflächige u. s. w. bezeichnet werden.

Auf Grund der Originalarbeiten stellt der Verf. die Theorie der Vielecke und Vielflache und die Hauptzüge ihrer geschichtlichen Entwickelung im Zusammenhang dar, wobei er Wert darauf legt, mit möglichster Anschaulichkeit in die wichtigsten Probleme einzuführen und Lücken erkennen zu lassen, die ihrer Ausführung noch harren.

Der Stoff ist in sechs Abschnitte gegliedert: A. Allgemeine Theorie der Vielecke. B. Besondere Vielecke. C. Allgemeine Theorie der Vielflache. D. Theorie der Eulerschen Vielflache. E. Die besonderen Eulerschen Vielflache. F. Die besonderen Vielflache höherer Art.

Jeder dieser Abschnitte enthält längere historische Bemerkungen von hohem Interesse. Aufserdem sind neben den zahlreichen Figuren im Text

7 lithographierte und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln beigegeben, um eine möglichst ausgedehnte Veranschaulichung zu erstreben. Diese Reproduktionen sind nach Modellen ausgeführt, welche der Verf. hergestellt hat.

Das hochinteressante Werk verdient weiteste Verbreitung und sollte in der Bibliothek keiner höheren Lehranstalt fehlen.

Berlin. E. JAHNKE.

F. Enriques. Questioni riguardanti la geometria elementare trattate da U. Amaldi, E. Baroni, L. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vitali, raccolte e coordinate da F. Enriques. Bologna 1900, N. Zanichelli. 532 S.

Es ist eine Sammlung von Artikeln, in denen die Grundlagen und Fundamentalprobleme der elementaren Geometrie besprochen werden.

Der erste Artikel, dessen Verfasser der Herausgeber ist, handelt von der wissenschaftlichen und didaktischen Bedeutung der Fragen, die auf die Prinzipien der Geometrie Bezug haben. Im besonderen bilden den Gegenstand von Artikel 2—6: die verschiedenen Definitionen der Geraden und der Ebene, die Verwendung der Kongruenz und der Bewegung sowie der Stetigkeit in der elementaren Geometrie, die Theorie der Äquivalenz und der Parallelentheorie sowie die nichteuklidische Geometrie.

Die übrigen Artikel 7—14 beschäftigen sich mit bestimmten Problemen der Elementargeometrie, nämlich mit den verschiedenen Methoden, die bei der Lösung geometrischer Aufgaben zur Anwendung kommen, mit der Lösung geometrischer Aufgaben sei es allein mit Hülfe des Zirkels, sei es mit Hülfe von Zirkel und Lineal, mit der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen mittelst Quadratwurzeln, mit der Konstruktion des regulären Zehnecks, mit der Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung und endlich mit der Quadratur des Kreises.

Ref. möchte diese Gelegenheit benutzen, um auf ein interessantes Gebiet der elementaren Geometrie hinzuweisen, das noch wenig verbreitet sein dürfte, das aber, vielleicht mehr als mancher der obigen Artikel, verdiente durch Aufnahme in eine solche Sammlung weiteren Kreisen bekannt zu werden, ich meine die von E. Lemoine begründete „Géométrographie“.

Berlin. E. JAHNKE.

Lagrange (1772) und **Cauchy** (1819). **Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung,** herausgegeben von Gerh. Kowalewski. Leipzig 1900, Engelmann. 54 S. (Ostwald's Klassiker Nr. 113.)

Zahlreiche Schriftsteller haben sich in zahlreichen Abhandlungen mit den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigt, bevor die Aufgabe als gelöst betrachtet werden durfte. Durch Herrn Kowalewski sind zwei dieser Arbeiten in deutscher Übersetzung herausgegeben, eine von Lagrange und eine von Cauchy. Jene leistete die Zurückführung auf lineare partielle Differentialgleichungen, wenn auch zunächst ohne diese letzteren zu integrieren. Diese ging von dem Falle zweier unabhängigen Veränderlichen aus und suchte bei der in diesem Falle leichten geometri-

schen Deutung eine durch eine gegebene Kurve hindurchgehende Integralfläche zu gewinnen. Herr Kowalewski zeigt in seinen Zusätzen, wie die Methode Lagranges von Monge, die Cauchys von Lie zur Klarheit und Anschaulichkeit gebracht wurde.

Heidelberg. M. CANTOR.

H. Poincaré. Cinématique et mécanismes, potentiel et mécanique des fluides. Cours professé à la Sorbonne. Rédigé par A. Guillet. Paris 1900. Carré et Naud. 385 S.

Das Werk ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der berühmte Verfasser an der Sorbonne gehalten hat. Es besteht aus zwei Teilen, deren erster von der Kinematik handelt und die Theorie der wichtigsten Mechanismen bringt, während der zweite das Potential und die Hydrodynamik zum Gegenstande hat.

Der erste Teil ist der ungleich interessantere, er enthält eine durchaus eigenartige Darstellung der Kinematik. Die geometrischen Methoden treten im allgemeinen hinter den analytischen zurück; und um beiden Richtungen gerecht zu werden, kommt vielfach die Vektorentheorie zur Anwendung. Diese verleiht gerade dem einleitenden Kapitel eine bemerkenswerte Klarheit und Eleganz.

Unter den Übergangsmechanismen werden mit besonderer Ausführlichkeit die Zahnräder behandelt und im Anschlufs das schraubenförmige Getriebe von Hooke und White, das konische Getriebe und das cardanische Gelenk, welche sämtlich die Kreisbewegung wieder in eine Kreisbewegung umsetzen, sodann die Pleuelstange, der Excenter und der Stephensonsche Schieber, welche ihrerseits die Kreisbewegung in eine hin- und hergehende geradlinige umwandeln, und endlich das Wattsche Parallelogramm, welches eine hin- und hergehende Kreisbewegung in eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung umsetzt.

Im ersten Kapitel des zweiten Teiles wird der Begriff des Kraftflusses eingeführt und in seiner Bedeutung dargelegt; das zweite Kapitel bringt das Greensche Theorem nebst Anwendungen, das dritte enthält die Anziehung des Ellipsoids. Der Verf. bedient sich hier der elliptischen Koordinaten, führt die korrespondierenden Punkte ein und gelangt zunächst zur Anziehung einer unendlich dünnen Ellipsoid-Schale auf einen Punkt. Um die Anziehung eines Ellipsoids auf einen äufseren Punkt zu finden, leitet der Verf. das Ivorysche Theorem ab.

Das vierte und fünfte Kapitel behandeln die Hydrostatik und Hydrodynamik, insbesondere die Gleichgewichtsbedingungen schwimmender Körper und die Helmholtzschen Wirbel.

Berlin. E. JAHNKE.

Bemerkung. — Die in Bd. I dieser Zeitschrift S. 365 gedruckte Besprechung der „Elemente der Stereometrie" von G. Holzmüller ist ohne Vorwissen des Referenten veröffentlicht. Nachdem Herr G. Holzmüller sein genanntes Werk aus der Sammlung Schubert herausgenommen und selbständig publiziert hatte, wurde die erwähnte Besprechung seitens des Referenten zurückgezogen. Der Abdruck geschah nur infolge eines durch den Redaktionswechsel der Zeitschrift begründeten Versehens.

Braunschweig. FRICKE.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

26. Lorsqu'une courbe A est susceptible d'être décrite par points déterminés avec la règle et le compas et qu'on veut placer *un* point de A, on peut le faire d'un nombre infini de manières suivant les donées que l'on choisit pour déterminer la courbe et suivant les téorèmes que l'on aplique pour en déduire la position du point.

Le coéficient de simplicité du simbole géométrografique du tracé le plus simple que l'on trouve pour un point de A en partant de *certaines donées* qui déterminent la courbe, sera dit *la simplicité ponctuèle de A corespondant à ces donées.*

Le groupe de donées qui conduira pour placer un point de A à la simplicité ponctuèle la plus petite, sera dit *le groupe géométrografique ponctuel de A* et le coéficient de simplicité de ce tracé le plus simple, sera dit: *la simplicité ponctuèle absolue de A.*

Pour fixer les idées suposons qu'il s'agisse d'étudier à ce point de vue le *placé* d'un point de la courbe A qui serait une élipse. A peut être définie en grandeur et en direction 1^0 par l'axe focal et les foyers; 2^0 par 5 points; 3^0 par un axe et un point; 4^0 par un foyer et 3 points etc. etc. Il s'agit d'étudier *la simplicité ponctuèle de l'élipse corespondant à chaque cas de donées*, de trouver *le groupe géométrografique ponctuel de l'élipse* et *la simplicité ponctuèle absolue de cète courbe.* On cherchera, dans tous ces cas, la simplicité de la détermination de n points.

Le champ d'étude est téoriquement illimité, même pour une seule courbe; mais il est clair que l'intérêt se concentre sur les cas les plus usuels de donées et sur les courbes les plus conues. De nombreuses questions peuvent se gréfer sur cèle-ci; par exemple: *un* point de l'élipse est évidemment plus simple à placer si les donées sont l'axe focal et les foyers que si les donées sont 5 points; alors quel nombre n de points faut-il avoir à placer pour qu'il soit plus simple en partant des cinq points donés, de déterminer les axes et les foyers et d'apliquer ensuite la construction ponctuèle qui se raporte au cas où l'axe et les foyers sont les donées, que d'apliquer au tracé de chacun des n points donés la construction ponctuèle qui corespond au cas où les donées sont 5 points? etc.

On étudiera les courbes principales, ovales de Descartes, limaçons de Pascal, cissoïdes droite et oblique, strofoïdes etc. etc.

En construisant une courbe A, non plus par ses points, mais par ses tangentes, il y a l'étude analogue à faire, en prenant les mêmes définitions que précédemment, mais en y changeant, chaque fois qu'ils s'y trouvent, les mots de simplicité *ponctuèle* en ceus de simplicité *tangentièle*.

Paris, 22 mai 1901. E. LEMOINE.

27. Il y a des problèmes célèbres dont quelques-uns sont étudiés depuis des siècles par les géomètres et ont reçu de très nombreuses solutions; je citerai par exemple: Mener, par un point A de la bissectrice d'un angle doné, une droite sur laquèle les cotés de l'angle interceptent une longueur donée; le problème dit de la *Section de raison*; le problème de Malfatti; le problème d'Apollonius de construire les 8 cercles tangents à trois cercles donés; la détermination du point k tel que la some des carés de ses distances à n droites donées soit minima etc. Il serait très intéressant de consacrer à chacun de ces problèmes une monografie où les solutions diférentes seraient exposées, où serait établi leur simbole géométrografique, décidant, par conséquent, quèle est cèle des solutions qui conduit à la solution géométrografique du problème.

Paris, 22 mai 1901. E. LEMOINE.

28. In der Ebene seien zwei auf einander senkrecht stehende, sich in O schneidende Geraden a und b und ein Punkt P gegeben. Wird über OP als Durchmesser ein Kreis gezeichnet und durch P eine Gerade so gelegt, daſs, wenn A und B ihre Schnittpunkte mit a und b, Q ihren zweiten Schnittpunkt mit dem Kreise bezeichnen, $AP = QB$ wird, so hat die Strecke AB die *Minimumseigenschaft* gegenüber den Strecken, die auf anderen, durch P legbaren Geraden von a und b begrenzt werden. Man beweise den Satz auf kinematischem Wege und suche eine Konstruktion der Minimumstrecke AB auch für den Fall, daſs a *nicht* senkrecht zu b steht.

Königsberg i. Pr. E. MÜLLER.

29. In der Ebene seien 6 keiner Kurve 2. O. angehörende Punkte gegeben. Wird durch je 5 von ihnen die durch sie bestimmte Kurve 2. O. gelegt, so schneiden je 5 dieser Kurven auf allen durch ihren gemeinsamen Punkt gehenden Geraden projektive Punktgruppen aus.

Königsberg i. Pr. E. MÜLLER.

30. Ein beweglicher materieller Punkt, der von einem festen Zentrum nach dem Newtonschen Gesetze angezogen wird, hat beim Beginne der Bewegung den Abstand 1 m von dem festen Punkte und die Geschwindigkeit 5 cm, deren Richtung mit der Verbindungslinie beider Punkte den Winkel 60^0 einschlieſst. Die Umlaufszeit beträgt eine Minute. Die Bewegung zu untersuchen, insbesondere die Lage und die Dimensionen der Bahnkurve zu bestimmen. Welches ist das Resultat, wenn die Anziehung der Entfernung proportional ist? Welches aber, wenn die Anziehung umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung ist und nicht die Umlaufs-

zeit gegeben ist, sondern die Anziehungskonstante denselben Wert hat, wie in der ersten Frage?

Berlin. E. LAMPE.

31. Eine vermeintliche Lösung der Trisektion eines beliebigen Winkels geht folgendermafsen vor. Über einer beliebigen Geraden DD_1 als Durchmesser wird ein Halbkreis gezeichnet; man teile sowohl DD_1 als auch den Halbkreis in drei gleiche Teile. Ist B der Teilpunkt von DD_1 nächst D und A der des Halbkreises nächst D, so beschreibe man durch A und B denjenigen Kreis, dessen Zentrum auf DD_1 liegt. Nun wird *behauptet*, dafs dieser neue Kreis jeden anderen Kreisbogen, der durch D und D_1 geht, in einem solchen Punkte T schneidet, dafs Bogen DT gleich $\frac{1}{3} DTD_1$ ist. Welche Annäherung giebt diese Konstruktion?

Berlin. E. LAMPE.

32. Sind abc und $a'b'c'$ zwei perspektive, einem Kegelschnitte K eingeschriebene Dreiecke und ist m ein beliebiger Punkt von K, dann liegen die drei Punkte (ma', bc), (mb', ca), (mc', ab) mit dem Perspektivitätszentrum s der beiden Dreiecke in einer Geraden μ. Ist m' der zweite Schnittpunkt von ms und K, dann liegen in derselben Geraden μ die drei Punkte $(m'a, b'c')$, $(m'b, c'a')$, $(m'c, a'b')$. Umgekehrt liegen auf einer anderen durch s gehenden Geraden μ' die sechs Punkte $(m'a', bc)$, $(m'b', ca)$, $(m'c', ab)$, $(ma, b'c')$, $(mb, c'a')$, $(mc, a'b')$. — Die Punktepaare (m, m') und die Strahlenpaare (μ, μ') bilden derart zwei projektive involutorische Gebilde. — Dualer Satz.

Prag. ED. JANISCH.

33. 2 Ebenen schneiden sich unter dem Winkel ϑ; in 2 Punkten der Schnittlinie A und B zieht man 2 Gerade: AK in der einen, BL in der anderen Ebene, welche mit der Schnittlinie bez. die Winkel φ und ψ bilden; man soll den kürzesten Abstand dieser windschiefen Geraden durch den Abstand AB und die Winkel ausdrücken, auch die Punkte bestimmen, in welchen die kürzeste Gerade jene windschiefen Geraden trifft. Die Aufgabe soll ohne analytische Geometrie gelöst werden.

Königsberg i. Pr. W. FUHRMANN.

34. Le folium qui a pour équation en coordonnées rectangulaires

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$$

a un périmètre équivalent à celui d'une ellipse de demi-axes de longueur a et $2a$.

Constantinople. E. N. BARISIEN.

35. Soient: M un point d'une ellipse dont le centre est O et l'un des foyers est F; P et P' les projections de M sur les axes de l'ellipse; Q et Q' les projections de M sur la tangente et sur la normale en M.

On prend sur OM des longueurs $OR = \sqrt{OP \cdot OP'}$, $OS = \sqrt{OQ \cdot OQ'}$; et on prend sur FM des longueurs $OT = \sqrt{OP \cdot OP'}$, $OU = \sqrt{OQ \cdot OQ'}$.

Etudier et construire les courbes lieux des quatre points R, S, T, U et calculer leur aire.

Constantinople. E. N. Barisien.

---

36. Eine Linie, welche von dem Pol (G) der Sehne (OO_1) eines Kegelschnitts ausgeht, wird von den Strahlenpaaren, die von den Endpunkten der Sehne zu den Punkten A des Kegelschnitts gehen, involutorisch in den Punkten P und P_1 geschnitten. Ist die besagte Linie parallel einer Asymptote des Kegelschnitts, so liegen die Durchschnittspunkte P und P_1 auf beiden Seiten des Punktes (M), in welchem die Linie GH die Hyperbel schneidet, in gleichen Abständen von M.

Sind die Punkte O und O_1 einer zu konstruierenden Hyperbel und die Tangenten in diesen Punkten (also auch G) gegeben, so kann man einen beliebigen Strahl, der von G aus nach der Sehne OO_1 geht, z. B. GH, als Richtung einer Asymptote annehmen; von der Mitte M der Strecke GH trägt man gleiche Strecken auf GH ab (MP und MP_1), und die Strahlen OP und O_1P_1, sowie auch OP_1 und O_1P schneiden sich dann in Punkten der Hyperbel. Die zweite Asymptote ist parallel der Linie GH_1, wenn $OH = O_1H_1$ ist.

Wenn H in der Mitte von OO_1 liegt, so wird die Kurve eine Parabel, und man erhält eine einfache Konstruktion einer Parabel, von der eine Sehne und die Tangenten in den Endpunkten gegeben sind.

Berlin. H. Bertram.

B. Lösungen.

Auszug aus einem Brief an Herrn A. Kneser.

Zu 12 (Bd. I, S. 368). Die Mittelpunktstransformation der Flächen 2. Ordnung oder ihrer Schnitte mit Ebenen liefert in ihrer Ausdehnung auf n Veränderliche (unabhängig oder durch m lineare Relationen verknüpft) die beiden Lemmata I und III auf S. 222 und 230 meiner Arbeit in Band 91 des Journals für reine und angewandte Mathematik. Dieselben geben, *successive* angewandt, die Reduktion der quadratischen Formen in eine Summe von Quadraten in einfacher und durchsichtiger Form, so lange verschiedene dabei auftretende Hauptunterdeterminanten nicht verschwinden. Für definite Formen ist dies stets der Fall; die *endgiltige* Erledigung der Frage ist jedoch mit einigen Schwierigkeiten verknüpft, besonders im Falle linearer Bedingungsgleichungen.

Nehmen wir z. B. den einfachsten Fall eines Kegelschnittes:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{33}x_3^2 = 0$$

und einer Geraden

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

so wird bei

$$F \equiv A_{11} u_1^2 + 2 A_{12} u_1 u_2 + \cdots + A_{33} u_3^2 > 0$$

das Schnittpunktepaar imaginär werden. Während nun bei unabhängigen Veränderlichen mein Theorem S. 227 l. c. alle hier auftretenden Fragen erledigt, ist dies bei linearen Bedingungen schon im einfachsten Falle $n = 3$ und $m = 1$ nicht ohne weiteres der Fall. Ist $u_3 = 0$, nicht aber u_1 oder u_2, so mufs für imaginäre Schnittpunkte $\frac{\partial F}{\partial a_{33}} \lessgtr 0$ sein; dagegen können $\frac{\partial F}{\partial a_{11}}$ oder $\frac{\partial F}{\partial a_{22}}$ verschwinden.

Der Vollständigkeit halber will ich den Fall der unabhängigen Veränderlichen hier wieder mit erledigen.

A. Es sei

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p)$$

eine definite quadratische Form, welche für alle Werte der x_k nur Zahlenwerte mit gleichem Vorzeichen annehme ($\Sigma \pm (a_{11} a_{22} \cdots a_{pp}) = 0$ nicht ausgeschlossen). Alsdann gilt das Theorem:

Wenn $f(c_1, c_2, \cdots, c_p) = 0$ und die c_i nicht sämtlich verschwinden, so ist gleichzeitig $f'(c_1) = 0$; $f'(c_2) = 0$; $\cdots$; $f'(c_p) = 0$.

Beweis: Sei etwa $f'(c_p) \lessgtr 0$, so setze man in der Identität

$$f(c_1 + y_1, c_2 + y_2, \cdots, c_p + y_p) =$$
$$f(c_1, c_2, \cdots, c_p) + f'(c_1) y_1 + f'(c_2) y_2 + \cdots + f'(c_p) y_p + f(y_1, y_2, \cdots, y_p)$$

die Variabeln $y_1, y_2, \cdots, y_{p-1}$ sämtlich gleich 0, alsdann wird die rechte Seite der letzten Gleichung sich reduzieren auf

$$f'(c_p) y_p + a_{pp} y_p^2 = y_p (f'(c_p) + a_{pp} y_p),$$

also bei genügend kleinem $| y_p |$ ihr Vorzeichen wechseln können; gegen die Voraussetzung. Hieraus folgt sofort der weitere Satz:

Wenn für eine definite Form $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ die Determinante $\Sigma \pm (a_{11} a_{22} \cdots a_{pp})$ nicht verschwindet, so ist auch keine der Determinanten a_{11}, $\Sigma \pm (a_{11} a_{22})$, $\cdots$, $\Sigma (\pm a_{11} a_{22} \cdots a_{p-1, p-1})$ gleich 0.

Beweis: Sei etwa $\Sigma \pm (a_{11} a_{22} a_{33}) = 0$, so giebt es Werte c_1, c_2, c_3, die nicht alle verschwinden und die Gleichungen

$$a_{k1} c_1 + a_{k2} c_2 + a_{k3} c_3 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

befriedigen. Multipliziert man diese Gleichungen mit c_k und summiert über k von 1 bis 3, so folgt $f(c_1, c_2, c_3, 0, 0, \cdots) = 0$, also nach dem obigen Theoreme $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ nicht definit. Der Beweis zeigt, dafs auch keine der Determinanten $a_{\alpha\alpha}$, $\Sigma \pm (a_{\alpha\alpha}, a_{\beta\beta})$, $\Sigma \pm (a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} a_{\gamma\gamma})$ $\cdots$ ($\alpha\beta\gamma \cdots$ irgend eine Permutation der Zahlen 1 bis p) verschwinden kann.

B. Bestehen zwischen den n Veränderlichen $x_1, \cdots, x_n$ einer quadratischen Form $\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ die ν Relationen $v_x = 0$, $w_x = 0$,

$\cdots, t_x = 0, v_x \equiv v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n, \cdots$, so beweist man zunächst genau wie vorhin den Satz: Wenn

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & v_1 & w_1 & \cdots & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & v_2 & w_2 & \cdots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & v_n & w_n & \cdots & t_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ist,}$$

und wenn $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ für alle Werte der x_i, welche die Relationen $v_x = 0$, $w_x = 0$, $t_x = 0, \cdots$ befriedigen, nur Zahlenwerte mit demselben Vorzeichen annehmen soll, so ist $(\Sigma(\pm v_1 w_2 \cdots t_\nu) \neq 0$ vorausgesetzt) auch keine der Determinanten A_{n-1}, A_{n-2}, $A_\nu = (-1)^\nu (\Sigma \pm v_1 w_2 \cdots t_\nu)^2$ gleich Null.

Sei etwa $A_m = 0$ $(m = n-1, n-2, \ldots, \nu)$, so giebt es Werte $c_1, c_2, \cdots, c_m; c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$, welche nicht alle verschwinden und die Gleichungen befriedigen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a_{11} c_1 + \cdots + a_{1m} c_m + v_1 c_{n+1} + \cdots + t_1 c_{n+\nu} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} c_1 + \cdots + a_{mm} c_m + v_m c_{n+1} + \cdots + t_m c_{n+\nu} = 0, \\ v_1 c_1 + \cdots + v_m c_m = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t_1 c_1 + \cdots + t_m c_m = 0. \end{cases}$$

Darin können $c_1, \cdots, c_m$ nicht alle verschwinden, da alsdann mit Rücksicht auf die ν ersten Gleichungen und die Ungleichheit $\Sigma \pm (v_1 w_2 \cdots t_\nu) \lessgtr 0$ auch $c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$ sämtlich verschwinden müfsten. Multipliziert man das System (I) mit $c_1, c_2, \cdots, c_m$, so folgt

$$\text{(II)} \qquad \varphi(c_1, \cdots, c_m; 0, 0, \cdots) = 0;$$

$$\left(\sum_1^m v_i c_i = 0; \sum_1^m t_i c_i = 0, \text{ wobei die } c_1, \cdots, c_m \text{ nicht alle 0 sind}\right).$$

Diese Gleichungen (II) sind jedoch mit Rücksicht auf $A_n \neq 0$ nicht möglich, da folgender Fundamentalsatz gilt:

Wenn $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ für alle Werte der x_i, welche die Relationen $v_x = 0, \cdots, t_x = 0$ $(\Sigma \pm (v_1 w_2 \cdots t_\nu) \neq 0)$ befriedigen, nur Zahlenwerte mit demselben Vorzeichen annehmen soll, und wenn Werte $c_1, \cdots, c_n$ (mindestens ein Wert von 0 verschieden) die Relationen

$$\varphi(c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0; \quad v_c = 0, \cdots, t_c = 0$$

befriedigen, so lassen sich stets endliche Werte $c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$ finden, so dafs die Gleichungen (I) für $m = n$ stattfinden.

Beweis: Setzt man

$$x_k = c_k + y_k,$$

so wird $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ oder für *beliebige* $c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$ die Function

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) + 2c_{n+1}v_x + \cdots + 2c_{n+\nu}t_x\,(v_x = 0, \cdots, t_x = 0)$$

stets dasselbe Vorzeichen haben, wenn der Ausdruck

$$\text{(III)}\quad \varphi'(c_1)y_1 + \cdots + \varphi'(c_n)y_n + 2c_{n+1}v_y + \cdots + 2c_{n+\nu}t_y + \varphi(y_1, \cdots, y_n)$$
$$(v_y = 0, \cdots, t_y = 0)$$

dasselbe Vorzeichen beibehält.

Da $\Sigma \pm (v_1 w_2 \cdots t_\nu) \neq 0$, so kann man die Werte $y_1, \cdots, y_\nu$ eindeutig durch $y_{\nu+1}, \cdots, y_n$ ausgedrückt denken, so daſs $\varphi(y_1, \cdots, y_n)$ in Wirklichkeit nur von den *unbeschränkten* Veränderlichen $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \cdots, y_n$ abhängt. Überdies lassen sich die völlig willkürlichen $c_{n+1}, \cdots, c_{n+\nu}$ so bestimmen, daſs die Koeffizienten von $y_1, \cdots, y_\nu$ in dem linearen Teile des Ausdruckes (III) sämtlich verschwinden, daſs also die ν ersten Gleichungen des Systems I für $n = m$ bestehen. Auf Grund desselben Räsonnements wie in Nr. A (da nunmehr $y_{\nu+1}, \cdots, y_n$ unabhängig sind) müssen alsdann auch die $n - \nu$ letzten Gleichungen in (III) (für $m = n$) stattfinden; es wäre aber alsdann gegen die Voraussetzung $A_n = 0$.

Der Beweis zeigt, daſs man für die Zahlenreihe

$$A_n, \quad A_{n-1}, \quad A_{n-2}, \cdots, A_\nu$$

auch die Kette

$$A_n, \quad \frac{\partial A_n}{\partial a_{\alpha\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 A_n}{\partial a_{\alpha\alpha}\,\partial a_{\beta\beta}}, \cdots, \frac{\partial^{n-\nu} A_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \cdots \partial a_{\zeta\zeta}}$$

setzen kann, wenn $\alpha, \beta, \cdots, \zeta$ irgend eine Permutation der Zahlen $n, n-1, \cdots, n-\nu$ bedeutet. Natürlich liefert jede andere nicht verschwindende Determinante $\Sigma \pm (u_k v_l \cdots t_q)$ νten Grades gleichfalls eine Kette von Reihen (17 l. c. Letztes Theorem.)

Darmstadt, den 21. August 1901. S. Gundelfinger.

Zu 20 (Bd. I, S. 371). *Erste Lösung.* — M sei ein Punkt des Umkreises des Dreiecks ABC, und es verhalte sich Sehne $MA : MB = m : n$. Von M aus seien auf BC und CA die Lote MD und ME gefällt. Dann ist, weil $AMBC$ ein Sehnenviereck ist, $\sphericalangle EAM = DBM$; mithin sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke EAM und DBM ähnlich, und man hat $MA : ME = MB : MD$ oder

$$MA \cdot MD = MB \cdot ME.$$

Da nun für Punkt M

$$MA = X, \quad MB = Y, \quad MD = x, \quad ME = y,$$

so genügt Punkt M der Bedingung $Xx = Yy$; folglich gehört der dem Dreieck ABC umbeschriebene Kreis zum gesuchten Ort des Punktes M.

Konstruiert man nun den durch M gehenden, der Strecke AB zugehörigen Apollonischen Kreis K, und trifft die Gerade CM den Kreis K zum zweiten Male in M_1, so verhält sich, weil M_1 auf dem Kreise K liegt,

$$M_1A : M_1B = MA : MB = m : n;$$

also für Punkt M_1

$$X : Y = m : n.$$

Sind ferner M_1D_1 und M_1E_1 die von M_1 auf BC und CA gefällten Lote, so verhält sich, weil M_1 auf der Geraden CM liegt,

$$M_1E_1 : M_1D_1 = ME : MD = MA : MB = m : n;$$

also gilt für Punkt M_1 auch

$$x : y = n : m.$$

Punkt M_1 genügt daher ebenfalls der Bedingung $Xx = Yy$. Aufserdem ergiebt sich aus den vorigen Proportionen die Ähnlichkeit der Dreiecke E_1AM_1 und D_1BM_1, also auch die Gleichheit der Winkel E_1AM_1 und D_1BM_1. Die genannten Dreiecke sind aber gegenwendig ähnlich; daher kann man die Geraden AM_1 und BM_1 als entsprechende Strahlen zweier kongruenten und gegenläufigen projektivischen Strahlenbüschel mit den Büschelpunkten A und B betrachten, woraus sich ergiebt, dafs Punkt M_1 auf einer durch A, B, C gehenden gleichseitigen Hyperbel liegt, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt O von AB zusammenfällt, und deren Asymptoten den Halbierungslinien der von den entsprechenden Strahlen AC und BC gebildeten Winkel parallel sind.

Der zweite Schnittpunkt des Kreises K mit dem Umkreis von ABC sei M_2, und CM_2 treffe den Kreis K zum zweiten Male in M_3. Dann bilden die Geraden CB, CA, CM_1, CM_2 einen harmonischen Büschel, und daher genügen auch die Punkte M_2 und M_3 der Bedingung $Xx = Yy$. Sie gehören also dem gesuchten Orte an, und zwar liegt M_3 auf der vorhin bestimmten gleichseitigen Hyperbel.

Der vollständige Ort für M besteht demnach aus dieser Hyperbel und dem dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreise. Zu beachten ist dabei jedoch, dafs für diejenigen Punkte der Hyperbel und des Kreises, die aufserhalb des Winkelraumes BCA und seines Scheitelwinkelraumes liegen, die Bedingung $Xx = Yy$ nur erfüllt ist, wenn man von x und y die absoluten Werte nimmt.

Nimmt man statt des Punktes C den zweiten Endpunkt C' des von C ausgehenden Umkreisdurchmessers, so bleiben in Bezug auf Dreieck ABC' für die Punkte M, M_1, M_2, M_3 die Strecken X und Y unverändert; ebenso bleibt, wie man leicht findet, das Verhältnis der Strecken x und y dasselbe. Daraus folgt, dafs der Ort des Punktes M in Bezug auf Dreieck ABC' derselbe ist wie in Bezug auf Dreieck ABC; ferner ergiebt sich noch, dafs die Punkte C', M, M_3 und C', M_1, M_2 auf je einer Geraden liegen.

Prenzlau. Stegemann.

Zu 20 (Bd. I, S. 371). *Zweite Lösung.* — Soient un triangle $A_1A_2A_3$, x_1, x_2, x_3 les coordonées normales d'un point M, r_1, r_2, r_3 les coordonées tripolaires de ce point, c'est-à-dire les distances A_1M, A_2M, A_3M. — Trouver le lieu des points tels que $x_1r_1 = x_2r_2$.

Beschreibt man über r_1 als Durchmesser den Kreis, so geht derselbe durch die Fufspunkte der Lote x_2 und x_3 auf die Seiten A_1A_2 und A_1A_3. Mithin ist $r_1 \sin A_1 = m_1$, wo m_1 die Verbindungslinie jener Fufspunkte ist, also $r_1^2 \sin^2 A_1 = m_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \cos A_1$. Ebenso folgt $r_2^2 \sin^2 A_2 = m_2^2 = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \cos A_2$. Also ist die Gleichung des gesuchten Ortes $x_1r_1 = x_2r_2$ nach Quadrierung dieser Relation und Einsetzung von r_1^2 und r_2^2:

$$\frac{x_1^2}{\sin^2 A_1}(x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \cos A_1) = \frac{x_2^2}{\sin^2 A_2}(x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \cos A_2)$$

oder geordnet

$$x_1^2x_2^2(\sin^2 A_2 - \sin^2 A_1) + x_1^2x_3^2 \sin^2 A_2$$
$$- x_2^2x_3^2 \sin^2 A_1 + 2x_1^2x_2x_3 \cos A_1 \sin^2 A_2 - 2x_1x_2^2x_3 \sin^2 A_1 \cos A_2 = 0.$$

Die linke Seite zerfällt in zwei Faktoren; die gesuchte Gleichung lautet demnach:

$$(1) \qquad \left(\frac{\sin A_1}{x_1} + \frac{\sin A_2}{x_2} + \frac{\sin A_3}{x_3}\right) \cdot \left(\frac{\sin A_1}{x_1} - \frac{\sin A_2}{x_2} - \frac{\sin(A_2 - A_1)}{x_3}\right) = 0.$$

Der erste Faktor bedeutet, gleich Null gesetzt, den Umkreis des Dreiecks. Den zweiten Faktor bringen wir auf die Form:

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, x_3) \equiv 2x_2x_3 \sin A_1 - 2x_3x_1 \sin A_2 - 2x_1x_2 \sin(A_2 - A_1)$$

und suchen zunächst den Mittelpunkt der Kurve $f = 0$, den wir als den Pol der unendlich fernen Geraden bestimmen.

Bezeichnen wir die Hälften der partiellen nach x_i $(i = 1, 2, 3)$ genommenen Differentialquotienten von f mit $f_i(x_1, x_2, x_3)$, so ist die *Polare* des Punktes $x_1' : x_2' : x_3'$

$$x_1 \cdot f_1(x_1', x_2', x_3') + x_2 \cdot f_2(x_1', x_2', x_3') + x_3 \cdot f_3(x_1', x_2', x_3') = 0.$$

Wird diese Gerade identisch mit der *unendlich fernen Geraden*:

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0,$$

so müssen die Koeffizienten beider Gleichungen proportional sein, d. h.

$$f_i(x_1', x_2', x_3') = \lambda \cdot \sin A_i.$$

Lösen wir diese 3 Gleichungen nach x_i', so ergiebt sich

$$(3) \qquad x_1' : x_2' : x_3' = \sin A_2 : \sin A_1 : 0.$$

Der Mittelpunkt der Kurve (2) fällt in die Mitte der Seite A_1A_2.

Die Asymptoten von (2) beschreiben wir als die vom Mittelpunkt an die Kurve gehenden Tangenten. Nach einer bekannten Formel lautet die

Gleichung des Tangentenpaares, welches von einem Punkte $x_1' : x_2' : x_3'$ an die Kurve zweiter Ordnung $f(x_1, x_2, x_3)$ gelegt ist:

$$f(x_1, x_2, x_3) \cdot f(x_1', x_2', x_3')$$
$$- [x_1 f_1(x_1', x_2', x_3') + x_2 f_2(x_1', x_2', x_3') + x_3 f_3(x_1', x_2', x_3')]^2 = 0.$$

Setzen wir für x_i' die Werte aus (3) ein, so erhalten wir mit Berücksichtigung von (2):

$$x_1^2 \sin^2 A_1 + x_2^2 \sin^2 A_2 + x_3^2 \sin^2 A_3$$
$$- 2 x_2 x_3 \sin A_2 \sin A_3 \, q + 2 x_1 x_3 \sin A_1 \sin A_3 \, q - 2 x_1 x_2 \sin A_1 \sin A_2 = 0,$$

wo

$$q = \frac{\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2}{\sin^2 A_1 - \sin^2 A_2}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt in die beiden Faktoren:

$$(4) \qquad \begin{cases} \left[x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 \dfrac{\sin A_1 + \sin A_2}{\sin A_1 - \sin A_2}\right], \\ \left[x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 \dfrac{\sin A_1 - \sin A_2}{\sin A_1 + \sin A_2}\right]. \end{cases}$$

Wir sehen, dafs die beiden Geraden reell sind, ferner, dafs sie auf einander senkrecht stehen. Es ergiebt sich daraus:

Die Kurve ist eine dem Dreieck umbeschriebene gleichseitige Hyperbel. Dieselbe geht auch durch die Gegenecke von A_3 in dem Parallelogramm, das $A_3 A_1$ und $A_3 A_2$ zu anstofsenden Seiten hat.

Nehmen wir, wie es üblich ist, an, dafs die x_i, welche auf derselben Seite der Geraden $x_i = 0$ liegen wie das Dreieck, positiv sind, sehen wir ferner die r_i stets als positiv an, so erhellt, dafs die Bedingung $x_1 r_1 = x_2 r_2$ nur erfüllt sein kann, falls der Punkt M innerhalb des Winkels $\sphericalangle A_1 A_3 A_2$ oder seines Scheitelwinkels liegt. Punkte dagegen, welche in den übrigen Feldern sich befinden, können nur die Bedingung $x_1 r_1 = - r_2 x_2$ erfüllen. Streng genommen ist also der gesuchte Ort nur ein Teil der erhaltenen Hyperbel und ein Teil des Umkreises.

Anmerkungen. a) Trägt man in den Punkten A_1 und A_2 an $A_1 A_3$ und an $A_2 A_3$ gleiche Winkel an, so schneiden sich die Schenkel dieser Winkel auf dem Umkreise, falls der eine Winkel nach aufsen, der andere nach dem Inneren des Dreiecks angetragen wurde, dagegen auf der untersuchten Hyperbel, falls beide Winkel nach innen oder nach aufsen angetragen werden.

b) Die drei gleichseitigen, durch den Höhenschnitt gehenden Umhyperbeln, welche durch die Bedingungen $r_1 x_1 = r_2 x_2$, $r_2 x_2 = r_3 x_3$, $r_3 x_3 = r_1 x_1$ definiert werden, sind übrigens die bekannten, von Herrn Lemoine als $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ bezeichneten Kegelschnitte. (Vgl. auch E. Jahnke: *„Über dreifach perspektive Dreiecke in der Dreiecksgeometrie“*. Berl. Progr. Ost. 1900. Theorem XXI, S. 25.)

Berlin. K. Cwojdziński.

Einige Eigenschaften des Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt.

Zu 24c (Bd. I, S. 372). Herr W. Fr. Meyer zitiert auf S. 372 des I. Bandes dieser Reihe des Archivs u. a. einen Satz[1]), welcher den von uns auf S. 176 desselben Bandes über den „Lotpunkt" veröffentlichten als Spezialfall umfafst. Indem wir nun in demselben Sinne vorgehen, wie bei der Aufstellung und der ersten Verallgemeinerung[2]) des Lotpunktes, d. h. jetzt nach einem noch allgemeineren Punkte trachten, welcher u. a. auch den von Herrn Meyer mitgeteilten umfafst, so gelangen wir zu einer Reihe von Sätzen, welche denen über den Lotpunkt analog sind, und einige interessante Eigenschaften des Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt liefern.

1. Entstehung des Punktes. Seien die Ecken eines Dreiecks $u_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die Fundamentalpunkte eines trimetrischen Systems, eine Gerade G habe die rechtwinkligen Koordinaten $(u_1' : u_2' : u_3')$, und es sei der Kegelschnitt gegeben:

$$(1)\quad K \equiv a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{23}u_2u_3 + 2a_{31}u_3u_1 + 2a_{12}u_1u_2 = 0.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$a_{i1}u_1' + a_{i2}u_2' + a_{i3}u_3' = f_i \qquad (i = 1, 2, 3;\ a_{ik} = a_{ki}),$$

so können wir den Pol von G und diejenigen der Dreiecksseiten so schreiben:

$$P \equiv f_1u_1 + f_2u_2 + f_3u_3 = 0,\quad P_i \equiv a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ a_{ki} = a_{ik}).$$

Die mit G in Bezug auf K konjugierten Geraden, welche durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehen (d. h. die Verbindungsgeraden dieser Ecken mit dem Pol P von G), sind:

$$V_1 \equiv (0 : -f_3 : f_2),\quad V_2 \equiv (f_3 : 0 : -f_1),\quad V_3 \equiv (-f_2 : f_1 : 0).$$

Die Gleichungen der Schnittpunkte dieser Geraden mit G sind ferner:

$$\begin{cases} S_1 \equiv +(u_2'f_2 + u_3'f_3)\cdot u_1 - u_1'f_2\cdot u_2 - u_1'f_3\cdot u_3 = 0,\\ S_2 \equiv -u_2'f_1\cdot u_1 + (u_1'f_1 + u_3'f_3)\cdot u_2 - u_2'f_3\cdot u_3 = 0,\\ S_3 \equiv -u_3'f_1\cdot u_1 - u_3'f_2\cdot u_2 + (u_1'f_1 + u_2'f_2)\cdot u_3 = 0.\end{cases}$$

Die Gleichung $T_i \equiv S_i + \lambda u_i = 0$ stellt zunächst einen Punkt auf der Verbindungsgeraden von $S_i = 0$ mit der Ecke $u_i = 0$ dar. Man findet aber durch Einsetzung der Werte aus den S_1, S_2, S_3 in T_i, dafs die Verbindungsgerade zweier Punkte, etwa T_iT_k, stets die Seite $u_1 = 0$ in dem Schnittpunkte mit G trifft. Wir sehen also:

Die Gleichung

$$T_i \equiv S_i + \lambda u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

stellt die Ecken eines Dreiecks dar, welches zusammen mit dem Fundamentaldreieck den Pol von G (den Punkt P) zum Perspektivitätszentrum und G zur Perspektivitätsachse hat.

1) Der Satz steht in Theorem VI dieser Notiz.
2) (3) 1, 178, Theorem VI.

Die drei durch T_i gezogenen, in Bezug auf K mit den entsprechenden Seiten des Fundamentaldreiecks konjugierten Geraden (d. h. die Verbindungen $T_i P_i$) sind dann

$$\begin{aligned}
&[\quad a_{12}u_1f_3 - a_{13}\,u_1f_2 \quad] : [-a_{11}u_1f_3 - a_{13}(u_2f_2 + u_3f_3 + \lambda)] : \\
&\qquad [\quad a_{11}u_1f_2 + a_{12}(u_2f_2 + u_3f_3 + \lambda)], \\
&[\quad a_{22}u_2f_3 + a_{23}(u_1f_1 + u_3f_3 + \lambda)] : [\quad a_{23}u_2f_1 - a_{12}\,u_2f_3 \quad] : \\
&\qquad [-a_{22}u_2f_1 - a_{12}(u_1f_1 + u_3f_3 + \lambda)], \\
&[-a_{33}u_3f_2 - a_{23}(u_1f_1 + u_2f_2 + \lambda)] : [\quad a_{33}u_3f_1 + a_{13}(u_1f_1 + u_2f_2 + \lambda)] : \\
&\qquad [\quad a_{13}u_3f_2 - a_{23}\,u_3f_1 \quad].
\end{aligned}$$

Da weiterhin eine Verwechselung ausgeschlossen ist, schreiben wir, wie jetzt eben, statt u_i' nur u_i.

Bilden wir aus den Klammerausdrücken eine Determinante und addieren die vertikal unter einander stehenden Glieder, so ergiebt sich zufolge der Bedeutung der f_i stets der Wert Null. Mithin ist auch die so gebildete Determinante Null. Es folgt daraus:

Theorem I. Hat ein Dreieck mit einem gegebenen Dreieck eine gegebene Gerade zur Perspektivitätsachse und den Pol dieser Geraden in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt zum Perspektivitätszentrum, so schneiden sich die drei Verbindungsgeraden der Ecken dieses Dreiecks mit den Polen der entsprechenden Seiten des gegebenen Dreiecks in einem Punkte.

Um spätere Sätze kürzer fassen zu können, wollen wir diesen Punkt „*L-Punkt eines Dreiecks in Bezug auf eine Gerade und einen Kegelschnitt*“ nennen.[1])

Denken wir uns die u_i als senkrechte Punktkoordinaten, so hat die ganze Rechnung den folgenden dualen Sinn:

Theorem II. Hat ein Dreieck mit einem gegebenen Dreieck einen gegebenen Punkt zum Perspektivitätszentrum und die Polare dieses Punktes bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes zur Perspektivitätsachse, so liegen die drei Schnittpunkte der Seiten dieses Dreiecks mit den Polaren der entsprechenden Ecken des gegebenen Dreiecks in einer Geraden. (Die Gerade heifse L-Gerade.)

Da zwei perspektive Dreiecke stets eine Achse haben, so können beide Theoreme so gefafst werden:

Theorem III. Hat ein Dreieck mit einem gegebenen Dreieck eine Gerade zur Perspektivitätsachse und den Pol dieser Geraden bezüglich eines Kegelschnittes zum Perspektivitätszentrum, so ist es zu dem Polardreieck des gegebenen Dreiecks auch perspektiv.

2. Spezialfälle. Wird in Theorem I. $\lambda = 0$ gedacht, oder geometrisch: fällt das veränderliche Dreieck mit der Geraden G zusammen, so dafs seine Ecken dennoch auf den Verbindungsgeraden der Ecken des gegebenen Dreiecks mit dem Pol von G (P) verbleiben, so ergiebt sich das von Herrn Meyer zitierte

---

1) Da λ variabel, so ist auch der L-Punkt unendlich vieldeutig.

Theorem IV. Gegeben in einer Ebene ein Dreieck mit den Ecken A_i und den Seiten a_i, ferner ein Klassenkegelschnitt K und eine Gerade g. Man lege durch A_i die Gerade, die bezüglich K zu g konjugiert ist und durch deren Schnitt mit g wiederum die Gerade, die bezüglich K zu a_i konjugiert ist, dann schneiden sich die drei letzteren in einem Punkte.

Aus Theorem II wird für $\lambda = 0$ das zu IV. duale

Theorem V. Gegeben in der Ebene ist ein Dreieck mit den Seiten a_i und den Ecken A_i, ferner ein (Ordnungs)-Kegelschnitt K und ein Punkt p. Man suche auf a_i den Punkt, der bezüglich K zu p konjugiert ist, und auf der Verbindung des Punktes mit p wiederum den Punkt, der zu A_i konjugiert ist, dann liegen die drei letzteren in einer Geraden.

Für $\frac{1}{\lambda} = 0$ geht das veränderliche Dreieck in das gegebene über. Aus Theorem I wird dann der bekannte Satz: „*Zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt konjugierte Dreiecke sind perspektiv*". Theorem II geht in das duale über.

Denken wir uns den Kegelschnitt als einen Kreis mit dem Mittelpunkt im Endlichen und einem unbegrenzt wachsenden Radius, so gehen die erwähnten Theoreme in „Lotpunkt"-Theoreme über: Theorem I geht über in Theorem VI unserer Notiz in (3) **1**, 175 u. f., Theorem IV in Theorem I. Die dualen Theoreme ergeben keine nützlichen Resultate.

3. Der „L-Punkt-Kegelschnitt". Wenn das gegebene Dreieck, die Gerade und der Kegelschnitt feststehen, λ dagegen verändert wird, so verändert sich auch das perspektive Dreieck, aber so, daſs es G als Perspektivitätsachse und P als P-Zentrum mit dem gegebenen Dreieck beibehält. Wir wollen nun den Ort des L-Punktes untersuchen, falls diese Veränderung vorgenommen wird.

Die Koordinaten der drei den L-Punkt erzeugenden Geraden sind in Nr. I notiert. Multiplizieren wir diese Koordinaten mit x_i und addieren horizontal, so ergeben sich die Gleichungen dieser Geraden in Flächenkoordinaten des Punktes.

Die Elimination von λ aus den zwei ersten dieser Gleichungen ergiebt

$$(2)\quad \frac{(a_{12}u_1f_3-a_{13}u_1f_2)x_1-(a_{11}u_1f_3+a_{13}u_2f_2+a_{13}u_3f_3)x_2+(a_{11}u_1f_2+a_{12}u_2f_2+a_{12}u_3f_3)x_3}{(a_{23}u_1f_1+a_{23}u_3f_3+a_{22}u_2f_3)x_1+(a_{23}u_2f_1-a_{12}u_2f_3)x_2-(a_{22}u_2f_1+a_{12}u_1f_1+a_{12}u_3f_3)x_3}$$
$$=\frac{a_{13}x_2-a_{12}x_3}{a_{12}x_3-a_{23}x_1}.$$

Dies ist der Ort der L-Punkte eines Dreiecks $x_i = 0$ in Bezug auf eine Gerade $\sum_i u_i x_i = 0$ und einen Kegelschnitt $K \equiv \sum_{i,k} a_{ik} u_i \cdot u_k = 0$ in trimetrischen Koordinaten des Punktes x_i, welche mit den senkrechten x_i' durch die Relation

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{x_1'}{h_1} : \frac{x_2'}{h_2} : \frac{x_3'}{h_3}$$

verbunden sind. (Flächenkoordinaten des Punktes.)

Die vorstehende Gleichung wird befriedigt, falls man die Koordinaten des Poles P für x_i, also $x_1 : x_2 : x_3 = f_1 : f_2 : f_3$ setzt; es entsteht nämlich die Identität

$$\frac{(a_{12}f_3-a_{13}f_2)(u_1f_1+u_2f_2+u_3f_3)}{(a_{23}f_1-a_{12}f_3)(u_1f_1+u_2f_2+u_3f_3)}=\frac{a_{13}f_2-a_{12}f_3}{a_{12}f_3-a_{23}f_1}.$$

Dasselbe findet man, falls man die x_i in Gl. (2) durch Koordinaten der Pole P_i $(i = 1, 2, 3)$ ersetzt, z. B. $x_1 : x_2 : x_3 = a_{11} : a_{12} : a_{13}$. Auch in diesen Fällen verschwindet Gl. (2) identisch. Dafs schliefslich auf dem Orte (2) auch das Perspektivitätszentrum des gegebenen Dreiecks und seines Polardreiecks liegt, ergiebt sich aus der Thatsache, dafs dieser Punkt L-Punkt (mit $1/\lambda = 0$) ist. Wir haben somit

Theorem VI. Der Ort der L-Punkte eines Dreiecks in Bezug auf eine Gerade und einen Kegelschnitt ist der Kegelschnitt durch die Pole der Seiten und den Pol der Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt sowie durch das Perspektivitätszentrum des Dreiecks und seines Polardreiecks.[1])

4. Der L-Punkt-Kegelschnitt eines Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt. Ein Vierseit kann auf 4-fache Art so gedacht werden, dafs es in ein Dreieck und eine Gerade zerfällt. Wenn nun ein Kegelschnitt gegeben ist, so gehört zu jedem der 4 Dreiecke in Bezug auf die übrig bleibende Gerade und den Kegelschnitt auch ein L-Punkt-Kegelschnitt. Wir fragen nach der Lage der 4 L-Punkt-Kegelschnitte zu einander.

Fassen wir etwa die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $G = 0$ zu einem Dreieck zusammen, so wird der fragliche L-Punkt-Ort bez. $x_3 = 0$ und den gegebenen Kegelschnitt (zufolge Theorem VI) durch die 4 Pole und das Perspektivitätszentrum des Dreiecks und seines Polardreiecks gehen.

Dieses Perspektivitätszentrum hat aber, wie eine kurze Rechnung zeigt, die Koordinaten

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_{12} u_3 f_1 : a_{12} u_3 f_2 : (a_{11} u_1 f_2 + a_{13} u_3 f_2 - a_{12} u_1 f_1).$$

Setzen wir diese Werte in (2) ein, so erhalten wir die Identität[2])

$$\frac{u_1 f_1 f_2 (a_{11} f_2 - a_{12} f_1)}{u_2 f_1 f_2 (a_{12} f_2 - a_{22} f_1)} = \frac{- u_1 a_{12} (a_{11} f_2 - a_{12} f_1)}{- u_2 a_{12} (a_{12} f_2 - a_{22} f_1)}.$$

Da dieses Perspektivitätszentrum auch auf dem Orte (2) liegt, so ist der neue L-Punkt-Ort identisch mit dem alten (2); denn ein Kegelschnitt ist durch 5 Punkte eindeutig bestimmt. Dasselbe läfst sich auch für die übrigen Dreiecke des Vierseites zeigen. Wir haben also

Theorem VII. Die 4 Dreiecke eines vollständigen Vierseits besitzen nur einen L-Punkt-Kegelschnitt in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt.

Dieser merkwürdige Kegelschnitt ist somit ein *4-facher* Ort von L-Punkten. Als Spezialfall dieses Satzes erscheint dann das folgende Theorem:

Theorem VIII. Die 4 Pole der Seiten eines Vierseits in Bezug auf einen Kegelschnitt, die 4 Perspektivitätszentra der 4 Dreiecke und ihrer Polardreiecke, sowie die 4 von Herrn Meyer aufgestellten Punkte liegen auf einem Kegelschnitt.

Berlin, den 12. August 1901. K. Cwojdziński.

---

1) Natürlich liegt auf diesem Orte auch der von Herrn Meyer aufgestellte Punkt; denn er ist auch L-Punkt und zwar mit $\lambda = 0$.

2) In den Nennern der Gl. (2) ist es praktischer, statt $x_3 = a_{11} u_1 f_2 + a_{13} u_3 f_2 - a_{12} u_1 f_1$ den gleichen Wert in der Form $x_3 = a_{23} u_3 f_1 + a_{22} u_2 f_1 - a_{12} u_2 f_2$ zu setzen.

2. Preisaufgaben.

Mathematische und physikalische Preisfragen der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. Für das Jahr 1901. — *Die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte zu vervollkommnen.*

Die Theorie der quadratischen Differentialformen, welche von Riemann angebahnt und namentlich von Christoffel und Lipschitz weitergeführt worden ist, hat durch neuere Untersuchungen in der Geometrie, der Dynamik und der Theorie der Transformationsgruppen eine erhebliche Bedeutung gewonnen, und jeder Fortschritt in jener Theorie würde auch hier einen Gewinn bedeuten. Indem die Gesellschaft wünscht, dafs die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte vervollständigt werde, lenkt sie die Aufmerksamkeit der Bewerber besonders auf die durch Lies Forschungen angeregte Frage nach der Natur und den Eigenschaften der Formen, welche kontinuierliche Gruppen von Transformationen gestatten. Für den Spezialfall $n = 3$ hat neuerdings Bianchi[1]) wertvolle Beiträge geliefert; es ist zu hoffen, dafs die Darstellung der Kriterien für die Zugehörigkeit einer gegebenen Form zu einem bestimmten Typus in invarianter Form gelingen, und dafs das Studium der in den betreffenden Räumen herrschenden Geometrien sich als lohnend erweisen werde. Preis 1000 Mark.

2. Für das Jahr 1902. — Dafs die von C. Neumann seit 1870 angewandte Methode des arithmetischen Mittels einen sehr hohen Grad von Allgemeinheit besitze, dafür sprechen sowohl die mannigfaltigen Arbeiten Neumanns (Abh. der K. S. Ges. der Wiss. XIII, S. 707), wie auch die tiefgehenden Betrachtungen Poincarés (Acta math. XX, p. 59). Gleichzeitig aber geht aus der Gesamtheit dieser Untersuchungen hervor, dafs noch manche schwierige Punkte der weiteren Aufklärung bedürftig sind. Es erscheint daher wichtig, wenigstens die erforderlichen Vorarbeiten zu unternehmen, um von den eigentlichen Grundzügen dieses Gebietes eine völlig klare Vorstellung zu gewinnen, und namentlich die genannte Poincarésche Abhandlung in ihrer ganzen Tragweite zu verwerten, vielleicht deren Resultate weiter zu verallgemeinern. Vor allem aber entsteht die Aufgabe, den Poincaréschen Darlegungen eine gröfsere Einfachheit und Durchsichtigkeit, und womöglich auch einen höheren Grad von Strenge zu verleihen.

Ohne unter den hier angedeuteten Richtungen eine vor der andern besonders bevorzugen zu wollen, spricht die Gesellschaft den Wunsch aus, *dafs die in der Abhandlung von Poincaré „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet“ 1896, enthaltenen Untersuchungen nach irgend welcher Seite hin wesentlich vervollkommnet werden möchten.* Preis 1000 Mark.

3. Für das Jahr 1903. — Die wichtige Entdeckung der lichtelektrischen Ströme durch Edmond Becquerel ist durch neuere Untersuchungen unserem Verständnis zwar näher gerückt, aber die experimentellen Ergebnisse widersprechen sich zum Teil derart, dafs selbst über die Abhängigkeit der elektromotorischen Kräfte von der Lichtstärke nichts genügend Sicheres feststeht.

1) Memorie della Società Italiana delle Scienze, Ser. III^a T. XI, 1897.

Es ist dabei zu berücksichtigen, dafs die verschiedenen Farben bisweilen entgegengesetzte Wirkungen hervorbringen und dafs bei den von Becquerel benutzten dünnen Schichten zugleich an verschiedenen Stellen elektromotorische Kräfte auftreten können. Die Abhängigkeit dieser elektromotorischen Kräfte von der Farbe und die Bedingungen, unter denen die lichtelektrischen Ströme überhaupt möglich sind, ihr Zusammenhang mit der Photographie und mit den neuerdings von Hertz und Hallwachs gefundenen lichtelektrischen Wirkungen bieten für experimentelle Untersuchungen ein weites Feld.

Die Gesellschaft stellt daher die Aufgabe:

Es sollen eingehende und einwandfreie experimentelle Untersuchungen angestellt werden, die einen wesentlichen Beitrag zur Feststellung der Gesetze der lichtelektrischen Ströme liefern. Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und paginiert, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aufsenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift mufs auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dafs sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den derz. Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1901 Geheimer Hofrat Professor Dr. Justus Hermann Lipsius, Leipzig, Weststrafse 89, Erdgeschofs) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

Prix Bressa.

L'Académie rappelle qu'à partir du 1er Janvier 1899 il est ouvert un Concours, auquel seront admis *les Savants et les Inventeurs de toutes les nations.*

Ce concours aura pour but de récompenser le Savant ou l'Inventeur, à quelque nation qu'il appartienne, lequel, durant la période quadriennale de 1897—1900, „au jugement de l'Académie des Sciences de Turin, aura fait la découverte la plus éclatante et la plus utile, ou qui aura produit l'ouvrage le plus célèbre en fait de sciences physiques et expérimentales, histoire naturelle, mathématiques pures et appliquées, chimie, physiologie et pathologie, sans exclure la géologie, l'histoire, la géographie et la statistique".

Ce Concours sera clos le 31 Décembre 1902.

La somme fixée pour ce prix, la taxe de l'imposition mobilière déduite, sera de 9600 (neuf mille six cents) francs.

Qui a l'intention de se présenter à ce Concours devra le déclarer, dans le terme ci-dessus indiqué par une lettre adressée au Président de l'Académie, et transmettre l'ouvrage par lequel il concourt. Cet ouvrage devra être imprimé; on ne tiendra aucun compte des manuscrits. Les ouvrages qui n'obtiendront pas le prix dont il s'agit, ne seront pas rendus aux concurrents.

Aucun des Membres associés nationaux, résidants ou non résidants, de l'Académie de Turin ne pourra obtenir ce prix.

L'Académie donne le prix à celui des savants qu'elle en juge le plus digne, bien qu'il ne se soit pas présenté au Concours.

Preisfragen der Pariser Akademie der Wissenschaften.

1. Grand prix des sciences mathématiques (pour 1902). — Perfectionner, en un point important, l'application de la théorie des groupes continus à l'étude des équations aux dérivées partielles.

Les Mémoires manuscrits destinés au concours seront reçus au Secrétariat de l'Institut jusqu'au premier octobre 1902; ils seront accompagnés d'un pli cacheté renfermant le nom et l'adresse de l'auteur. Ce pli ne sera ouvert que si le Mémoire auquel il appartient est couronné.

2. Prix Bordin (pour 1902). — Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. — Le prix est de *trois mille* francs.

Einsendung wie unter 1.

3. Prix Damoiseau (pour 1902). — Compléter la théorie de Saturne donnée par Le Verrier, en faisant connaître les formules rectificatives établissant l'accord entre les observations et la théorie. — Le prix sera de quinze cents francs.

Les Mémoires seront reçus au Secrétariat de l'Institut jusqu'au 1er juin 1902.

Königlich Preufsische Akademie der Wissenschaften.

Preis der Steinerschen Stiftung (für 1905). — „Es soll irgend ein bedeutendes, auf die Lehre von den krummen Flächen sich beziehendes, bis jetzt noch nicht gelöstes Problem möglichst mit Berücksichtigung der von J. Steiner aufgestellten Methoden und Prinzipien *vollständig* gelöst werden.

Es wird gefordert, dafs zur Bestätigung der Richtigkeit und Vollständigkeit der Lösung ausreichende analytische Erläuterungen den geometrischen Untersuchungen beigegeben werden.

Ohne die Wahl des Themas einschränken zu wollen, wünscht die Akademie bei dieser Gelegenheit die Aufmerksamkeit der Geometer auf die speziellen Aufgaben zu richten, auf welche J. Steiner in der allgemeinen Anmerkung am Schlusse seiner zweiten Abhandlung über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt hingewiesen hat."

Preis 4000 Mark; Accessit 2000 Mark. Die Bewerbungsschriften, mit einem Spruchwort bezeichnet und von einem den Namen des Verfassers enthaltenden versiegelten Briefumschlag, der das gleiche Spruchwort trägt, begleitet, sind bis zum 31. Dezember 1904 im Bureau der Akademie, Berlin N.W. 7, Universitätsstrafse 8, einzuliefern. Die Verkündigung des Urteils erfolgt in der Leibniz-Sitzung des Jahres 1905.

---

3. Anfragen und Antworten.

Zu 1 (Bd. 1, S. 208). Über das Cylindroid (Plückersche Conoid) sind mir folgende Stellen bekannt:

Sangro Atti R. Acc. Napoli **1** (1819) 83; 97. — Flauti Atti R. Acc. Napoli **4** (1839) 1. — Ball Rep. Br. Ass. **41** (1871) 8. — Ball Trans. R. Ir. Ac. **25** (1872) 157. — Ball Phil. Trans. **164** (1874) 15. — Ball The theory of screws Dublin 1876. — Ball Math. Ann. **9** (1876) 541. — Gambey Nouv. Ann. de Math. (2) **15** (1876) 503. — Göbel Die wichtigsten Probleme der neueren Statik. Diss. Zürich 1877. — Nash and Morel Educ. Times **30** (1878) 96. — Lewis Mess. of Math. (2) **9** (1880) 1. — Göbel Zeitschr. f. Math. u. Phys. **25** (1880) 281. — Ball Rep. Br. Ass. **51** (1881) 547. — Fiedler Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage II, Leipzig (1885). — Peschka Darstellende und projektivische Geometrie, Wien 1884. — De la Gournerie Traité de géométrie descriptive, Paris 1885. — Picquet Bull. Soc. Math. **14** (1886) 68. — Ball Trans. R. Ir. Ac. **29** (1887) 1. — Roberts and Sircom Educ. Times **46** (1887) 32. — Wiener Lehrbuch der darstellenden Geometrie II, Leipzig 1887. — Mannheim Comptes Rendus **106** (1888) 120. — Un Abonné Nouv. Ann. de Math. (3) **7** (1888) 295. — Ball Trans. R. Ir. Ac. **29** (1889) 247. — Lindemann-Clebsch Vorlesungen über Geometrie II, Leipzig 1891, p. 62; 354. — Jarolímek Časopis **20** (1892) 1. — Demoulin Bull. Soc. Math. **20** (1892) 43. — Michel Ass. franç. **22** (1893) II 184. — Demoulin Bull. Soc. Math. **21** (1893) 8. — Mannheim Ass. fr. **23** (1894) II 207. — Mannheim C. R. **119** (1894) 394. — Appell Revue de Math. spéc. **5** (1895) 129. — Roubaudi Revue de Math. spéc. **5** (1895) 181. — Tsuruta Mess. of Math. (2) **24** (1895) 20. — Ball Educ. Times **67** (1897) 60. — Janisch Wiener Monatsh. **8** (1897) 278. — Cardinaal Jahresb. Deutsch. Math. Ver. **7** (1899) 61. — Ball The theory of screws London 1900.

Stuttgart. E. Wölffing.

Vorstehende Angaben werden durch die folgenden Notizen ergänzt:

W. R. Hamilton. First supplement to an essay on the theory of systems of rays. Trans. Roy. Ir. Ac. **16** (1830) 4—62. (Von R. St. Ball als die erste Arbeit angesehen, wo das Cylindroid auftritt; vergl. Theory of screws p. 510, 1900. Siehe aber oben Sangro, 1819). — J. Plücker. On a new geometry of space. Lond. Phil. Trans. **155** (1865) 756. —

J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. S. 95—99 (1868). — R. St. Ball. Description of a model of a conoïdal cubic surface called the „cylindroid" which is presented in the theory of the geometrical freedom of a rigid body. Philos. Mag. (4) **42** (1871) 181. — A. Cayley gab der Fläche nach einer Angabe von Ball 1871 den Namen „Cylindroid" und teilte eine Konstruktion mit. (Theory of screws, p. 20.) — Sir Howard Grubb verfertigte das bei Ball abgebildete Modell (Ibid. p. 151). — G. Battaglini. Sulle serie di sistemi di forze. Napoli Rend. **8** (1869). Giorn. di Mat. **10** (1872). — F. Lindemann. Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maſsbestimmung. Math. Ann. **7** (1873) 56—143. — W. Fiedler. Geometrie und Geomechanik. Vierteljahrsschrift Zürich **21** (1876) 186—228. — T. Rittershaus. Die kinematische Kette, ihre Beweglichkeit und Zwangläufigkeit. Civiling. **22** (1877). — W. K. Clifford. Elements of dynamic: an introduction to the study of motion and rest in solid and fluid bodies. Vol. I. London 1878. Auch andere Schriften Cliffords dürften in Betracht kommen. — W. Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte. Bd. II. Kap. X. Virtueller Coefficient und Cylindroid. Reziprokale Axensysteme. S. 211—236 (1880). — D. Padelletti. Su un calcolo nella teoria delle dinami analogo da quello dei quaternioni. Rend. Acc. Napoli **21** (1882) 111—119. — H. Cox. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space. Cambr. Philos. Trans. **13** (1882) 69—143. — R. S. Heath. On the dynamics of a rigid body in elliptic space. Phil. Trans. 1884, II, 281—324. — A. Buchheim. A memoir on biquaternions. American J. of Math. **7** (1885) 293—326. — G. M. Minchin. A treatise on statics with applications to physics. Vol. II. Third edition. Oxford (1886). — H. Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten und mit einem Vorworte von Sir Robert S. Ball. Berlin (1889). — N. Santschewsky. Theorie der Schrauben und ihre Anwendungen in der Mechanik. Odessa Ges. Denkschr. **9** (Russisch, 1889) I—XX, 1—131. — E. Budde. Allgemeine Mechanik der Punkte und starrer Systeme. Bd. II. S. 598 ff. Berlin (1891). — A. Mannheim. Principes et développements de géométrie cinématique. Seconde partie, p. 258—269. Points, droites et plans particuliers. Conoïde de Plücker. Etude spéciale du conoïde de Plücker. Paris (1894). — C. J. Joly. The theory of linear vector functions. Trans. R. S. Dublin **30** (1894) 597—647. — G. Koenigs. Leçons de cinématique. Note IX. Sur le cylindroïde, p. 458—463 (1897). — C. J. Joly. Bishop Law's prize examination in the University of Dublin, Michaelmas, 1898. — P. Appell. Propriété caractéristique du cylindroïde. Bull. Soc. Math. Fr. **28** (1900) 261—265. — R. Bricard. Sur une propriété du cylindroïde. Bull. Soc. Math. Fr. **29** (1901) 18—21. — A. Demoulin. Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires. Bull. Soc. Math. Fr. **29** (1901) 39—50.

Berlin. E. Lampe.

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter dieser Rubrik nimmt die Redaktion ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in litterarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Die Redaktion hofft vielfach geäufserten Wünschen zu entsprechen, wenn derartige Verbesserungen an dieser Stelle einen Sammelpunkt finden.

Es wird gebeten, diesbezügliche Einsendungen an das Redaktionsmitglied Prof. Dr. W. F. Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, richten zu wollen.

Zu I A 1: Grundlagen der Arithmetik.

I. S. 26, Anm. 26). Die genaueren Litteraturnachweise sind: H. Gerlach, Zeitschr. f. math. nat. Unterr. **13** (1882), S. 423; F. Wöpcke, Journ. f. Math. **42** (1851), S. 83; Em. Schultze, Arch. f. Math. (2) **3** (1886), S. 302; G. Eisenstein, Journ. f. Math. **28** (1844), S. 49.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

Zu I A 2: Kombinatorik.

I. S. 29, Nr. 2, Z. 9. Hinter $n!$ ist einzuschalten: („n-Fakultät", s. die Verallgemeinerung in Nr. 13, S. 35).

I. S. 30, Nr. 3. Am Schlusse ist der Satz hinzuzufügen: Jede Permutation läfst sich durch eine Reihenfolge von Transpositionen erzeugen, s. I A 6, Nr. 7.

I. S. 34, Anm. 36). Am Schlusse ist bei J. de Vries die Seitenzahl 222 hinzuzufügen.

I. S. 35, Z. 1. n ist durch ϱ zu ersetzen.
Ebenda Z. 2 hinter „arithmetisches Dreieck" ist einzuschalten: (Pascalsches Dreieck).

I. S. 41, Anm. 89) Schlufs. Es ist noch die kürzlich erschienene Arbeit zu zitieren: E. J. Nanson, Journ. f. Math. **122** (1900), S. 179.

I. S. 44, Nr. 31. Bezüglich der Kettenbruch-Determinanten s. auch I A 3, Nr. 46, S. 123.

I. S. 46, Nr. 35. Von Pascals „Determinanten" ist kürzlich eine deutsche Ausgabe von H. Leitzmann erschienen, Leipzig 1900.
Den Monographien ist noch das historische Werk hinzuzufügen: Th. Muir, The theory of determinants in the historical order of its development. Part I. London 1890.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

Zu I A 3: Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse.

I. S. 48. Lehrbücher. Die „Analyse algébrique" von Cauchy ist kürzlich als Band (2) 3 seiner „Oeuvres" neu herausgegeben.

I. S. 52, Z. 2. Statt „17. Jahrhunderts" ist „18. Jahrhunderts" zu lesen.

I. S. 58, Anm. 42, Schlufs. Statt „I A 2, Nr. 3" ist „I A 4, Nr. 3" zu lesen.

I. S. 68, Nr. 14. Zur Lehre vom „eigentlich Unendlichen" vgl. I A 5, Nr. 4.

I. S. 73, Anm. 128. Das „Résumé des leçons ..." von Cauchy ist kürzlich in Band (2) 4 seiner „Oeuvres" neu herausgegeben.

I. S. 74, Nr. 18. Über die Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ... in der Funktionenlehre s. II A 1, Nr. 13.

I. S. 74, Anm. 129). Bei „Wulf" ist die Jahreszahl 1897 nachzutragen.

I. S. 78, Anm. 151). Die angeführte Ungleichung ist zu ersetzen durch:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{a^2-a}{a^2} = 1. \qquad (a=2, 3, 4, \ldots)$$

I. S 89, Anm. 194). Den Ermakoffschen Beweis verteidigt D. M. Sintzow, Moskau Math. Samml. **20** (1899), S. 616.

I. S. 98. Über die Anordnung einer Doppelreihe in eine einfache und ihre Anwendung auf die Mengenlehre vgl. I A 5, Nr. 2, Anm. 10).

I. S. 103, Formel (47). Es ist $B_{2\nu-1}$ durch B_ν zu ersetzen, sowie $f^{2\nu-1}$ durch $f^{(2\nu-1)}$.

I. S. 103, Anm. 269). Die genaueren Zitate sind: I E, Nr. 11, II A 3, Nr. 12, 18.

I. S. 103, Anm. 272). Über die Stirlingsche Formel in engerem Sinne vgl. I E, Nr. 12, über die Stirlingsche Formel in weiterem Sinne (S. 104) vgl. II A 3, Nr. 18, Anm. 272).

I. S. 104, Z. 3. 4. Über das Auftreten des Integrals $\int_0^x e^{-x^2} dx$ in der Wahrscheinlichkeitsrechnung s. I D 1, Nr. 10, 12—14; I D 2, Nr. 4; I D 4a, Nr. 2; I D 4b, Nr. 3.

I. S. 106, Anm. 281). Das genauere Zitat ist: II A 1, Nr. 16, 17.

I. S. 110, Anm. 296). Statt „J. de Math. **4**, 12" ist zu setzen: „J. de Math. (5) **2**". Die umfassende Preisarbeit von Borel über die Summierbarkeit divergenter Reihen ist inzwischen in Ann. Ec. Norm. (3) **16** (1899), S. 9 erschienen. Vgl. noch Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901, sowie **II** B 1 Nr. 13.

I. S. 118, Anm. 330). Das zitierte Werk von Ch. Kramp ist in Strafsburg und Leipzig 1798 erschienen.

I. S. 119, Anm. 339), Z. 1. Innerhalb der Klammer hat das doppelte Vorzeichen zu stehen.

I. S. 122. Zweiter Absatz, Z. 3. Statt „$[b_0, b_1 \ldots b_\nu]$" setze man „$K_n = [b_0, b_1 \ldots b_\nu]$".

I. S. 122, Anm. 352). Die Abhandlung von Möbius erschien ursprünglich in J. f. Math. **6** (1830), S. 215.

I. S. 124, Anm. 368). Vgl. noch die autogr. Vorlesung von Klein über Zahlentheorie I, Gött. 1896.

I. S. 134, Z. 2. Statt $\sum_1^n (-1)^\nu c_\nu$ ist zu setzen: $\sum_1^n (-1)^{\nu-1} c_\nu$.

I. S. 135, Anm. 415), Z. 2. Statt $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]$ ist zu setzen: $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1$.

I. S. 137. Hinter Formel (109) ist $\beta = 1$ statt $\beta = 0$ zu lesen.

I. S. 140, Z. 5 v. u. Statt (104) ist (102) zu lesen.

I. S. 141, Nr. 58. Über unendliche Determinanten vgl. noch I A 2, Nr. 33; über die Auflösung eines begrenzten Systems linearer Gleichungen mit Hülfe von Determinanten I B 1b, Nr. 12.

I. S. 143. In Formel (122) ist $D^{m,n}$ durch $D_{m,n}$ zu ersetzen.

I. S. 145. In Formel (126) ist bei der zweiten Summe der Summationsindex ν hinzuzufügen.

I. S. 146. Nachträge, Z. 3. Die Jahreszahl bei Schimpf ist 1895 (nicht 1845).

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

I. S. 120, Z. 6 v. o. soll b_0 statt a_0 stehen.

Königsberg i. Pr. E. Müller.

Zu I B 2: Invariantentheorie.

I. S. 321. Monographien. Nachträge: Von W. Fr. Meyer, Bericht über die Fortschritte der proj. Invariantentheorie, ist inzwischen eine polnische Ausgabe von S. Dickstein (Warschau 1899) erschienen. H. Andoyer hat inzwischen das ausführlichere Werk veröffentlicht: Leçons sur la Théorie des Formes I, Paris 1900. (Binäre und ternäre Formen). Das neueste Werk über Invariantentheorie ist: A. Capelli, Lezioni sulla Teorica delle Forme algebriche, litogr., Napoli 1902. (Allgemeine Theorie, mit einem Anhange über binäre Formen).

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

I. S. 402, Anm. 435. In der vorletzten Zeile ist hinter „eingehend" der Name „G. Kohn" einzuschalten.

Königsberg i. Pr. E. Müller.

Zu I E: Differenzenrechnung.

I. S. 930. Formel (49) und (53). Das Glied mit dem Faktor A_{2k-1} ist zu streichen, da $A_{2k-1} = 0$.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

Fricke, Robert, kurzgefafste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil. Mit 102 in den Text gedruckten Figuren. [IX u. 520 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Fricke, Robert, und **Felix Klein,** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. In 2 Bänden. II. Bd. 1. Hälfte. Mit 34 in den Text gedr. Fig. gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 10.—

Gaufs, Carl Friedrich, Werke, herausg. v. d. Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. VIII. Band. [458 S.] 4. 1900. kart. n. ℳ 24.— (Band VII unter der Presse.)

Heun, Karl, die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Mit 16 Figuren im Text. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. IX. Bd. 2. Heft. [IV u. 123 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 4.—

Hölder, Otto, Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. [75 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 2.40.

Klein, F., und **E. Riecke,** über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen. Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1890, bei Gelegenheit des Ferienkurses. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. [VI u. 252 S.] Mit 84 Textfiguren. gr. 8. 1900. geb. n. ℳ 6.—

Koenigsberger, Leo, die Principien der Mechanik. Math. Untersuchungen. [XII u. 228 S.] gr. 8. 1901. In Leinw. geb. ℳ 9.—

Kötter, Ernst, die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. V, 2. [XXVIII u. 486 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 18.80.

Kronecker, L., Vorlesungen über Zahlentheorie. I. Band. Herausgegeben von Kurt Hensel. [XVI u. 509 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 18.—

Lüroth, J., Vorlesungen über numerisches Rechnen. Mit 18 Figuren im Text. gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Müller, Felix, mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. [XIV u. 315 S.] Lex.-8. 1901. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Netto, E., Vorlesungen über Algebra. 2 Bde. II. Bd. 2. (Schlufs-) Lieferung. [XI u. S. 193—327.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 10.—

——— Lehrbuch der Combinatorik. [VIII u. 260 S.] 1902. gr. 8. In Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Pascal, Ernst, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formen, Theoreme, Litteratur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp, Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. I. Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 10.— (II: Geometrie unter der Presse.)

——— die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Deutsch von H. Leitzmann. [XVI u. 266 S.] gr. 8. 1900. geb. n. ℳ 10.—

Schilling, Fr., über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. Mit 28 Abbildungen. [47 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 2.—

Schlömilch, O., Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. II. Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Auflage. Bearbeitet von Prof. Dr. R. Henke, Konrektor am Annen-Realgymnasium zu Dresden. Mit Holzschnitten im Texte. [VIII u. 448 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 9.—, geb. n. ℳ 10.—

Schoenflies, A., die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VIII. Band. 2. Heft. Mit 5 Figuren im Text. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Serret, J.-A., Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. 2., durchges. Auflage mit Unterstützung der Herren H. Liebmann u. E. Zermelo herausgegeben von G. Bohlmann. In 3 Bänden. gr. 8. geh.

I. Differentialrechnung. Mit [illegible] Figuren. [X u. [illegible] S.] 1897. n. ℳ 10.—, geb. n. ℳ 11.—

II. Integralrechnung. Mit 55 Figuren. [XII u. [illegible] S.] 1899. n. ℳ [illegible]—, geb. n. ℳ [illegible]—

III. Differentialgleichungen u. Variationsrechnung. (Unter der Presse.)

Simon, Max, Euclid und die sechs planimetrischen Bücher. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XI. Heft. Mit 192 Figuren im Text. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 5.—

Stolz, O. und J. A. Gmeiner, theoretische Arithmetik. In 2 Abteilungen. I. Abteilung. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte I—IV des I. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. A. u. d. T.: B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band IV, 1. [IV u. 98 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 2.40, in Leinwand geb. n. ℳ 3.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. 2 Lieferungen. I. Lieferung. Mit in den Text gedruckten Figuren. [240 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 7.60.

Sturm, Rud., Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearb. u. erweit. Aufl. Mit 61 Fig. im Text u. 7 lith. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 5.60.

Suter, H., die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 10. Heft. [IX u. 278 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 14.—

Volkmann, P., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.20.

Wassiljef, A., u. N. Delaunay, P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen. — Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Mit Porträt Tschebyschef's. [IV u. 70 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 4.—

von Weber, Dr. E., Privatdozent an der Universität München, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. A. u. d. T.: Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften. Band II. [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwd. geb. n. ℳ 24.—

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner in Leipzig.**

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

2. BAND. 3. UND 4. (DOPPEL-)HEFT.

MIT 14 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 28. JANUAR 1902.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Strafse 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 35, Kurfürstenstrafse 139 und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von gröfseren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine gröfsere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfafst 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 12 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden.

Berichtigungen zu Band 1.

S. 284 lies im Nenner der ersten Formel $r^n e^{n\Theta\sqrt{-1}} - 1$ statt $r^n e^{n\Theta\sqrt{-1}-1}$.

S. 280 ersetze das Theorem XXIX durch das folgende: Die Verbindungslinie der Mitte der von A_i ausgehenden Mittellinie mit dem Fufspunkt der Höhe $A_i H$ geht durch den Punkt C_i. (L. Ripert.)

S. 286 ersetze R_0 in Theorem XXXVIII durch den Punkt $R_0^{*\prime}$, welcher den Ausdruck hat $x_1 p_1 B_1 + x_2 p_2 B_2 + x_3 p_3 B_3$. (L. Ripert.)

S. 370 ersetze die rechte Seite $\frac{\pi(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$ in Aufgabe 16 durch $\frac{2\pi}{a^2 + b^2}$. (L. Saalschütz.)

S. 376 zu S. 185 Fufsnote 170 lies Schwering statt Schering.

Berichtigungen zu Band 2.

S. 128 lies in Gl. (16) $x = \alpha$ statt $x = a$.

S. 221 erste Fufsnote lies Theorem IV statt Theorem VI.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

Über den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit.

Von J. WEINGARTEN in Charlottenburg.

In dem durch originale Betrachtungen hervorragenden Werke des italienischen Ingenieurs Castigliano über das Gleichgewicht elastischer Systeme (Castigliano, Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme; übersetzt[1]) von E. Hauffe, Wien 1886) ist zuerst ein Lehrsatz ausgesprochen worden, den der Autor den Satz von der kleinsten Arbeit nennt, und in folgender Fassung angiebt:

Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des Körpers oder Systems zwischen den Molekülpaaren auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insofern man jene Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, dafs zwischen diesen Kräften um jedes Molekül Gleichgewicht besteht (l. c. pag. 46).

Auf Seite 47 desselben Werkes erscheint dieser Satz in der allgemeineren Weise ausgedrückt:

dafs, welches auch die unbekannten Gröfsen sind, in deren Funktionen man die Deformationsarbeit eines Systems ausgedrückt hat, die Werte, welche dieselben nach der Deformation haben, derartige sind, dafs sie unter Berücksichtigung der zwischen ihnen stattfindenden Bedingungsgleichungen diese Arbeit zu einem Minimum machen.

Der Inhalt dieser Sätze, die den Anschein erwecken, ein *Prinzip* der Elastizitätslehre festzustellen, ist einem präzisen Verständnis nicht ohne weiteres zugänglich. Es sei uns daher gestattet, diesen Inhalt klar zu legen, um so mehr, als die betreffenden Sätze eine ausgedehnte Anwendung in der technischen Mechanik bei der Behandlung der sogenannten Stützaufgaben gefunden haben. Hierbei wird sich herausstellen, dafs der Castiglianosche Satz nicht ein *Prinzip* ausspricht, sondern eine an beschränkende Voraussetzungen gebundene Vorschrift.

Wenn an einem ursprünglich neutralen, homogenen elastischen Körper, gleichgiltig, ob das Material desselben isotrop oder anisotrop

---

1) Nach dem französischen Original: Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. Turin 1879. F. Negro.

vorausgesetzt wird, äufsere Kräfte ins Gleichgewicht getreten sind, so ist das Eintreten dieses Gleichgewichts stets mit einer Verschiebung der materiellen Elemente des Körpers, einer Deformation, verbunden, die als verschwindend klein vorausgesetzt wird. Aus dem einzig und allein für eine statische Aufgabe *gegebenen* System der Gleichgewicht haltenden Kräfte, läfst sich ein Schlufs auf die Zeitdauer und auf die Vorgänge der Deformation nicht ziehen. Dies System giebt nur die *Endwerte* der während der Deformationszeit veränderlichen äufseren Kräfte an, die *schliefslich* den sechs Gleichgewichtsbedingungen, die für die Kräfte an einem starren Körper bestehen, genügen müssen. Auch die Verrückungen, welche die Körperpunkte am Schlusse der Deformationszeit erlangt haben, sind nicht vollständig durch das gegebene Kräftesystem bestimmbar, sondern nur bis auf eine willkürlich bleibende unendlich kleine Drehung und Fortschreitung des betrachteten elastischen Körpers.

Nichts destoweniger läfst sich aus dem Umstande, dafs am Anfang der Deformationszeit Ruhe bestand, am Ende der Deformationszeit Ruhe und Kräftegleichgewicht an allen Körperelementen eingetreten ist, ein entscheidender Schlufs ziehen.

Es mufs, da nach Ablauf der Deformationsbewegung die lebendige Kraft aller Elemente des Körpers keine Änderung erlitten hat, sondern wie am Anfange der Null gleich ist, die Summe aller Arbeiten der angreifenden *äufseren* Kräfte, die während dieser Bewegung auftraten, mit der Summe aller Arbeiten der *inneren* entstandenen, auf die Elemente wirkenden elastischen Drucke oder Spannungen von gleicher Gröfse sein.

Die *erstere* Arbeitssumme läfst sich wegen der Unkenntnis der während der Deformationsbewegung wirksam gewesenen Kräfte, die in mannigfaltigster Weise der Zeit und der Gröfse nach verändert vorausgesetzt werden können, *nicht* direkt berechnen. Für die *zweite* dieser Summen, die innere Arbeit, ergiebt die Theorie *einen* bestimmten Wert, der nur durch das *gegebene*, im Gleichgewicht befindliche System der *End*kräfte bedingt wird, dagegen *nicht* bedingt wird durch die Ausgangslage der Deformation.

Hiernach ist die Arbeit der äufseren Kräfte während der Deformationen eines elastischen Körpers, die zu einem und demselben System der *End*kräfte führen, stets eine und dieselbe, welches auch die Zeitdauer der Deformation und die Veränderungsweise der äufseren Kräfte während dieser Dauer gewesen sei.

Diese Arbeit wird die zu dem betreffenden, das Gleichgewicht haltenden, Kräftesystem gehörige Deformationsarbeit genannt.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir aus der allgemeinen Theorie der Elastizität fester Körper, aufser dem Satze, dafs die Deformationsarbeit stets durch eine wesentlich *positive* Gröfse dargestellt wird, noch die Kenntnis zweier anderer Sätze voraussetzen, die, falls es sich um Betrachtungen von Körpern von vorwiegend einer Dimension wie Stäbe, Balken handelt, leicht auch durch bekannte Betrachtungen der Navierschen und ähnlicher Theorien abgeleitet werden.

Der erste dieser Sätze ist der folgende: Bezeichnet man durch (X, Y, Z) die auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogenen Komponenten der Kräfte eines im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystems in irgend einem Punkt des angegriffenen Körpers, durch (u, v, w) die Komponenten der Verschiebung, welche dieser Punkt nach eingetretener Deformation erlitten hat, so wird die zu diesem Kräftesystem gehörige Deformationsarbeit D durch die Formel:

$$\text{(I)} \qquad D = \tfrac{1}{2} \sum (Xu + Yv + Zw)$$

gegeben, in welcher sich das Summenzeichen auf alle angegriffenen Punkte (Körperelemente) des elastischen Körpers bezieht.

Der zweite wird gewonnen durch die Betrachtung eines zweiten Kräftesystems, dessen im Gleichgewicht befindlichen Kräfte in jedem Punkte des nämlichen Körpers die Komponenten (X', Y', Z') besitzen, und mit den Verschiebungskomponenten (u', v', w') verbunden sind. Die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht des Körpers unter dem Einflufs je eines dieser Kräftesysteme ergeben die allgemein giltige Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad \sum (X'u + Y'v + Z'w) = \sum (Xu' + Yv' + Zw'),$$

in denen die Summen wiederum über alle durch die betreffenden Kräfte angegriffenen Punkte auszudehnen sind. Betrachtet man nunmehr das aus dem *gleichzeitigen* Angriff beider Kräftesysteme hervorgehende dritte, welches, an dem vorgelegten Körper angebracht, gleichfalls Gleichgewicht hervorruft, und bezeichnet durch (X'', Y'', Z'') die in einem beliebigen Körperpunkt jetzt angebrachten Kraftkomponenten, durch $(u'', v'' w'')$ die dem Gleichgewicht entsprechenden Verschiebungskomponenten dieses Punktes, so finden die Beziehungen statt:

$$X'' = X + X', \quad Y'' = Y + Y', \quad Z'' = Z + Z',$$
$$u'' = u + u', \quad v'' = v + v', \quad w'' = w + w',$$

die letzteren gemäfs dem Prinzip der Superposition.

Die zur Herbeiführung des Gleichgewichts durch das System der Komponenten (X'', Y'', Z'') aufgewendete Deformationsarbeit D'' ergiebt sich nach (I) aus der Gleichung:

$$D'' = \tfrac{1}{2}\sum (X''u'' + Y''v'' + Z''w'')$$

oder nach Benutzung der vorstehenden Gleichungen aus der folgenden:

$$D'' = \tfrac{1}{2}\sum (Xu + Yv + Zw) + \tfrac{1}{2}\sum (X'u' + Y'v' + Z'w')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Big[\sum Xu' + Yv' + Zw') + \sum (X'u + Y'v + Z'w)\Big],$$

welche mit Rücksicht auf die Gleichung (II) in die Form

$$\text{(III)} \qquad D'' = D + D' + C$$

gesetzt werden kann, wenn D und D' die den beiden zuerst gewählten Kräftesystemen einzeln zugehörigen Deformationsarbeiten bezeichnen, während C durch die beiden gleichwertigen Formen:

$$C = \sum (Xu' + Yv' + Zw') = \sum (X'u + Y'v + Z'w)$$

gegeben wird.

Von den aufgestellten allgemeinen Formeln wollen wir eine Anwendung auf zwei *bestimmte* Kräftesysteme machen, die zunächst einzeln und nachher gemeinschaftlich den betrachteten elastischen Körper angreifen. Zu dem Ende werden wir in dem Körper zwei Gruppen von Angriffspunkten formal unterscheiden. Die erste Gruppe soll als die Gruppe der *Belastungspunkte*, die zweite als die Gruppe der *Stützpunkte* bezeichnet werden.

Als das erste Kräftesystem mit den Komponenten (X, Y, Z) wählen wir das in folgender Weise charakterisierte:

In jedem *Belastungspunkte* seien drei *gegebene* unveränderliche Komponenten X, Y, Z angebracht, deren Resultante wir die Belastung dieses Punktes nennen; in jedem *Stützpunkte* drei Komponenten, welche *willkürlich* gewählt werden können, bis auf die Bedingung, dafs ihre Gesamtheit den Belastungskräften das Gleichgewicht hält. Wir werden die Resultanten dieser Komponenten in solchem Punkte die dortige Stützkraft nennen. Wenn die Anzahl der Stützkräfte oder ihrer Komponenten eine derartige ist, dafs die Werte derselben durch die sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts zwischen den Belastungs- und Stützkräften allein nicht bestimmt werden können (welchen Fall wir für die Folge als eintretend voraussetzen), so existiert eine unendliche Mannigfaltigkeit von Stützkräften für die gegebenen Stützpunkte, welche den bekannten und gegebenen Belastungskräften das Gleichgewicht

halten können. Die Belastung des Körpers kann alsdann in unbegrenzt vielen Weisen von den Stützpunkten aus *abgestützt* werden. Aber jeder dieser Abstützungen oder dem ihr entsprechenden Gleichgewicht ist eine gewisse Deformationsarbeit zugehörig, welche im allgemeinen für zwei von einander verschiedene Abstützungen von verschiedener Gröfse sein wird. Wir wollen nun diejenige *eine* besondere Abstützung ins Auge fassen, nach deren Eintritt jeder einzelne der Stützpunkte eine *gegebene* Verschiebung erlitten hat, deren Komponenten die *gegebenen* Werte α, β, γ haben mögen. Es erscheint unnötig, für die verschiedenen Stützpunkte diese Verschiebungskomponenten α, β, γ durch Accente oder Indices von einander zu unterscheiden. Das besondere System von Belastungs- und Stützkräften, welches bei dem Eintritt *dieser* Abstützung erscheint, möge als das *erste* System der Komponenten (X, Y, Z) aufgefafst werden.

Für das *zweite* der Kräftesysteme wählen wir das folgende:

In jedem *Stützpunkte* des Körpers seien drei *willkürlich* gewählte Kraftkomponenten (X', Y', Z') angebracht, jedoch mit der Beschränkung der Willkür, dafs diese sämtlichen Komponenten an dem starr gedachten Körper sich das Gleichgewicht halten. An jedem *Lastpunkt* sollen die Komponenten X', Y', Z' der an ihm angebrachten Kraft jede einzeln gleich Null sein.

Die Zusammensetzung der beiden definierten Kräftesysteme führt zu einem dritten mit den Komponenten (X'', Y'', Z''), in welchem diese Komponenten für jeden *Lastpunkt* mit den Komponenten der *gegebenen* Belastung übereinstimmen, für jeden Stützpunkt aber willkürlich bleiben, bis auf die Bedingung, dafs das gesamte Kräftesystem den sechs Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Körpers genüge.

Dieses System (X'', Y'', Z'') stellt daher das *allgemeinste* Kräftesystem dar, welches imstande ist, den Bedingungen der *Abstützung* der gegebenen Lasten für den betrachteten Körper zu genügen, und umfafst sämtliche möglichen Abstützungsweisen.

Berechnen wir die zu diesem System gehörige Deformationsarbeit nach Formel (III):

$$D'' = D + D' + C,$$

indem wir C durch die Gleichung

$$C = \sum (X'u + Y'v + Z'w)$$

bestimmt wählen. Die Elemente der die Gröfse C darstellenden Summe sind Null für jeden Lastpunkt, da X', Y', Z' für jeden solchen verschwinden, und die Summation erstreckt sich daher nur über die Stützpunkte. Die Komponenten der Verschiebung u, v, w jedes Stützpunkts

unter dem Einflufs des ersten der beiden Kräftesysteme fallen nach der Voraussetzung mit den *gegebenen* Werten α, β, γ zusammen. Es ergiebt sich daher die gesuchte Deformationsarbeit durch die Gleichung

$$D'' = D' + D + \sum (X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma).$$

Wenn man in dieser Gleichung die Werte von X', Y', Z' durch die ihnen gleichen Werte: $X'' - X$, $Y'' - Y$, $Z'' - Z$ ersetzt, und die doppelt accentuierten Gröfsen auf die linke Seite überführt, so ergiebt sich:

$$D'' - \sum{}' (X''\alpha + Y''\beta + Z''\gamma) = D' + D - \sum{}' (X\alpha + Y\beta + Z\gamma),$$

in welcher Gleichung der Accent des Summenzeichens andeutet, dafs die Summation sich nur über die Stützpunkte erstreckt. Bemerkt man noch, dafs die Gröfse D' als Wert einer Deformationsarbeit stets eine *positive* ist, so gelangt man zu dem einfachen Resultat:

$$\text{(IV)} \quad D'' - \sum{}' (X''\alpha + Y''\beta + Z''\gamma) > D - \sum{}' (X\alpha + Y\beta + Z\gamma).$$

Es fällt daher der Wert der auf der linken Seite dieser Ungleichung stehenden Gröfse für *irgend eines* der Abstützungssysteme *gröfser* aus als für dasjenige, mit welchem die gegebenen Verschiebungskomponenten α, β, γ verbunden sind. Diese Gröfse nimmt daher für das letztere ihren kleinstmöglichen Wert an unter der dauernden Voraussetzung, dafs sämtliche Kräfte (X, Y, Z) und auch (X'', Y'', Z'') den sechs Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers genügen.

Um das vorstehende Resultat bequemer aussprechen zu können, wollen wir uns der nachfolgenden Ausdrucksweise bedienen.

Es sei σ der *gegebene* Wert einer unendlich kleinen Verschiebung, α, β, γ seien die Werte ihrer Komponenten, ferner P der Wert einer Kraft, X, Y, Z die Werte ihrer Komponenten, θ schliefslich der Winkel zwischen der Richtung der Kraft und der Richtung der Verschiebung. Alsdann möge die Gröfse

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = P \cos\theta\, \sigma$$

die *elastische* Arbeit der Kraft P in Beziehung auf die Verschiebung σ genannt werden, zum Unterschiede von der *mechanischen* Arbeit, die hier nicht in Frage kommt.

Nach Einführung dieser Sprachweise können wir den Satz aufstellen:

Für diejenige Abstützung eines belasteten elastischen Körpers, bei welcher die Stützpunkte desselben *gegebene* Verschiebungen erleiden, fällt der Wert der zugehörigen Deformationsarbeit vermindert um die

elastischen Arbeiten der Stützkräfte in Beziehung auf die gegebenen Verschiebungen stets kleiner aus, als der entsprechende Wert dieser Differenz für irgend eine andere Abstützung aus den nämlichen Stützpunkten.

In dem besonderen Falle, dafs die gegebenen Verschiebungen α, β, γ für alle Stützpunkte gleich Null werden, oder in dem Falle, dafs diese Verschiebungen gegen die betreffende Stützkraft senkrecht gerichtet sein sollen, der bei der Beweglichkeit der Stützpunkte auf reibungslosen Flächen oder Linien eintritt, verwandelt sich dieser Satz in den folgenden:

Für diejenige Abstützung eines belasteten elastischen Körpers, welche mit einer Unbeweglichkeit der Stützpunkte verbunden ist, oder bei welcher die Stützpunkte nur auf reibungslosen Widerlagern gleiten können, ist die zugehörige Deformationsarbeit kleiner als bei jeder anderen Abstützung desselben Körpers aus den nämlichen Stützpunkten mit zu den Widerlagern senkrechten Stützrichtungen.

Dieser Satz entspricht dem Satze von Castigliano. Man bemerkt aber, dafs durch ihn nicht ein Prinzip, welches die Deformationsarbeit beherrscht, ausgedrückt wird. Er ist an die Beschränkung des Verschwindens der Summe der elastischen Arbeiten der Stützkräfte in Beziehung auf die Verschiebungen der Stützpunkte gebunden.

Was die gegebene Herleitung betrifft, so erscheint dieselbe frei von den Schwierigkeiten, welche der Beweis der Existenz eines Minimums herbeiführt, wie auch von denjenigen Schwierigkeiten, welche die Diskussion des Vorzeichens von Gliedern höherer Ordnung herbeiführen würde, wenn man den Beweis durch den Nachweis des Verschwindens des Differentials oder der ersten Variation des Wertes der Deformationsarbeit führen müfste. Für das vorliegende Problem, das nur auf ganze Funktionen zweiten Grades beliebig vieler unabhängigen Veränderlichen führt, sind derartige Betrachtungen unnötig.

Berlin, den 3. Oktober 1901.

Über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen.

Von PAUL STÄCKEL in Kiel.

1. Dirichlet hat im Jahre 1829 gezeigt, dafs jede reelle Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x sich für das Intervall $x = (0 \dots 2\pi)$ durch eine trigonometrische Reihe:

$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_n \sin nx + \cdots$$

darstellen läfst, sobald das Intervall $x = (0 \dots 2\pi)$ in eine endliche Anzahl von Teilintervallen $(0 \dots x_1)$, $(x_1 \dots x_2)$, $(x_2 \dots x_3)$, $\dots$, $(x_{s-1} \dots 2\pi)$ zerlegt werden kann, in deren jedem $f(x)$ stetig ist und entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt; dabei brauchen die Grenzen der Werte von $f(x)$, die man erhält, indem man sich von links oder von rechts den Punkten $x_1, x_2, \dots, x_{s-1}$ nähert, oder $f(x_1 - 0)$ und $f(x_1 + 0)$, $\dots$, $f(x_{s-1} - 0)$ und $f(x_{s-1} + 0)$ nicht übereinzustimmen, und es braucht auch nicht $f(0) = f(2\pi - 0)$ zu sein[1]).

Im Folgenden soll auf Grund eines von mir an anderer Stelle dargelegten Verfahrens[2]) die Konvergenz der trigonometrischen Reihe für $f(x)$ unter Voraussetzungen bewiesen werden, die teils enger teils weiter als die Dirichletschen sind. Es soll nämlich das Intervall $x = (0 \dots 2\pi)$ wieder in eine endliche Anzahl von Teilintervallen $(0 \dots x_1)$, $(x_1 \dots x_2)$, $(x_2 \dots x_3)$, $\dots$, $(x_{s-1} \dots 2\pi)$ zerlegt werden können, sodafs $f(x)$ in jedem Teilintervall stetig ist, aufserdem soll aber für jeden Punkt eines solchen Intervalles der Quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für $h = 0$ einen bestimmten endlichen Grenzwert haben; dabei darf der Grenzprozefs für positive und der für negative Werte von h ver-

1) *Sur la convergence des séries trigonométriques.* Journal für Mathematik, 4 (1829). 157—169 = Werke Bd. I. Berlin 1889. 117—132.

2) *Über das Dirichletsche Integral*, Berichte der math. phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. d. W. Jahrgang 1901. 147—151.

schiedene Resultate ergeben, sodaſs für die Kurve $y = f(x)$ „Ecken“ zulässig sind. Es wird also einerseits eine gewisse Voraussetzung über das Verhalten des Quotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

gemacht, die bei Dirichlets Beweis nicht erforderlich ist, andererseits aber wird zugelassen, daſs $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima besitzt, was dort ausgeschlossen ist. Daſs übrigens eine Funktion $f(x)$ der hier betrachteten Art, auch wenn ihre Ableitung überall bestimmte endliche Werte hat, unendlich viele Maxima und Minima besitzen kann, das folgt aus Untersuchungen, die Herr Köpcke angestellt hat[1]).

Daſs die Voraussetzung der Stetigkeit *allein* nicht genügt, um die Entwickelbarkeit von $f(x)$ in eine trigonometrische Reihe zu sichern, hat Paul Dubois-Reymond[2]) gezeigt; es muſs also zur Stetigkeit noch eine weitere Beschränkung hinzutreten. Auf die neueren Arbeiten über diesen Gegenstand einzugehen, erscheint jedoch nicht erforderlich, da es sich an dieser Stelle lediglich darum handeln wird, ebenso, wie es Dirichlet gethan hat, unter ausschlieſslicher Benutzung *elementarer* Hilfsmittel den Nachweis der Konvergenz zu führen.

2. Um zu beweisen, daſs die Reihe

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \dots + b_n\cos nx + \dots\\ &\quad + a_1\sin x + a_2\sin 2x + \dots + a_n\sin nx + \dots,\end{aligned}$$

wenn man ihre Koeffizienten durch die Gleichungen:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos m\xi f(\xi)d\xi, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin m\xi f(\xi)d\xi$$

bestimmt, immer konvergiert und für alle Werte des Intervalls $x = (0 \dots 2\pi)$ der Funktion $f(x)$ gleich ist, bilde man die Summe $S_n(x)$ ihrer $2n+1$ ersten Glieder. Man findet dafür sofort den Ausdruck

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi f(\xi)\left[\tfrac{1}{2} + \cos(\xi - x) + \cos 2(\xi - x) + \cdots + \cos n(\xi - x)\right],$$

1) *Über eine durchaus differentiirbare, stetige Function mit Oscillationen in jedem Intervall.* Math. Ann. **34** (1889), 161—171; **35** (1889), 104—109. Vergl. auch Schoenflies, Math. Ann. **54** (1900). 553 und Brodén, Vet. Ak. Öfv. Stockholm 1900. 423 und 743.

2) *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.* Abhandlungen der Akademie zu München, 2. Abteilung. **12** (1877). 1—102.

der mit Hilfe der bekannten Summationsformel:

$$\cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cdots + \cos n\vartheta = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta}{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}$$

in

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\frac{\sin(2n+1)\frac{\xi-x}{2}}{2\sin\frac{\xi-x}{2}}\,d\xi$$

übergeführt wird, und hat alsdann zu zeigen, dafs der Unterschied zwischen $f(x)$ und diesem Integral, wenn n beständig wächst, kleiner wird als jede gegebene noch so kleine Gröfse. Durch die Substitution

$$\frac{\xi - x}{2} = u$$

wird S_n übergeführt in

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{0} f(2u+x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\frac{1}{2}x} f(2u+x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du.$$

Kann man daher zeigen, dafs für $0 < h < \pi$ stets

$$\lim_{n=\infty}\int_0^h F(u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\,du = \frac{\pi}{2}F(+0)$$

ist, wo $F(u)$ eine Funktion bedeutet, die in dem Intervall $u = (0\cdots\pi)$ den der Funktion $f(x)$ auferlegten Bedingungen genügt, so folgt sofort, dafs

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \tfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$$

wird, sobald x ein Punkt im Innern des Intervalles $x = (0\ldots 2\pi)$ ist, und einfache Überlegungen zeigen, dafs sich für die Grenzen des Intervalles

$$\lim_{n=\infty} S_n(0) = \lim_{n=\infty} S_n(2\pi) = \tfrac{1}{2}(f(+0) + f(2\pi - 0))$$

ergiebt.

3. Der folgende Beweis beruht auf dem fundamentalen Theoreme, dafs jede reelle Funktion $\varphi(x)$ der reellen Veränderlichen x, die für jeden Punkt des Intervalles $x = (a\ldots b)$ *stetig* ist, in diesem Intervall *gleichmäfsig stetig* ist[1]), einem Theoreme, dessen Sinn zunächst dargelegt werden soll.

1) Heine, Journal f. Math. **74** (1872), 188 und U. Dini, Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali. (Pisa 1878, deutsche Ausgabe Leipzig 1892) § 41, wo sich ein auf G. Cantor zurückgehender Beweis findet. Vergl. auch *Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, Bd. II. 18.

Die Funktion $f(x)$ heifst für einen Punkt $x = x_0$ *stetig*, wenn man bei gegebenem beliebig kleinem ε um x_0 ein Intervall $x = (x_0 - \delta \ldots x_0 + \delta)$ abgrenzen kann, sodafs die Schwankung von $f(x)$ in diesem Intervall, d. h. der Unterschied des gröfsten und des kleinsten Wertes, den $f(x)$ darin annimmt, kleiner als ε ist. Das Wesen der *gleichmäfsigen* Stetigkeit wird dann ausgedrückt durch den Lehrsatz:

„Ist $f(x)$ für alle Punkte x_0 eines Intervalles $x = (a \ldots b)$ stetig, so läfst sich das Intervall immer in eine endliche Anzahl r von gleichen Teilen zerlegen, sodafs die Schwankung von $f(x)$ in jedem Teilintervall kleiner als eine gegebene beliebig kleine Gröfse ε ist."

Zum Beweise teile man das Intervall $(a \ldots b)$ in n gleiche Teile und bilde für jedes Teilintervall die Schwankung von $f(x)$. Sind alle Schwankungen kleiner als ε, so ist der Satz bewiesen. Es ist also nur zu zeigen, dafs nicht für jeden Wert von n ein oder mehrere Teilintervalle vorhanden sein können, für die die Schwankung gröfser als ε ist. Gäbe es jedoch für unbegrenzt viele Werte von n mindestens ein solches Teilintervall, so bildeten deren Anfangspunkte eine dem Intervall $(a \ldots b)$ angehörige unendliche Punktmenge, die mindestens einen Häufungspunkt x_1 besäfse, d. h. es gäbe einen Punkt x_1, sodafs jedes noch so kleine ihn enthaltende Intervall $(x_1 - \delta \cdots x_1 + \delta)$ unendlich viele Punkte der Menge enthielte, es lägen also auch in seinem Innern unendlich viele Teilintervalle, für die die Schwankung gröfser als ε ist. Dann aber wäre die Schwankung für das Intervall $(x_1 - \delta \cdots x_1 + \delta)$ erst recht gröfser als ε, und das widerspricht der Voraussetzung, dafs $f(x)$ auch für den Punkt x_1 stetig sein soll.

4. Ist die Funktion $\varphi(u)$ in dem Intervall $u = (g \cdots h)$ stetig, so gelten, wenn r irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, für die r Intervalle:

$$u = \left(g \ldots g + \frac{h-g}{r}\right), \quad \left(g + \frac{h-g}{r} \cdots g + 2\frac{h-g}{r}\right), \ldots$$

$$\ldots, \left(g + \lambda\frac{h-g}{r} \cdots g + (\lambda+1)\frac{h-g}{r}\right), \ \ldots, \left(g + (r-1)\frac{h-g}{r} \cdots h\right)$$

die Darstellungen

$$\varphi(u) = \varphi\left(g + \lambda\frac{h-g}{r}\right) + \varepsilon_r \vartheta_\lambda(u), \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

wo ε_r eine positive Konstante bezeichnet, deren Bedeutung sogleich angegeben werden wird, und wo die Funktionen $\vartheta_\lambda(u)$ den Ungleichheiten

$$|\,\vartheta_\lambda(u)\,| \leqq 1$$

genügen. Alsdann ist, wenn für u zwei Werte u_1, u_2 gewählt werden, die dem Intervalle $\left(g \ldots \lambda\frac{h-g}{r}\right) \ldots \left(g + (\lambda+1)\frac{h-g}{r}\right)$ angehören,

$$|\,\varphi(u_2) - \varphi(u_1)\,| = \varepsilon_r \cdot |\,\vartheta_\lambda(u_2) - \vartheta_\lambda(u_1)\,| \leq 2\varepsilon_r,$$

sodafs für ε_r die Hälfte der gröfsten Schwankung unter den Schwankungen in den r Intervallen gewählt werden darf.

Hieraus folgt die Gleichung:

$$\int\limits_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)du = \sum_{\lambda=0}^{r-1} \varphi\left(g + \lambda\frac{h-g}{r}\right) \int\limits_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)u \cdot du$$

$$+ \varepsilon_r \cdot \sum_{\lambda=0}^{r-1} \int\limits_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)u \cdot \vartheta_\lambda(u)du.$$

In der zweiten Summe ist, da der Integrand, abgesehen vom Vorzeichen, niemals gröfser als 1 ist, jedes der r Integrale kleiner als das Integrationsintervall, also kleiner als $\frac{h-g}{r}$; folglich ist der absolute Betrag der zweiten Summe kleiner als $h - g$. Bedeutet ferner M das Maximum des absoluten Betrages von $\varphi(u)$ in dem Intervall $(g \ldots h)$, so ist der absolute Betrag der ersten Summe kleiner als

$$M \cdot \sum_{\lambda=0}^{r-1} \left| \int\limits_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)u\,du \right|$$

$$= M \cdot \sum_{\lambda=0}^{r=1} \frac{1}{2n+1} \left| \cos(2n+1)\left(g+\lambda\frac{h-g}{r}\right) - \cos(2n+1)\left(g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}\right) \right|,$$

also a fortiori kleiner als

$$M \cdot \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{2}{2n+1} = M \cdot \frac{2r}{2n+1}.$$

Demnach besteht für jeden Wert von r die Ungleichheit:

$$\left| \int\limits_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)du \right| < M \cdot \frac{2r}{2n+1} + \varepsilon_r(h-g).$$

Nunmehr soll, bei gegebenem Wert von $2n+1$, für r diejenige positive ganze Zahl w gewählt werden, die der Zahl $\sqrt{2n+1}$ unmittelbar vorhergeht, sodaſs also

$$\sqrt{2n+1} - 1 \leqq w < \sqrt{2n+1}$$

wird. Alsdann ist

$$\left| \int_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)\,du \right| < \frac{2M}{\sqrt{2n+1}} + \varepsilon_w \cdot (h-g),$$

und diese Formel gilt für jeden Wert von n. Läſst man jetzt n über alle Grenzen wachsen, so nähert sich der Ausdruck

$$\frac{2M}{\sqrt{2n+1}} + \varepsilon_w \cdot (h-g)$$

der Grenze Null, denn es ist nach dem in Nr. 3 bewiesenen Theorem

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_w = 0\,.$$

Mithin besteht die Gleichung:

$$\text{(L)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)\,du = 0\,.$$

5. Es ist nützlich, die vorhergehende Untersuchung geometrisch zu deuten.

Die zu der Gleichung

$$v = \sin(2n+1)u$$

gehörige Kurve besteht aus Wellen der Länge $\frac{2\pi}{2n+1}$, bei denen Berg und Thal auf entgegengesetzten Seiten der u-Achse liegen und immer gleich groſs, nämlich gleich $\frac{2}{2n+1}$, sind. Berg und Thal liefern daher bei der Integration zusammen immer den Beitrag Null zur Area, und es kann höchstens eine, positiv oder negativ zu nehmende, Fläche vom Inhalte $\frac{2}{2n+1}$ übrig bleiben. Aus diesem Grunde ist

$$\left| \int_{g+\lambda\frac{h-g}{r}}^{g+(\lambda+1)\frac{h-g}{r}} \sin(2n+1)u\,du \right| < \frac{2}{2n+1}\,.$$

Was aber das Integral

$$\int_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)\,du$$

betrifft, so wird durch die Einteilung des Intervalles $(g \ldots h)$ in eine grofse Anzahl r kleiner Teilintervalle erreicht, dafs die Funktion $\varphi(u)$ in jedem von ihnen höchstens um den Betrag $2\varepsilon_r$ schwankt, also nahezu konstant ist; der Fehler, den man begeht, wenn man $\varphi(u)$ darin als konstant ansieht, ist mithin kleiner als $\varepsilon_r(h-g)$, kann also durch Vergröfserung von r beliebig klein gemacht werden. Sieht man daher $\varphi(u)$ für jedes Teilintervall als konstant an, so erhält man ein Integral der zuerst betrachteten Form. Indem man jetzt r so wählt, dafs es zwar absolut sehr grofs, aber doch klein gegen $2n+1$ ist, bewirkt man, dafs auf jedes der Teilintervalle, so klein sie auch sind, dennoch sehr viele Wellen fallen, bei denen Berg und Thal sich gegenseitig vernichtende Beiträge zum Integral liefern. So kommt es, dafs jedes Teilintervall nur einen so kleinen Beitrag zum Integral liefert, dafs auch die Summe von r solchen Beiträgen noch eine sehr kleine Gröfse, nämlich kleiner als $M \cdot \frac{2r}{2n+1}$, ist. Auf diese Weise gewinnt man eine klare Einsicht in den Prozefs, der zur Folge hat, dafs der Wert des Integrals

$$\int_g^h \sin(2n+1)u \cdot \varphi(u)du$$

für wachsende Werte von n immer kleiner und kleiner wird.

6. Wenn die Funktion $F(u)$ in dem Intervall $u = (g \ldots h)$ *stetig* ist, so gilt dasselbe von der Funktion

$$\varphi(u) = \frac{F(u)}{\sin u},$$

solange $\sin u$ von Null verschieden ist. Mithin gilt die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_g^h F(u) \frac{\sin(2n+1)}{\sin u} du = 0,$$

wenn entweder $0 < g < h < \pi$ oder $-\pi < g < h < 0$ ist.

Im Besonderen sei $F(u) = 1$. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \int_g^h \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = 0,$$

folglich wird

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \lim_{n=\infty} \int_0^{\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du,$$

wo das Zeichen $\pm$ gilt, jenachdem h dem Innern des Intervalles

$(0 \ldots \pi)$ oder $(-\pi \ldots 0)$ angehört. Nun ist aber nach einer schon benutzten Formel:

$$\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} = 1 + 2(\cos 2u + \cos 4u + \cdots + \cos 2nu),$$

also

$$\int_0^{\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\, du = \pm\frac{\pi}{2},$$

sodaſs sich schlieſslich die wichtige Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\, du = \pm\frac{\pi}{2}$$

ergiebt.

7. Nach diesen Vorbereitungen soll das Integral

$$\int_0^h F(u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\, du$$

untersucht werden, wo h wieder dem Innern des Intervalles $(0 \ldots \pi)$ oder $(-\pi \ldots 0)$ angehört. Da $\sin u$ für $u = 0$ verschwindet, wird im allgemeinen die Stetigkeit von

$$\frac{F(u)}{\sin u}$$

an dieser Stelle zerstört, sodaſs die Formel (L) nicht mehr unmittelbar angewandt werden kann. Deshalb muſs man dafür sorgen, daſs das Integral in ein solches umgeformt wird, bei dem der Zähler verschwindet, und das geschieht, indem das betrachtete Integral ersetzt wird durch den damit identischen Ausdruck:

$$F(\pm 0)\cdot\int_0^h \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\, du + \int_0^h \sin(2n+1)u\,\frac{F(u)-F(\pm 0)}{\sin u}\, du;$$

das Vorzeichen $\pm$ gilt, jenachdem h positiv oder negativ ist. Geht man jetzt zur Grenze für $n = \infty$ über, so liefert der erste Term nach Nr. **6** den Beitrag

$$\pm\frac{\pi}{2}F(\pm 0),$$

während der zweite nach der Gleichung (L) den Beitrag Null ergiebt, sobald

$$\frac{F(u)-F(\pm 0)}{\sin u} = \frac{F(u)-F(\pm 0)}{u}\cdot\frac{u}{\sin u}$$

in dem Intervall $u = (0 \dots h)$ stetig ist. Da der zweite Faktor diese Eigenschaft bereits besitzt, mufs

$$\frac{F(u) - F(\pm 0)}{u}$$

selbst für $u = 0$ stetig sein, d. h. die Funktion $F(u)$ mufs eine bestimmte endliche Ableitung $F'(\pm 0)$ besitzen. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so gilt die Gleichung:

$$\text{(D)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^h F(u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \pm \frac{\pi}{2} F(\pm 0).$$

8. Nach Nr. 2 war für $x = (0 \dots 2\pi)$:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{x}{2}}^{0} f(2u + x) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi - \frac{1}{2}x} f(2u + x) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du \cdot$$

Damit man zur Ermittlung von

$$\lim_{n=\infty} S_n(x)$$

die Gleichung (D) anwenden kann, mufs die Funktion $f(2u + x)$ für $u = 0$ eine bestimmte endliche Ableitung besitzen, d. h. *es mufs*

$$f'(x \pm 0)$$

einen bestimmten endlichen Wert haben. Ist aber diese Bedingung für alle Punkte des Intervalles $x = (0 \dots 2\pi)$ erfüllt, so gilt für jeden von ihnen die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \tfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)),$$

sodafs die *Fouriersche Reihe die Funktion $f(x)$ an allen Stellen dieses Intervalles darstellt, an denen diese stetig ist,* an den Unstetigkeitsstellen aber das arithmetische Mittel der beiden Funktionswerte liefert, die sich durch Annäherung von links und rechts ergeben.

Kiel, im Juli 1901.

Periode des Dezimalbruches für $1/p$, wo p eine Primzahl.

Von H. Hertzer in Berlin.

Der Jahresbericht des K. Prinz Heinrichs-Gymnasiums in Berlin 1895 enthält eine Abhandlung „periodische Dezimalbrüche" von Herrn Bork, in welcher eine von Herrn Kefsler in Wiesbaden berechnete Tabelle der Periodenzahlen aller Dezimalbrüche $= 1/p$, wo p eine Primzahl, für p von 1 bis 100000 mitgeteilt ist.

Im folgenden wird eine Fortsetzung dieser Tabelle für p von 100000 bis 112500 in derselben Anordnung gegeben.

Es sei p eine Primzahl, e die Periodenzahl für $1/p$, q ein Divisor von $p-1$, so dafs $q \cdot e = p - 1$ ist, so ergiebt die Tabelle für jedes p den entsprechenden Wert von q. *Nicht* aufgenommen sind in der Tabelle diejenigen p, für welche entweder $q = 1$ oder $q = 2$ ist; diese sind mit Hilfe der unten angegebenen Sätze I und II zu ermitteln.

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
100 109	29	051	47	013	4	769	6	903	3
129	4	081	4	061	9	793	3	981	15
153	3	107	6	077	4	829	3	991	10
169	4	117	4	103	187	841	4	104 009	8
207	3	161	8	121	8	871	6	021	5
213	4	173	4	139	3	881	32	053	12
237	4	207	7	181	5	929	4	089	6
271	10	281	96	191	10	931	15	119	6
279	6	287	3	199	6	967	3	233	3
291	15	293	4	229	3	103 001	4	281	10
297	3	341	9	233	13	049	4	287	13
333	4	347	6	241	6	141	15	347	6
357	4	411	5	293	4	171	19	369	16
393	3	449	6	299	7	183	3	383	27
511	10	467	6	317	4	231	10	399	14
517	4	477	4	329	4	333	4	491	3
549	27	489	8	397	12	357	6	527	9
613	4	561	4	409	8	471	6	551	34
621	65	627	14	433	3	483	18	561	4
649	4	641	44	481	24	511	10	593	3

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
669	3	681	80	523	6	561	10	623	21
693	4	719	6	547	54	567	3	677	6
699	3	749	3	593	7	681	4	681	8
733	4	797	12	643	6	699	9	683	6
853	4	839	6	673	9	703	19	693	28
913	7	917	4	677	4	723	6	707	6
927	81	921	20	679	6	769	8	717	4
931	5	929	8	701	65	801	4	743	9
981	5	977	3	761	4	813	6	773	4
101 009	8	102 001	200	763	6	889	4	779	3
104 789	17	543	3	301	3	751	10	253	4
801	8	627	6	347	14	807	3	271	30
827	6	637	4	379	27	831	42	301	7
851	3	657	3	401	20	841	16	337	3
891	5	661	5	413	4	843	6	409	22
933	74	663	3	421	3	849	4	539	7
105 173	4	669	3	499	3	891	5	581	5
199	6	681	10	517	4	913	11	593	29
211	9	693	6	529	168	961	10	611	5
251	5	721	10	541	9	110 039	74	637	28
253	14	759	18	553	3	051	5	653	4
277	12	801	80	571	3	083	6	751	10
323	14	867	18	637	4	161	4	773	4
331	3	921	44	649	12	221	11	781	135
361	6	957	4	707	26	237	4	829	3
367	3	961	140	709	3	281	120	847	21
373	12	963	6	769	66	321	4	893	4
379	3	107 077	12	791	10	359	6	959	14
397	4	101	3	793	3	419	3	973	12
517	12	197	6	881	16	431	54	997	6
529	24	209	24	917	4	437	4	112 069	11
557	4	251	165	929	4	441	4	087	3
601	4	323	6	943	3	477	142	237	6
613	4	339	7	949	3	479	6	241	8
649	4	441	8	961	24	491	15	249	8
667	6	453	4	967	11	503	7	253	4
673	3	507	14	109 013	4	557	4	261	3
733	6	563	6	037	4	567	59	279	6
751	6	581	5	097	13	629	7	297	3
761	4	603	22	103	7	641	10	327	3
769	4	641	60	121	8	651	5	337	7
817	3	647	7	133	4	681	8	339	9
907	6	671	6	141	3	729	8	361	4
929	4	693	4	169	8	813	4	397	4

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
967	3	717	4	201	28	849	4		
997	4	761	10	253	4	863	9		
106 031	46	773	4	267	6	881	44		
087	3	837	4	357	12	899	3		
121	4	843	14	387	6	917	6		
123	6	857	3	441	12	921	4		
181	5	881	4	453	12	933	4		
213	6	108 007	3	471	10	969	4		
261	23	011	5	481	14	111 043	18		
277	4	013	6	517	836	049	8		
331	5	037	4	537	7	091	5		
363	6	079	6	541	5	109	3		
391	10	089	4	567	27	121	4		
411	3	161	8	579	7	149	751		
441	8	193	3	663	3	217	21		
453	36	223	3	741	3	229	13		

Für obige Tabelle waren die Werte q für 1070 Primzahlen zu berechnen und zwar 373 für $q = 1$; 313 für $q = 2$ und 384 für $q > 2$.

Da einige der bekannten Sätze für q nicht ganz richtig angegeben werden, so sollen dieselben hier übersichtlich wiederholt werden.

I. Die Zahl q ist *ungerade* für

$$p = 40n + 7,\ 11,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 29,\ 33 \quad \text{(eine dieser Formen).}$$

II. Die Zahl 2 ist ein Faktor von q (10 quadratischer Rest von p) für

$$p = 40n + 1,\ 3,\ 9,\ 13,\ 27,\ 31,\ 37,\ 39.$$

III. Die Zahl 4 ist ein Faktor von q (10 biquadratischer Rest von p) für

$$p = 40n + 1,\ 9,\ 13,\ 37;$$

$$p = a^2 + b^2; \quad a \equiv 1 \pmod{4}, \quad \text{also} \quad b \equiv 0 \pmod{2},$$

wenn eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist:

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad b \equiv 0 \pmod{40}, \\ &(2) \quad a \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{und} \quad b - 4 \equiv 0 \pmod{8} \end{aligned}\right\} p = 40n + 1,\ 9.$$

$$\left.\begin{aligned} &(3) \quad b + a \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{und} \quad b - 2 \equiv 0 \pmod{8} \\ &(4) \quad b - a \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{und} \quad b + 2 \equiv 0 \pmod{8} \end{aligned}\right\} p = 40n + 13,\ 37.$$

IV. Die Zahl 8 ist ein Faktor von q (10 Rest 8ter Potenz von p) für

$$p = 40n + 1,\ 9;$$

$$p = c^2 + 2d^2; \quad c \equiv 1 \pmod{4}, \quad \text{also} \quad d \equiv 0 \pmod{2},$$

wenn eine der folgenden 2 Bedingungen erfüllt ist:

(1) aufser III_1 noch $a \cdot c \cdot (c^2 - d^2) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}b + \frac{1}{4}(a-1)}$ (mod. 5),

(2) aufser III_2 noch $b \cdot c \cdot (c^2 - d^2) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}(b-4) + \frac{1}{4}(a-1)}$ (mod. 5).

V. Die Zahl 3 ist ein Faktor von q (10 kubischer Rest von p) für

$$p = 6n + 1;$$
$$p = \alpha^2 + 3\beta^2,$$

wenn entweder α oder $\beta \equiv 0$ (mod. 5).

Bemerkung 1. Reuschle giebt in einem Programm des K. Gymnasiums in Stuttgart, 1856 nicht ganz ausreichend richtig an, dafs für III eine der 4 Bedingungen
b oder $a(b \pm 4)$ oder $(b+a)(b-a)$ oder $(b-a)(b+2) \equiv 0$ (mod. 40) erfüllt sein müsse.

Bemerkung 2. C. G. J. Jacobi teilt in einem Briefe an Reuschle vom Jahre 1846 — im obigen Programme abgedruckt — die Bedingungen unter IV. mit, fügt aber hinzu, dafs aufserdem die Bedingung

$$d(c^2 + d^2) \equiv 0 \text{ (mod. 5)}$$

erfüllt sein müsse. Er hat übersehen, dafs dieser Bedingung immer genügt wird.

Berlin, den 11. Februar 1901.

Zwei Briefe von C. G. J. Jacobi, die in den gesammelten Werken desselben nicht abgedruckt sind.

Mitgeteilt von E. LAMPE in Berlin.

In dem vorangehenden Aufsatze ist von Herrn Hertzer auf Jacobische Mitteilungen an Reuschle Bezug genommen. Da dieselben in den gesammelten Werken Jacobis nicht enthalten sind, so hielt die Redaktion es für angemessen, die betreffenden Briefe hier von neuem abzudrucken. Dieselben sind veröffentlicht in dem „Programm zum Schlusse des Schuljahres 1855/56 am Königlichen Gymnasium zu Stuttgart, den 22. September 1856“. Dieses Programm bringt auf S. 1—61 die „Mathematische Abhandlung des Professors Reuschle, enthaltend: Neue zahlentheoretische Tabellen samt einer dieselben betreffenden Korrespondenz mit dem verewigten C. G. J. Jacobi, Professor an der Universität und Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, geboren 1804 zu Potsdam, gestorben 1851 zu Berlin“.

Das uns zur Einsicht überlassene Exemplar in Quartformat ist Eigentum des Herrn Hertzer. Für den Hinweis auf diese Schrift und die damit gegebene Anregung zum Abdruck sprechen wir ihm an dieser Stelle unseren verbindlichen Dank aus.

Unter dem 12. November 1846 hatte sich Reuschle an Jacobi mit einem längeren Briefe gewandt, der auf S. 4—9 der Programmabhandlung auszugsweise abgedruckt ist. Zum Verständnis der Jacobischen Antwort lassen wir folgende Stelle dieses Briefes (S. 6 unter Nr. 5) folgen:

Aufser dem, was die Theorie der quadratischen, kubischen und biquadratischen Reste über die Hauptexponenten von 10 nach den auf einander folgenden Primzahlen an die Hand gab, war ich bei Berechnung meiner Tafel auf die Entwicklung der Reste selbst angewiesen, die übrigens, da man zu dem Behuf keineswegs ihre Aufeinanderfolge zu kennen braucht, mit Hilfe von Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen ziemlich rasch von statten geht. Für die weitere Fortsetzung wären die Kennzeichen für die 5ten, 7ten, 8ten und 9ten

Reste höchst wünschenswert; denn die Primzahlen von den Formen $10n+1$, $14n+1$, $8n+1$, $18n+1$ machen teils durch ihr häufiges Vorkommen, teils durch die hohen Potenzen von 10, bis zu welchen man rechnen mufs, die meiste Mühe. Daher sehe ich mit Spannung der Veröffentlichung Ihrer Ergebnisse über die 5ten und 8ten Reste entgegen, worüber Sie im 19. Bande des Crelleschen Journals einige Andeutungen gegeben haben.

Auf diesen Brief erfolgte die

Antwort Jacobis vom 13. Dez. 1846.

Ich mufs Sie schon um Entschuldigung bitten, dafs ich es so lange habe anstehen lassen, auf Ihren inhaltreichen und sehr interessanten Brief zu antworten. Ich habe aber seitdem mich wenig mit ernsthaften Dingen beschäftigen können und insbesondere Scheu getragen, meine arithmetischen Papiere vorzukramen, weil diese mich gar zu sehr in Anspruch nehmen. Ich will nun aber meinen ergebensten Dank nicht länger aufschieben und Ihnen das Kriterium, ob 10 Rest 8ter Potenz ist, schicken, welches Sie, wie es scheint, wissen wollen.

Es sei $p = aa + bb = cc + 2dd$, $a \equiv c \equiv 1 \pmod{4}$, so sind diese Kriterien

$$d(c^2 + d^2) \equiv 0 \pmod{5},$$

ferner: I. wenn b durch 8 teilbar ist,

$$b \equiv 0 \pmod{5}, \quad ac(cc - dd) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}b + \frac{1}{4}(a-1)} \pmod{5};$$

II. wenn $b - 4$ durch 8 teilbar ist,

$$a \equiv 0 \pmod{5}, \quad bc(cc - dd) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}(b-4) + \frac{1}{4}(a-1)} \pmod{5}.$$

Um die Kriterien in Bezug auf die 5ten Potenzen anzugeben, mufs man die p in die beiden entsprechenden Faktoren zerlegen können, die in der Kreisteilung vorkommen, und von denen Legendre ausführlich gehandelt hat. Oder noch besser ist es und zugleich zu anderen Dingen gut, wenn man p in die entsprechenden 4 komplexen Faktoren zerfällen kann. Kummer hat diese für alle p unter 1000 angegeben. Man kann viele solche Zerfällungen durch Probieren finden, indem man versucht, wann $\frac{x^5 \pm y^5}{x \pm y}$ eine Primzahl wird; nennt man f die Primzahlen, für welche die Zerfällung gefunden ist, so kann man auch sogleich für eine neue Primzahl g die Zerfällung finden, wenn $\frac{x^5 \pm y^5}{x \pm y}$ aufser g nur Primzahlen f enthält, wobei also die Kummersche Arbeit sehr zu statten kommen wird. Mit den Resten 9ter Ordnung habe ich mich noch gar nicht beschäftigt; die Reste 7ter Ordnung

würden ebenfalls die Zerfällung in 6 komplexe Faktoren oder in die Funktionen $\psi(\alpha)$ der Kreisteilung erfordern. Für die Zerfällung in 4 komplexe Faktoren, die aus den 8ten oder 12ten Wurzeln bestehen, habe ich einige ausgerechnete Tabellen. Aber für 5te Wurzeln wäre ihre weitere Fortsetzung, als sie von Kummer gegeben sind, für die Prüfung der allgemeinen Reziprozitätsgesetze interessant.

Mit etc.

C. G. J. Jacobi.

Schreiben Jacobis an den Verfasser vom 15. Nov. 1850.[1])

Als ich jetzt mitten unter dem Drange der verschiedensten Arbeiten an die Publikation Ihrer Tabellen gehen wollte und deshalb den Gegenstand näher ins Auge faſste, sind mir folgende Gedanken gekommen.

Mir schien es nämlich zweckmäſsig, daſs Sie selbst so hübsche und mühevolle Arbeiten mit einer Abhandlung begleitet in die Welt senden. Was darin zu sagen wäre, würden Sie freilich selbst am besten zu sagen wissen. Es wäre mir aber schon interessant, wenn Sie auch nur das, was in der *Introductio* zu meinem *Canon Arithmeticus* auf die Burkardtische Tafel bezogen wird, jetzt in Bezug auf Ihre Tafel umarbeiten wollten. Dies schien mir selbst so interessant, daſs ich einen Augenblick daran dachte, die ganze *Introductio* so umgearbeitet in Crelle abdrucken zu lassen. Aber ich sah bald, daſs ich bei den zahllosen anderen Arbeiten, die mich bedrängen, nie dazu kommen würde. Sie könnten dann noch Ihre Wahrscheinlichkeitssätze und vielleicht noch einige andere an der Tafel prüfen.

Sie hätten also zunächst 1) die Tafel noch in einer anderen Ordnung zu schreiben oder vielmehr in mehrere Tabellen zu zerlegen, welche immer kleiner werden, bis sie zuletzt nur einzelne Primzahlen enthalten. Diese Tabellen beziehen sich auf die einzelnen Werte von n', so daſs mit $n' = 1$ oder denjenigen Primzahlen angefangen würde, für welche 10 primitive Wurzel ist. Es früge sich aber, ob Sie, wie ich es gethan, die Tabellen sondern wollen, für welche $\frac{p-1}{n'}$ gerade oder ungerade ist, weil für den letzteren Fall für -10 sich das n' auf seinen halben Wert reduziert, oder ob Sie vielleicht in einer und derselben Tabelle durch ein beigesetztes Sternchen die Primzahlen unterscheiden wollen, für welche $\frac{p-1}{n'}$ ungerade ist. Die Anordnung dieser Tabellen, wie sie S. VI der *Introductio* gegeben ist, scheint mir ganz

[1]) Nach meiner Zusammenkunft mit ihm und nicht lange vor seiner tödlichen Erkrankung geschrieben. (Reuschle.)

anmutig und übersichtlich, und die Raumverschwendung ist nicht so grofs, ob es gleich bei dem gröfseren Umfang Ihrer Tafel mehr ausmacht. Die Abzählungen würde ich aber keineswegs auslassen und sie auch besonders für die Fälle eines geraden oder ungeraden $\frac{p-1}{n}$ notieren.[1])

Ich glaube, dafs es auch 2) von Interesse wäre, wenn Sie aus Ihrer Tafel noch andere zögen, aus welchen sich ergäbe, von welchen Primzahlen 10 Rest einer gegebenen λten Potenz ist, auch mit den zugehörigen Abzählungen, worüber wir schon, glaube ich, gesprochen haben. Für $\lambda = 3, 4, 8$ gäben Sie dann das Verzeichnis in einer gröfseren Ausdehnung.

Dann aber wäre es wohl gut, wenn Sie 3) die Tafel innerhalb der 10000 auch auf die Potenzen der Primzahlen ausdehnten, wie ich es im Canon gethan.

Ferner ist mir beigefallen, ob Sie nicht mit der Publikation der Tafel für $\lambda = 3, 4, 8$ warten wollen, bis Sie das Zahlenheft von Dr. Rosenhain haben, um dann vor dieser Tafel die betreffenden Restensätze, so weit dies dazu nötig, voranzuschicken. Es wäre dies für Sie zugleich die beste Gelegenheit, sich in diese neue Theorie hineinzuarbeiten. Es wäre gut, wenn Sie noch die Zerfällungen auch für *die* Primzahlen hinzufügten, von welchen 10 nicht biquadratischer, aber quadratischer Rest ist.

Um den Nutzen Ihrer grofsen Tafel zu zeigen, können Sie aus meiner Introductio noch die Methoden hinzufügen, wie man dadurch in vielen Fällen die Tabellen meines Canon berechnen kann. Dieser Canon Arithmeticus ist fast ganz unbekannt geblieben, indem aufser den 50 Exemplaren, die ich verschenkte, nur 30 abgesetzt worden sind; darum eben hielt ich es hauptsächlich für notwendig, dafs durch eine vorgesetzte Abhandlung auf den Wert solcher Tafel aufmerksam gemacht würde.

Zeit haben Sie die Fülle; denn das Crellesche Journal wird teils durch die Anfertigung der Indices für den 40. Band im Druck aufgehalten, teils ist es so besetzt, dafs ich mit meinen notwendigsten Sachen wahrscheinlich gar nicht mehr in den 41. Band hineinkommen werde.

C. G. J. Jacobi.

1) Dies ist natürlich nur verständlich durch Vergleichung der zitierten Introductio zum Canon Arithmeticus. (Reuschle.)

Sur quelques problèmes élémentaires de la Géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions;

Par M. Gino Loria à Gênes.

1. Dans la méthode de la *projection centrale* — qui, entre les procédés particuliers de la Géométrie descriptive, est une des plus employées, après que M. Fiedler lui fit atteindre un si haut degré de perfection — on détermine chaque droite r de l'espace par sa *trace* T sur le *tableau* (plan de projection) et son *point de fuite* I' (projection du point à l'infini de r). Un point P qui n'est pas à l'infini, est d'ordinaire représenté par son image P' et une droite (TI') qui le contient; en supposant par conséquence que T, I', P' soient trois points d'une même droite, on écrit $P \equiv (TI', P')$. Mais il est évident qu'on pourrait bien déterminer la position du point P en donnant, en dehors de sa projection P', un plan $[t\,i']$ qui le contient; dans ce cas, t et i' étant deux droites parallèles, on écrirait $P \equiv [t\,i', P']$. Quoique cette seconde manière de détermination se présente naturellement — je dirais même qu'elle s'impose lorsqu'on a à faire avec des figures composées de plusieurs points situés dans un même plan, par ex. dans la représentation de pyramides (ou prismes) et cônes (ou cylindres) déterminés par leurs bases —, on a l'habitude de n'en parler ou de n'en faire qu'une mention très rapide dans les cours et les traités de Géométrie descriptive, sans doute en considérant que rien n'est plus facile que de passer de l'une à l'autre de ces deux manières de déterminer un point. Mais comme la solution d'un problème qu'on obtient en le réduisant à un autre, est presque toujours (je serais même tenté de supprimer le *presque*) moins simple que la solution directe et que dans une science d'application, comme est celle qui doit son existence à Monge, l'épargne d'une ligne constitue un avantage et représente un progrès, je suis convaincu qu'il est préférable de n'accorder au début la préférence ni à l'une ni à l'autre de ces manières, mais de les retenir toutes les deux pour les employer suivant les cas.

Si l'on accepte ces idées, il est indispensable de donner au moins deux solutions pour tout problème fondamental où entre les données il se

trouve des points, car tout point peut être déterminé de deux manières différentes. Or il est remarquable que, au moins lorsqu'il s'agit de questions projectives, les solutions naissant en supposant les points déterminés de la manière ordinaire, ne sont pas supérieures en élégance et simplicité à celles provenant de l'hypothèse contraire.

Une preuve est offerte par le problème de «déterminer la droite qui joint deux points». Le lecteur en connaît la solution ordinaire, un peu artificieuse dans le concept et (relativement) compliquée dans son exécution sur l'épure. Or si les points donnés sont au contraire déterminés comme il suit (voir Fig. 1e):

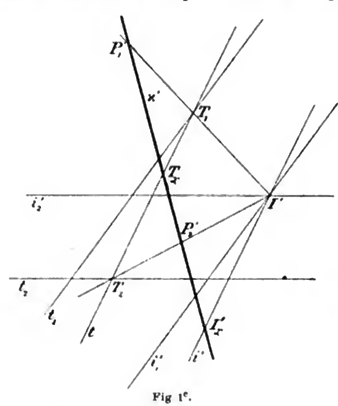


Fig 1e.

$P_1 \equiv [t_1 i_1', P_1']$, $P_2 \equiv [t_2 i_2', P_2']$

la trace T_x et le point de fuite I_x' de la droite qui les joint, peuvent se construire comme il suit. Comme la droite $x \equiv P_1 P_2$ a pour image x' la droite $P_1' P_2'$, pour trouver T_x et I_x' il est suffisant de trouver un plan passant par x. Considérons à cet effet un point quelconque de l'intersection $(T I')$ des deux plans $[t_1 i_1']$ et $[t_2 i_2']$, par ex. son point à l'infini, et joignons-le aux deux points $P_1 P_2$; les droites $P_1 I$ et $P_2 I$ ont comme traces les points T_1 et T_2 ou t_1 et t_2 sont coupées resp. par $P_1' I'$ et $P_2' I'$; elles déterminent un plan dont $t \equiv T_1 T_2$ est la trace et dont la droite de fuite est la parallèle i' tirée par I' à t. Comme ce plan passe par la droite $P_1 P_2$, les points cherchés T_x et I_x' ne sont que les intersections de t et i' avec x'; le problème est ainsi résolu.

Il arrive quelquefois qu'on doit trouver la droite qui joint deux points déterminés de manières différentes; c'est le cas lorsqu'on veut représenter une pyramide ou un cône déterminé par sa base $\Delta \equiv [ti', \Delta']$ et son sommet $V \equiv [TI', V']$. Si par ex. les deux points sont $P \equiv (TI', P')$ et $Q \equiv [ti', Q']$ (Fig. 2e), pour trouver la trace T_x et le point de fuite I_x' de la droite $x \equiv PQ$, sans réduire le problème à un autre, on commence par déterminer — à l'aide d'un plan auxiliaire $[t_1 i_1']$ passant par la droite (TI') — le point N où se coupent la droite (TI') et le plan $[ti']$. La droite NQ aura pour

éléments descriptifs les intersections T_2 et I'_2 de $N'P'$ avec t et i' et déterminera avec la droite NP un plan dont la trace est $TT_2 \equiv t_2$ et la droite de fuite est $I'I'_2 \equiv i'_2$; les intersections de ces droites avec la droite $P'Q'$ seront les points cherchés T_x et I'_x.

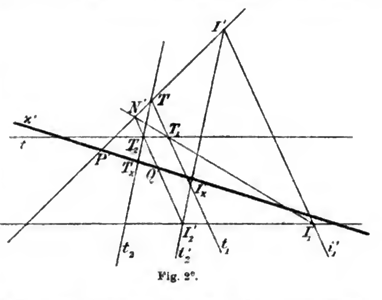


Fig. 2ᵉ.

Il n'est pas plus difficile de trouver le plan qui passe par la droite $r \equiv (TI')$ et le point $P \equiv [ti', P']$ (Fig. 3ᵉ). C'est le plan qui passe par r et par la droite qui joint P au point P_1 où se coupent la droite (TI') et le plan (ti'). Or P_1 se détermine facilement à l'aide d'un plan auxiliaire $[t_1 i'_1]$ passant par (TI'); en tirant après la droite $P'P'_1$ on aura, dans ses intersections

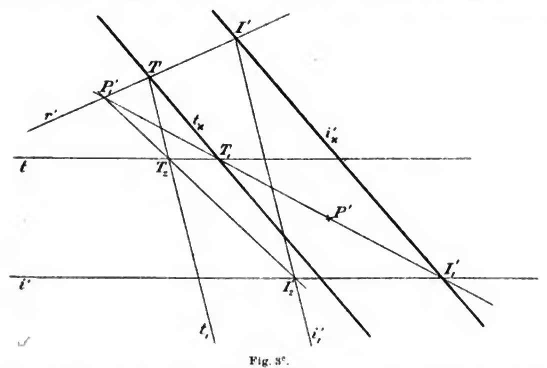


Fig. 3ᵉ.

T_1 et I'_1 avec t et i', les éléments descriptifs de la droite PP_1. Alors les droites TT_1 et $I'I'_1$, qui résultent parallèles entre elles[1]), sont resp. la trace t_x et la droite de fuite i'_x du plan demandé.

1) Si, en effet, on appelle T_2 le point tt_1 et I'_2 le point $i'i'_1$ on trouve:

$$\frac{P'_1 T}{P'_1 I'} = \frac{P'_1 T_2}{P'_1 I'_2} = \frac{P'_1 T_1}{P'_1 I'_1},$$

donc TI' et $T_1 I'_1$ sont deux droites parallèles.

Le nouveau moyen pour déterminer la position des points, dont nous avons parlé, donne une solution directe et facile d'une question qu'on résout d'ordinaire sans élégance et symétrie en combinant la construc-

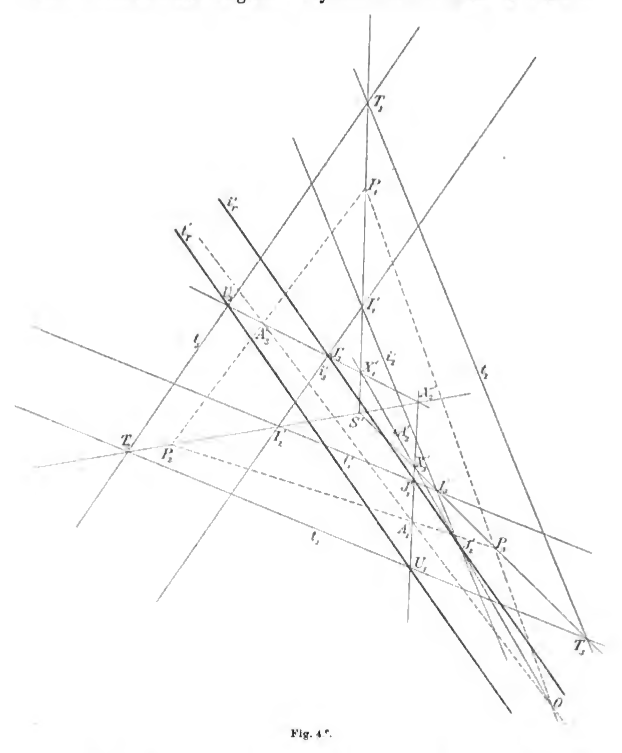


Fig. 4.ª

tion de la droite qui joint deux points à celle du plan qui passe par un point et une droite, c'est-à-dire du problème: «construire le plan passant par trois points donnés». Supposons, en effet, qu'il s'agisse de trouver la trace t_x et la droite de fuite i'_x du plan qui passe par les trois points $A_k \equiv [t_k i'_k,\ A'_k]$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ (Fig. 4.ª). Déterminons les

droites $r_k \equiv (T_k I'_k)$ où se coupent deux à deux les plans $[t_k i'_k]$; leurs projections passent évidemment par un même point S', qui est la projection de l'intersection S de ces trois plans. Soit X_k l'intersection du plan σ que l'on cherche avec la droite r_k. Si nous considérons les trois points A_1, X_2, X_3, ils appartiennent à l'intersection du plan $\sigma \equiv A_1 A_2 A_3$ avec le plan $[t_1 i'_1]$; donc ils se trouvent sur une même droite, et la même chose arrive aux points A'_1, X'_2, X'_3. Pour des raisons semblables A'_2, X'_3, X'_1 se trouvent sur une seconde droite et A'_3, X'_1, X'_2 sur une troisième. Il s'ensuit que le triangle $X'_1 X'_2 X'_3$ est circonscrit au triangle $A'_1 A'_2 A'_3$ et que ses sommets sont situés sur les droites r'_1, r'_2, r'_3. Or on sait que si un triangle $P_1 P_2 P_3$ se déforme de manière que ses sommets parcourent des droites r'_1, r'_2, r'_3 passant par un même point S', tandis que deux de ses côtés $P_1 P_2$ et $P_2 P_3$ passent par deux points fixes A'_3 et A'_1, son troisième côté tournera autour d'un troisième point fixe O de la droite $A'_1 A'_3$. Pour trouver ce point il suffit de considérer une position quelconque du triangle variable. Cela prouve que si l'on mène la droite $O A'_2$, ses intersections avec r'_1 et r'_3 seront les points inconnus X'_1 et X'_3; le troisième X'_2 est celui par lequel passent les droites $X'_1 A'_3$, $X'_3 A'_1$, r'_2. La droite $X'_2 X'_3$ coupe t_1 et i'_1 aux points U_1 et J'_1, trace et point de fuite de la droite $X_2 X_3$. D'une manière analogue on détermine les points U_2 et J'_2, U_3 et J'_3. Alors U_1, U_2, U_3 appartiennent à la trace t_x, tandis que J'_1, J'_2, J'_3 se trouvent sur la droite de fuite i'_x du plan σ cherché. Ce plan est par conséquent déterminé. La construction que nous venons d'exposer donne lieu à un assez grand nombre de vérifications: car, non seulement U_1, U_2, U_3 doivent tomber sur une droite et la même chose doit arriver pour les points J'_1, J'_2 J'_3, mais ces deux droites doivent résulter parallèles entre elles.

2. Les remarques que j'ai faites au début de cet article, peuvent s'appliquer, avec des modifications convenables, à l'espace à quatre (ou à n) dimensions, lorsqu'on applique la méthode de la projection centrale généralisée, telle qu'elle a été imaginée et développée par M. Veronese il y a vingt ans.[1]) Pour en résumer les concepts fondamentaux nous indiquerons l'espace à quatre dimensions considéré par la lettre $\mathfrak{S}$, par les lettres latines majuscules ses ∞^4 *points* et par les lettres grecques majuscules ses ∞^4 *espaces* à trois dimensions, par les lettres latines minuscules ses ∞^6 *droites* et par les lettres grecques minuscules ses ∞^6 *plans.* Un espace (sous-entendu «à trois dimensions») Σ de $\mathfrak{S}$ est représenté par sa trace τ (sur notre espace, considéré comme *espace de*

1) *Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni* (Atti del R. Ist. Veneto, 5a Serie, VIII, 1882).

représentation ou tableau) et son plan de fuite ι', τ et ι' étant deux plans parallèles; on écrit en conséquence $\Sigma \equiv \{\tau\iota'\}$. Un plan π est d'une manière semblable représenté par sa trace t et sa droite de fuite i', t et i' étant deux droites parallèles: on exprime cela en écrivant $\pi \equiv [ti']$. Enfin une droite r est déterminée par sa trace T et son point de fuite; on a de la sorte $r \equiv (TI')$. Pour déterminer la position d'un point P il ne suffit pas de donner sa projection P', mais il faut encore connaître un espace, un plan ou une droite qui le contient. Suivant que l'on se sert de ces trois éléments auxiliaires on écrit $P \equiv \{\tau\iota', P'\}$, $P \equiv [ti', P']$ ou bien $P \equiv (TI', P')$, en supposant que dans le second cas P' se trouve sur le plan des droites parallèles t et i' et dans le troisième que T, I', P' soient trois points d'une même droite. M. Veronese a donné la préférence à cette troisième manière de détermination; nous allons employer la première, en laissant à nos lecteurs de développer la deuxième, dont les droits à être considérés ne peuvent être méconnus.[1])

Dans la géométrie descriptive de l'espace à quatre dimensions huit problèmes de position jouent le rôle de *fondamentaux*; il sont par couples corrélatifs, comme il résulte du tableau suivant:

1. Trouver la droite qui passe par deux points donnés.
2. Trouver le plan où se coupent deux espaces donnés.
3. Trouver le plan qui passe par un point et une droite donnés.
4. Trouver la droite où se coupent un espace et un plan donnés.
5. Trouver l'espace qui passe par un point et un plan donnés.
6. Trouver le point où se coupent un espace et une droite donnés.
7. Trouver l'espace déterminé par deux droites.
8. Trouver le point où se coupent deux plans.

Nous allons avant tout exposer les solutions de ceux entre ces problèmes où il y a des points entre les données, en supposant de les déterminer par le premier des trois moyens indiqués plus haut.

a) *Déterminer la trace T_x et le point de fuite I'_x de la droite x qui joint les deux points:* $P_1 \equiv \{\tau_1\iota'_1, P'_1\}$ et $P_2 \equiv \{\tau_2\iota'_2, P'_2\}$.

Solution. Pour faciliter la tâche du lecteur qui nous suit nous nous servirons, dans cette question et dans les suivantes, de figures schématiques; dans la Fig. 5e on trouvera indiqués les données et les constructions relatives au problème qui nous occupe maintenant.

Comme l'image x' de la droite cherchée n'est que la droite qui passe par P'_1 et P'_2, pour résoudre le problème il suffit de trouver un

1) Il va sans dire que rien n'est plus facile que de passer d'une quelconque aux autres de ces manières.

espace qui contient la droite $P_1 P_2$; on peut, par ex., avoir recours à celui qui passe par la droite à l'infini du plan $\pi \equiv [t i']$ où se coupent les

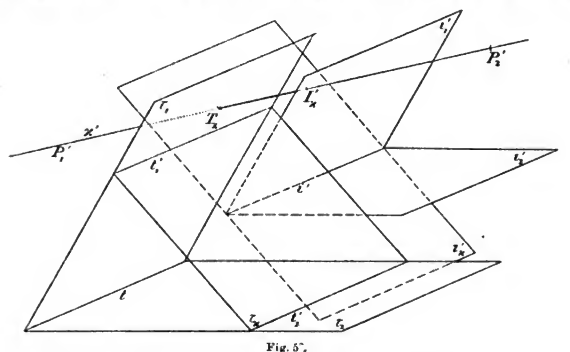


Fig. 5ᵛ.

deux espaces donnés $\{\tau_1 \iota_1'\}$ et $\{\tau_2 \iota_2'\}$. Pour le déterminer, remarquons que cet espace auxiliaire passe par le plan $\pi_1 \equiv P_1 i$; or ce plan, dont

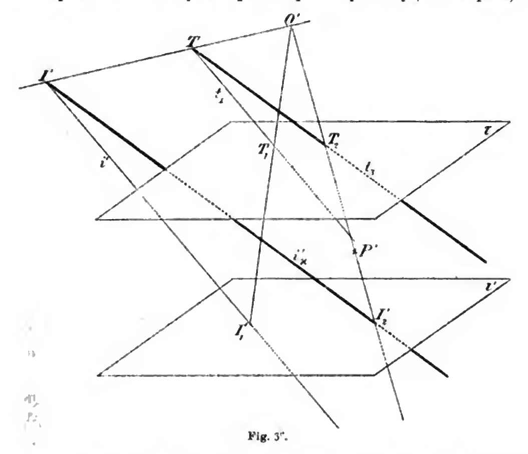


Fig. 3ᵛ.

la projection est le plan $P_1' i'$, passant par le point P_1 et par la droite i de l'espace $\{\tau_1 \iota_1'\}$, appartient à cet espace, sa trace se trouve en con-

séquence sur τ_1 et sa droite de fuite sur $P_1' i_1'$; sa droite de fuite est donc i' et sa trace t_1 l'intersection des plans τ_1 et $P_1' i'$. L'espace auxiliaire passe aussi par le plan $\pi_2 \equiv P_2 i$, dont la droite de fuite est i' et dont la trace est l'intersection des plans τ_2 et $P_2' i$; cet espace a donc comme trace τ_x le plan déterminé par les droites (toutes les deux

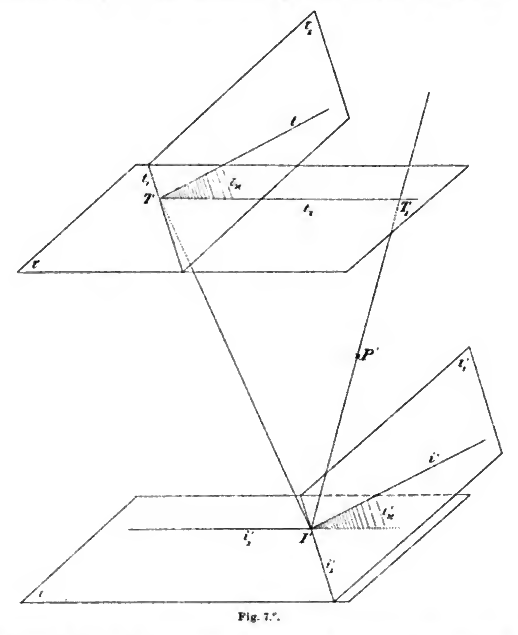


Fig. 7.^{a}.

parallèles à i') t_1 et t_2, et comme plan de fuite ι_x' le plan mené par i' parallèlement à τ_x. Alors T_x et I_x' ne sont que les intersections des deux plans τ_x et ι_x' avec la droite $P_1' P_2'$.

b) *Déterminer la trace t_x et la droite de fuite i_x' du plan ξ qui passe par le point $P \equiv \{\tau\iota', P'\}$ et par la droite $r \equiv (TI')$* (Fig. 6.^{a}).

Solution. Commençons par trouver le point Q où se coupent la droite (TI') et l'espace $\{\tau\iota'\}$.[1] A cet effet menons par cette droite

1) C'est le 6e des problèmes dont ci-dessus je fis l'énumération.

un plan arbitraire π; il aura comme éléments descriptifs deux droites t et i' parallèles entre elles et passant resp. par T et I'; ce plan et l'espace $\{\tau\iota'\}$ se coupent dans une droite[1]) qui a comme trace le point $T_1 \equiv t\tau$ et comme point de fuite $I_1' \equiv i'\iota'$; Q' est alors l'intersection des droites TI' et $T_1 I_1'$. Le plan cherché, passant par r et P, contient aussi la droite PQ, dont la trace et le point de fuite ne sont que les intersections T_2 et I_2' de la droite $P'Q'$ avec les plans τ et ι'. Les deux droites TT_2 et $I'I_2'$ sont les droites cherchées t_x et i_x'; elles résultent (comme il devait arriver) parallèles entre elles, car on a

$$\frac{Q'T}{Q'I'} = \frac{Q'T_1}{Q'I_1'} = \frac{Q'T_2}{Q'I_2'}.$$

c) *Déterminer la trace τ_x et le plan de fuite ι_x' de l'espace Ξ qui passe par le point $P \equiv \{\tau\iota', P'\}$ et par le plan $\pi \equiv [ti']$* (Fig. 7°).

Solution. D'une manière analogue à celle employée dans le problème précédent, commençons par trouver la droite r où le plan $[ti']$ coupe l'espace $\{\tau\iota'\}$; elle a comme trace le point $T \equiv t\tau$ et comme point de fuite $I' \equiv i\iota'$. Cette droite et le point P déterminent un plan σ appartenant à l'espace cherché; ce plan contient aussi la parallèle menée de P à r, dont le point de fuite est I' et dont la trace est l'intersection T_1 de la droite $P'I'$ et du plan τ; σ a donc comme trace $TT_1 \equiv t_2$ et comme droite de fuite la parallèle i_2' menée de I' a t_2. Comme l'espace cherché contient les deux plans $\pi \equiv [ti']$ et $\sigma \equiv [t_2 i_2']$, sa trace τ_x est le plan tt_2 et son plan de fuite ι_x' est $i'i_2'$; et le problème est résolu.

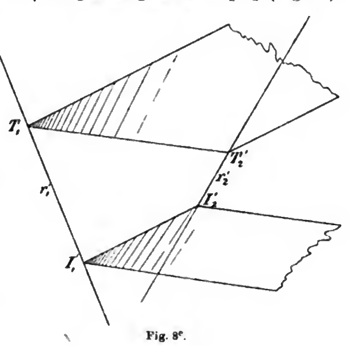


Fig. 8°.

Remarquons enfin que nous venons de résoudre les problèmes fondamentaux de position qui, dans notre liste, portent les n°s 1, 3, 5; leurs corrélatifs ne présentent aucune difficulté; comme les solutions des n°s 4 et 6 ont été déjà signalées incidemment, il nous reste, pour épuiser notre sujet, à dire quelques mots sur les deux derniers.

Trouver la trace τ_x et le plan de fuite ι_x' de l'espace déterminé par les droites $r_1 \equiv (T_1 I_1')$ et $r_2 \equiv (T_2 I_2')$ (Fig. 8°).

1) Voir le 4° des mêmes problèmes.

Les deux plans cherchés doivent être parallèles et passer, l'un par la droite $T_1 T_2$ et l'autre par la droite $I_1' I_2'$; le premier est donc le plan mené par la droite $T_1 T_2$ parallèlement à la droite $I_1' I_2'$, tandis que le second est le plan mené par la droite $I_1' I_2'$ parallèlement à $T_1 T_2$.

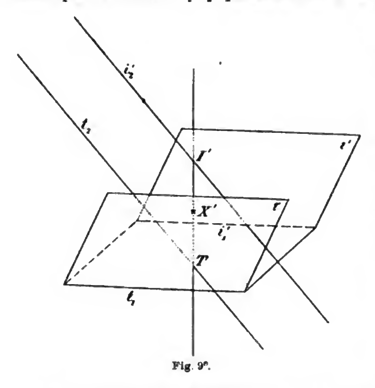


Fig. 9e.

Trouver le point X où se coupent les deux plans $\pi_1 \equiv [t_1\, i_1']$ *et* $\pi_2 \equiv [t_2\, i_2']$ (Fig. 9e).

Par le plan π_1 menons un espace arbitraire $\{\tau\, \iota'\}$; il coupe le plan π_2 dans la droite dont les éléments descriptifs sont $T \equiv \tau t_2$ et $I' \equiv \iota' i_2'$. La droite $T I'$ coupe le plan $t_1 i_1'$ dans le point X', de sorte que l'on a $X \equiv \{\tau \iota', X'\}$.

Le lecteur verra facilement que la construction de l'espace passant par quatre points peut être faite d'une manière analogue à celle du plan passant par trois points, exposée à la fin du Nr. **1**.

Gênes, Août 1901.

Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäſsigsten Gestalt der Geschoſsspitzen.

Von Adolf Kneser in Berlin.

Eins der ältesten Probleme der Variationsrechnung, dasjenige nämlich, welches man als das Problem der Fläche kleinsten Widerstandes zu bezeichnen pflegt, findet eine interessante praktische Anwendung bei der Frage nach der zweckmäſsigsten Gestalt der Geschoſsspitzen. Die gewöhnlich in der Variationsrechnung behandelte Aufgabe verlangt, den Meridian der Rotationsfläche zu finden, welche in einer Flüssigkeit fortschreitend bei gewissen Annahmen über die Druckwirkung den kleinsten Widerstand erleidet. Wenn es sich aber um die Geschoſsspitzen handelt, muſs man, wie von neueren Autoren[1]) hervorgehoben wird, den Widerstand der Stirnfläche, d. h. einer das Geschoſs nach vorn begrenzenden Kreisfläche mit berücksichtigen, und die praktisch interessante Frage ist folgende: wie muſs bei gegebener Länge und gegebener hinterer Grenzfläche der Geschoſsspitze der Meridian ihrer Mantelfläche angenommen werden, damit diese zusammen mit der Stirnfläche den kleinstmöglichen Widerstand erleide; dabei ist der Radius der Stirnfläche nicht vorgeschrieben.

Ein wichtiges auf diese Frage bezügliches Resultat hat Armanini abgeleitet; er zeigt, daſs, wenn das gesuchte Minimum vorhanden sein soll, die Mantelfläche, deren Meridian die seit Newton bekannte Kurve ist, sich unter einem Winkel von 45° an die Stirnfläche ansetzen muſs; damit wird eine irrtümliche Angabe in der übrigens verdienstvollen Arbeit von August berichtigt. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob die nach der Regel von Armanini konstruierte Geschoſsspitze wirklich ein Minimum des Widerstandes liefert; um diese Frage zu beantworten, benutze ich die Methode zur Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums bei Problemen der Variationsrechnung mit veränderlichen Integrationsgrenzen, welche ich an die Grundgedanken

---

1) August, Crelle's Journal **103** (1888). Armanini, Annali di mat. (3) **4** (1900). Lampe, Verh. d. deutschen phys. Ges. **3** (1901).

von Weierstraſs anknüpfend in meinem Lehrbuch der Variationsrechnung entwickelt habe.

1. Die Symmetrieachse des Geschosses sei die x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems; die Stirnfläche entstehe durch Rotation eines Stückes der positiven y-Achse; der Geschoſskörper liege nach der Seite der positiven Abszissen hin und bewege sich durch die Luft in der Richtung der negativen x-Achse. Es sei ferner 0 der Koordinatenanfangspunkt, 01 der Radius der Stirnfläche, 1 also ein Punkt der positiven Ordinatenachse; 12 sei das krummlinige Stück des Meridians der Geschoſsspitze, sodaſs der Punkt 2 auf der hinteren Begrenzungsfläche derselben liegt. Wenn dann die Kurve 12 stetig gekrümmt sein und das gesuchte Minimum liefern soll, so ergeben die gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung als erste notwendige Bedingung des Minimums, daſs die Kurve 12 durch Gleichungen von folgender Gestalt darstellbar sein muſs:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = b + \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4t^4} + \frac{1}{t^2} + \ln t\right), \\ y = \frac{a(1+t^2)^2}{2t^3}; \end{cases}$$

dabei bedeutet t einen Parameter, für den offenbar die Gleichung

$$t = \frac{dy}{dx}$$

gilt; a und b sind Konstante. Die Kurven, welche durch die Gleichungen (1) bei willkürlicher Wahl der Gröſsen a und b definiert werden, sind nach der Bezeichnungsweise meines Lehrbuchs die Extremalen der vorgelegten Minimumsaufgabe.

Bezeichnen wir nun hier wie auch fernerhin die Koordinaten der Punkte 1, 2, ... durch $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, die Werte des Parameters t in diesen Punkten durch $t_1, t_2, \ldots$, so ist nach Armanini zu setzen

$$t_1 = 1,$$

und die zweite Gleichung (1) ergiebt

$$y_1 = 2a,$$

sodaſs a ebenso wie y_1 positiv ist; da ferner $x_1 = 0$, so folgt aus der ersten Gleichung (1), wenn man $t = t_1 = 1$ setzt,

$$b + \tfrac{7}{8}a = 0,$$

sodaſs die Gleichungen der zu untersuchenden Extremalen in folgende Form gebracht werden können:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = y_1\left[-\frac{7}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4t^4} + \frac{1}{t^2} + \ln t\right)\right], \\ y = \frac{y_1(1+t^2)^2}{4t^3} = \frac{y_1}{4}\left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right). \end{cases}$$

Von jeder der hierdurch dargestellten Kurven betrachten wir nur denjenigen Teil, der dem Wertgebiet

$$1 \geqq t > 0 \tag{3}$$

entspricht; da offenbar die Gröfse

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y_1}{4}\left(\frac{3}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t}\right) = -\frac{y_1}{4t}\left(-1 + \frac{3}{t^2}\right)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

bei der Voraussetzung (3) negativ ist, so erhält man, wenn t vom Werte $+1$ beginnend abnimmt, die positiven Werte von x, die bei der festgesetzten Lage des Geschosses zum Koordinatensystem zu betrachten sind.

2. Der Widerstand, den eine in der Richtung ihrer Symmetrieachse durch eine Flüssigkeit fortschreitende Rotationsfläche erleidet, wird bei der Newtonschen Voraussetzung über die Druckwirkung durch den Ausdruck

$$C\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2} \tag{4}$$

dargestellt, in welchem C eine Konstante bedeutet und längs des Meridians der Rotationsfläche, einschliefslich der die Stirnfläche erzeugenden geraden Strecke, zu integrieren ist; sind x und y längs des Meridians Funktionen eines Parameters t, und werden die Ableitungen nach diesem durch Accente bezeichnet, so kann man für den Ausdruck (4) schreiben

$$C\int F(x, y, x', y')\,dt,$$

wobei gesetzt ist

$$F(x, y, x', y') = \frac{y y'^3}{x'^2 + y'^2}. \tag{5}$$

Die Bedeutung der Konstante C ist leicht zu erkennen, wenn man $x' = 0$ setzt, also längs einer Ordinate, z. B. des Stückes 01, integriert; man erhält dann

$$C\int_0^{y_1} y\,dy = \frac{C y_1^2}{2} = \frac{C}{2\pi} \cdot \pi y_1^2;$$

C ist also das 2π-fache des Widerstandes, den eine auf der Bewegungsrichtung senkrechte Kreisfläche erleidet, dividiert durch das Areal derselben.

Die Beziehung zwischen der Funktion F und den Extremalen besteht darin, dafs die Gleichungen

$$F_x - \frac{dF_{x'}}{dt} = 0, \quad F_y - \frac{dF_{y'}}{dt} = 0, \tag{6}$$

in welchen $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_{x'} = \frac{\partial F}{\partial x'}$ u. s. f. gesetzt ist, gelten, wenn man für x, y die Ausdrücke (1) oder (2) einsetzt; man kann sich davon, ohne etwas aus der Variationsrechnung zu entlehnen, durch einfache Ausrechnung leicht überzeugen.

3. Um nun unserem Ziel näher zu kommen, betrachten wir den Extremalenbogen 12 als speziellen Fall eines veränderlichen Bogens 34, der in folgender Weise konstruiert wird. Es sei $y_3 > 0$, und es werde die Extremale

$$(7) \qquad \begin{cases} x = y_3\left[-\frac{7}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4t^3} + \frac{1}{t^2} + \ln t\right)\right], \\ y = \frac{y_3(1+t^2)^2}{4t^3} \end{cases}$$

für das Intervall $1 \geqq t > 0$ betrachtet, und der Widerstand, dividiert durch die Konstante C, allgemein durch J bezeichnet; spezieller sei J_{034} das längs des Linienzuges 034 gebildete Integral, und werde stets der Integrationsweg durch die dem Buchstaben J angehefteten Zahlen angedeutet. Dann ist

$$J_{034} = J_{03} + \bar{J}_{34},$$

wobei der Strich darauf hinweisen soll, daſs längs einer Extremale integriert wird, und nach Nr. 2 ist, da längs der Geraden 03 die Gröſse x' verschwindet,

$$(8) \qquad J_{03} = \int_0^{y_3} y\,dy = \frac{y_3^2}{2};$$

ferner ergiebt sich, da den Gleichungen (7) zufolge dem Werte $t = 1$ der Punkt 3 entspricht,

$$\bar{J}_{34} = \int_1^{t_4} F(x, y, x', y')\,dt,$$

wobei für x, y die Werte (7) substituiert zu denken sind. Zur Vereinfachung der Formeln wollen wir festsetzen, daſs

$$x_4 = x, \quad y_4 = y, \quad t_4 = t$$

sei, d. h. wir wollen die Gröſsen x, y, t ohne Index auf den Punkt 4 beziehen und schreiben demgemäſs

$$\bar{J}_{34} = \int_1^{t} F(x, y, x', y')\,dt.$$

Diese Gröfse kann als Funktion von y_3 und t angesehen werden; man erhält unmittelbar

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial t} = F(x, y, x', y'),$$

oder, da F nach der Definition (5) in Bezug auf die Argumente x', y' homogen von der ersten Dimension ist,

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial t} = F_{x'} x' + F_{y'} y',$$

oder endlich, indem man zum Ausdruck bringt, dafs x und y den Gleichungen (7) zufolge Funktionen von y_3 und t sind,

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial t} = F_{x'} \frac{\partial x}{\partial t} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial t}. \tag{9}$$

Da ferner die Integrationsgrenzen von y_3 unabhängig sind, findet man

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial y_3} = \int_1^t \frac{\partial F(x, y, x', y')}{\partial y_3} dt = \int_1^t \left(F_x \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{x'} \frac{\partial x'}{\partial y_3} + F_y \frac{\partial y}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial y_3}\right) dt.$$

Dieser Ausdruck kann durch partielle Integration umgeformt werden, indem man von den Gleichungen

$$\frac{\partial x'}{\partial y_3} = \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial y_3}\right), \quad \frac{\partial y'}{\partial y_3} = \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial y_3}\right)$$

ausgeht; man erhält z. B.

$$\int_1^t F_{x'} \frac{\partial x'}{\partial y_3} dt = F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3}\Big|_1^t - \int_1^t \frac{\partial x}{\partial y_3} \frac{dF_{x'}}{dt} dt$$

und findet schliefslich

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial y_3} = F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial y_3}\Big|_1^t + \int_1^t dt\left[\left(F_x - \frac{dF_{x'}}{dt}\right)\frac{\partial x}{dy_3} + \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dt}\right)\frac{\partial y}{\partial y_3}\right],$$

also den Gleichungen (6) zufolge, die bei den Voraussetzungen (7) offenbar ebenso gelten, wie wenn man für x, y die Werte (2) einsetzt,

$$\frac{\partial \bar{J}_{34}}{\partial y_3} = F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial y_3}\Big|_1^t.$$

Kombiniert man dieses Resultat mit der Gleichung (8) und setzt

$$J_{03} + \bar{J}_{34} = u,$$

so ergiebt sich in etwas geänderter Anordnung

$$\frac{\partial u}{\partial y_3} = y_3 - \left(F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial y_3}\right)\Big|^1 + F_{x'} \frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'} \frac{\partial y}{\partial y_3}.$$

Nun ersieht man aus den Gleichungen (7) unmittelbar

$$(10)\qquad \frac{\partial x}{\partial y_3}\Big|^1 = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial y_3}\Big|^1 = 1,$$

$$(11)\qquad y' = tx';$$

da ferner offenbar

$$F_{y'} = \frac{yy'^2(y'^2 + 3x'^2)}{(x'^2 + y'^2)^2},$$

also nach (11)

$$F_{y'} = \frac{yt^2(t^2 + 3)}{(1 + t^2)^2},$$

so folgt

$$F_{y'}\Big|^1 = y\Big|^1 = y_3,$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen (10) erhält man

$$y_3 - \left(F_{x'}\frac{\partial y}{\partial y_3} + F_{y'}\frac{\partial y}{\partial y_3}\right)\Big|^1 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_3} = F_{x'}\frac{\partial x}{\partial y_3} + F_{y'}\frac{\partial y}{\partial y_3}.$$

Sodann ergiebt die Gleichung (9), da offenbar

$$\frac{\partial J_{03}}{\partial t} = 0,$$

das Resultat

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{x'}\frac{\partial x}{\partial t} + F_{y'}\frac{\partial y}{\partial t};$$

setzt man also

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial y_3}dy_3, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial y_3}dy_3,$$

so folgt die für die fernere Untersuchung fundamentale Formel

$$(12)\qquad du = F_{x'}dx + F_{y'}dy.$$

4. Der einfache analytische Kunstgriff, durch welchen, beiläufig bemerkt, die Jacobi-Hamiltonsche Methode mit den Grundgedanken von Weierstraſs über die Herleitung hinreichender Bedingungen des Extremums in Verbindung gesetzt wird[1]), besteht nun darin, daſs in der Gröſse u, die zunächst als Funktion von y_3 und t erscheint, die Argumente x und y als unabhängige Variable eingeführt werden. Um zu entscheiden, ob und in welchem Umfange dies möglich ist, muſs die Funktionaldeterminante der durch die Gleichungen (7) als Funktionen

1) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung (Braunschweig 1900), §§ 15, 16 und 19.

von y_3 und t bestimmten Ausdrücke x, y nach den Argumenten y_3 und t gebildet werden. Schreibt man jene Gleichungen kurz

$$x = y_3 \varphi(t), \quad y = y_3 \psi(t),$$

so findet man unmittelbar

$$dx = \varphi(t) dy_3 + y_3 \varphi'(t) dt,$$
$$dy = \psi(t) dy_3 + y_3 \psi'(t) dt,$$
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(y_3, t)} = y_3(\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)).$$

Ferner gilt die schon in der Gleichung (11) zum Ausdruck gekommene Identität

$$\psi'(t) = t\varphi'(t);$$

somit folgt

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(y_3, t)} = y_3 \varphi'(t)(t\varphi(t) - \psi(t))$$
$$= y_3 \left(-\frac{3}{t^5} - \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t}\right)\left[-\frac{11}{16}t - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{t^2} - t \ln t\right)\right].$$

Da nun die Werte von t, für welche $1 \geqq t > 0$, betrachtet werden, so ist $\ln t$ nicht positiv, die ganze rechte Seite der letzten Gleichung und damit die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(y_3, t)}$ also positiv, und dies gilt für alle Wertsysteme (y_3, t), für welche $y_3 > 0$, $1 \geqq t > 0$.

In der Umgebung jedes dieser Wertsysteme können also die Gröfsen y_3 und t als Funktionen der unabhängigen Variabeln x, y angesehen werden, und haben stetige erste Ableitungen nach diesen. Es erscheint damit auch die Gröfse u als Funktion von x und y, und das in der Formel (12) auftretende System von Differentialen dx, dy kann jedes beliebige vom Punkte 4 ausgehende Linienelement darstellen.

5. Eine weitere Thatsache, von der wir Gebrauch zu machen haben, besteht darin, dafs jeder beliebig gegebene Punkt 4, dessen Koordinaten positiv sind, mit einem auf der positiven Ordinatenachse liegenden, nicht vorgeschriebenen Punkte 3 durch eine der Schar (7) angehörige Extremale verbunden werden kann. Um dies nachzuweisen, gehen wir von irgend einer speziellen Extremale jener Schar, etwa der ursprünglich betrachteten Kurve 12 aus, deren Gleichungen lauten:

$$x = y_1 \varphi(t), \quad y = y_1 \psi(t). \tag{13}$$

Längs dieser Kurve durchläuft das Verhältnis $y : x$, wenn man t von $+1$ bis zum Werte 0 abnehmen läfst, beständig abnehmend das Intervall von $+\infty$ bis 0; denn man hat

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 dt} = \frac{y_1^2}{x^2}(\psi(t)\varphi'(t) - \varphi(t)\psi'(t)),$$

und der Zähler dieses Ausdruckes ist nach Nr. 4 für alle positiven, echt gebrochenen Werte von t positiv; da nun t abnimmt, da ferner

$$\lim_{t=0} t \ln t = 0$$

und demnach

$$\lim_{t=0} \frac{y}{x} = \lim_{t=0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 0,$$

so ändert sich der Quotient $y:x$ in der That auf die angegebene Weise. Es giebt daher auf dem der Ungleichung

$$1 \geqq t > 0 \tag{14}$$

entsprechenden Teil der Kurve (13) einen einzigen Punkt, in welchem der Quotient $y:x$ einen gegebenen positiven Wert, z. B. denselben wie für den gegebenen Punkt 4 annimmt. Ist θ der zugehörige Wert von t, so findet man demnach

$$\frac{y}{x} = \frac{\psi(\theta)}{\varphi(\theta)},$$

indem man die Gröfsen x, y wieder auf den Punkt 4 bezieht, und bei der vorausgesetzten Lage dieses Punktes hat die letzte Gleichung eine einzige Lösung θ, welche, für t gesetzt, der Ungleichung (14) genügt. Setzen wir nun

$$y_3 = \frac{x}{\varphi(\theta)} = \frac{y}{\psi(\theta)}, \tag{15}$$

so geht die Extremale

$$X = y_3 \varphi(t), \quad Y = y_3 \psi(t),$$

welche der Schar (7) angehört, durch den Punkt (x, y) oder 4, da man für $t = \theta$ offenbar die Gleichungen

$$X = x, \quad Y = y$$

erhält. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

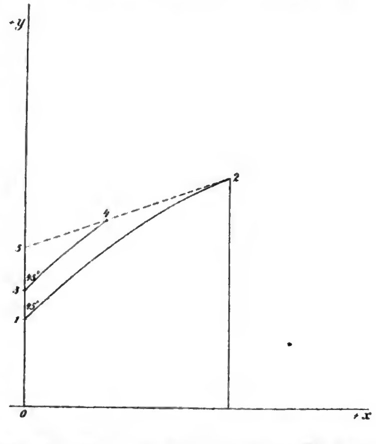
Läfst man den Punkt (x, y) sich dem Koordinatenanfangspunkt unbegrenzt annähern, so folgt aus den Formeln (15), dafs y_3 unendlich klein wird; denn die Gröfse

$$\psi(t) = \frac{1}{4t^3} + \frac{1}{2t} + \frac{t}{4}$$

bleibt bei positiven, die Einheit nicht überschreitenden Werten von t oberhalb einer festen positiven Grenze.

6. Nach diesen Vorbereitungen kann die Frage nach der Minimumseigenschaft des Integrals J_{012} beantwortet werden. Vom Punkte 2, also vom Rande der gegebenen hinteren Grenzfläche der Geschofsspitze aus, sei in der xy-Ebene eine beliebige, die x-Achse nicht schneidende

Kurve, welche nicht Extremale zu sein braucht, nach einem Punkte 5 hin gezogen, welcher wie 1 der positiven Hälfte der Ordinatenachse angehört; 052 ist dann der Meridian einer neuen Spitze, und es ist zu untersuchen, ob wirklich, wie wir wünschen, das Widerstandsintegral J_{052} gröfser als J_{012} ist. Zu diesem Zwecke lasse man den Punkt 4 die Kurve 52 in der Richtung von 5 nach 2 hin durchlaufen und konstruiere, was nach Nr. 5 möglich ist, in jeder Lage des Punktes 4 den dort definierten Extremalenbogen 34. Fallen die Punkte 4 und 5 zusammen, so ist auch der Punkt 3 mit ihnen identisch; fällt der Punkt 4 in die Lage 2, so geht der Punkt 3 in die Lage 1 über. Daraus folgt, dafs das Aggregat



$$W = J_{054} - u = J_{05} + J_{54} - (J_{03} + \bar{J}_{34})$$

bei der bezeichneten Bewegung des Punktes 4 mit dem Anfangswert Null beginnt, während sein Endwert die Differenz

$$J_{052} - (J_{01} + \bar{J}_{12}) = J_{052} - J_{012}$$

ist, deren Vorzeichen untersucht werden soll. Dieses Vorzeichen ist bestimmt und damit das Ziel der Untersuchung erreicht, wenn es gelingt, über das Wachsen oder Abnehmen der Gröfse W bei der angegebenen Bewegung des Punktes 4 bestimmte Einsichten zu gewinnen.

Es seien nun die Koordinaten des Punktes 4 als stetige, mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen eines Parameters τ gegeben, der in den Punkten 5, 4, 2 die Werte τ_5, τ, τ_2 annimmt und in der Richtung 52 wächst; dann ist

$$J_{54} = \int_{\tau_5}^{\tau} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau, \qquad \frac{dJ_{54}}{d\tau} = F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

und da nach Nr. 4 die Gröfse u in der Umgebung jeder Lage des

Punktes 4 als Funktion von x, y angesehen werden kann und stetige erste Ableitungen besitzt, so kann man der Formel (12) zufolge setzen

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} = F_{x'}\frac{dx}{d\tau} + F_{y'}\frac{dy}{d\tau};$$

man erhält mit diesen Werten

$$\frac{dW}{d\tau} = F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) - F_{x'}(x, y, x', y')\frac{dx}{d\tau} - F_{y'}(x, y, x', y')\frac{dy}{d\tau},$$

oder in der Bezeichnung von Weierstraſs

$$-\frac{dW}{d\tau} = \mathfrak{E}\left(x, y, x', y', \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right).$$

Führt man in dieser Formel den expliziten Ausdruck (5) für die Funktion F ein, und berücksichtigt die Relation

$$y' = tx',$$

so ergiebt eine kurze Rechnung

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{\left(\frac{dy}{d\tau} - t\frac{dx}{d\tau}\right)^2\left[2t\frac{dx}{d\tau} + (1-t^2)\frac{dy}{d\tau}\right]y}{(1+t^2)^2\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right]}.$$

Da nun t positiv und $1 - t^2$ nicht negativ ist, so ist dieser Ausdruck positiv oder Null, wenn wir voraussetzen, daſs $\frac{dx}{d\tau}$ und $\frac{dy}{d\tau}$ längs der Kurve 52 nirgends zugleich verschwinden und nicht negativ werden. Der zweite Faktor des Zählers ist dann, abgesehen vom Punkte 5, von Null verschieden, da dies von $1 - t^2$ gilt; verschwinden könnte somit die Gröſse $\frac{dW}{d\tau}$ längs der ganzen Kurve 52 nur, wenn überall die Gleichung

$$\frac{dy}{d\tau} - t\frac{dx}{d\tau} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\tau} & x' \\ \frac{dy}{d\tau} & y' \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

bestünde. Nun kann man nach Nr. 4 auch t und y_3 in jeder Lage des Punktes 4 als Funktionen von x und y und damit von τ betrachten; dann ist offenbar

$$\frac{dx}{d\tau} = x'\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial x}{\partial y_3}\frac{dy_3}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} = y'\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial y}{\partial y_3}\frac{dy_3}{d\tau};$$

und die Gleichung (16) würde ergeben

$$\begin{vmatrix} x'\frac{dt}{d\tau}+\frac{\partial x}{\partial y_3}\frac{dy_3}{d\tau} & x' \\ y'\frac{dt}{d\tau}+\frac{\partial y}{\partial y_3}\frac{dy_3}{d\tau} & y' \end{vmatrix} = \frac{dy_3}{d\tau}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y_3} & x' \\ \frac{\partial y}{\partial y_3} & y' \end{vmatrix} = 0,$$

mithin, da die neben $\frac{dy_3}{d\tau}$ stehende Funktionaldeterminante nach Nr. 4 von Null verschieden ist,

$$\frac{dy_3}{d\tau}=0, \quad y_3=\text{const.}$$

Das würde bedeuten, dafs der Punkt 4 bei seiner Bewegung immer auf derselben Extremale 34 läge; da nun die Endlage dieser Kurve die ursprünglich betrachtete Extremale 12 ist, so müfste die Kurve 52 in ihrem ganzen Verlaufe mit der Extremale 12 zusammenfallen. Abgesehen von diesem Falle ist also unter der eingeführten Voraussetzung die Gröfse $\frac{dW}{d\tau}$ nicht negativ, verschwindet aber nicht überall, und da

$$\tau_5 < \tau_2, \quad W\Big|^{\tau_5} = 0, \quad W\Big|^{\tau_2} = J_{052} - J_{012},$$

so folgt

$$J_{052} - J_{012} > 0. \tag{17}$$

Diese Ungleichung gilt auch noch, wenn die Punkte 5 und 0 zusammenfallen, d. h. wenn die dem Meridan 052 entsprechende Geschofsform keine Stirnfläche hat, sondern vorne in eine scharfe oder abgerundete Spitze ausläuft. Dann kann der Punkt 4, dessen Ordinate positiv sein mufste, zwar nicht in die Lage 5 oder 0 hineinrücken, ihr aber doch beliebig nahe kommen. Läfst man demgemäfs den Wert τ von τ_2 aus abnehmend gegen die Grenze τ_5 konvergieren, so nimmt nach Nr. 5 die Gröfse y_3 unendlich ab, das Integral J_{03} nähert sich also ebenso wie $\overline{J}_{34}$ und J_{54} unbegrenzt dem Werte Null, und dasselbe gilt demnach von dem ganzen Aggregate W. Nun lehrt aber die durchgeführte Argumentation auch jetzt noch, dafs, so lange τ nicht mit τ_5 zusammengefallen ist, die Gröfse $\frac{dW}{d\tau}$ nicht negativ ist und nicht überall verschwindet; denn y_3 ist offenbar nicht längs der ganzen Kurve 52 konstant. Wäre also der Wert von W für $\tau=\tau_2$ Null oder negativ, so müfste diese Gröfse bei der angegebenen Bewegung der Variablen τ gegen eine negative Grenze konvergieren, was dem soeben erhaltenen Resultate widerspricht. Damit ist wiederum die Ungleichung (17) bewiesen.

7. Das Minimum des Widerstandes wird also von der Extremale 12 geliefert, wenn man sie mit denjenigen Kurven 52 vergleicht, längs deren $\frac{dx}{d\tau}$ und $\frac{dy}{d\tau}$ nicht zugleich verschwinden und nicht negativ werden. Diese Beschränkung der verglichenen Kurven ist aber dem ursprünglichen Sinne des Problems durchaus angemessen; denn wäre die Gröfse $\frac{dx}{d\tau}$ stellenweise negativ, so müfste sie in gewissen Punkten von positiven zu negativen Werten übergehen, und die durch Rotation der Kurve 52 entstandene Fläche hätte eine nach der Bewegungsrichtung offene, ringförmige Vertiefung. Ebenso hätte diese Fläche, wenn $\frac{dy}{d\tau}$ das Vorzeichen wechselte, wulstförmige Auswüchse oder Vertiefungen, welche sich senkrecht zur Bewegungsrichtung erhöben oder öffneten, und würde nicht in ihrer ganzen Ausdehnung der Bewegungsrichtung zugewandt sein. Ein wechselndes Vorzeichen einer der Gröfsen $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ würde also auf solche Geschofsformen führen, bei denen, wie schon August hervorgehoben hat, das Newtonsche Gesetz der Druckwirkung nicht mehr angewandt werden kann.

Zum Schlufs sei noch darauf hingewiesen, dafs die in Nr. 6 vorausgesetzte Stetigkeit der Gröfsen $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ der Kurve 52 die praktisch wohl immer zulässige Beschränkung auferlegt, überall eine sich stetig ändernde Tangente zu besitzen. Aber die abgeleiteten Differentialformeln und die an sie geknüpften Schlüsse bleiben auch für Kurven mit beliebig vielen Ecken gültig, wenn die übrigen Voraussetzungen der Nr. 6 festgehalten werden, und die Gröfsen $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}$ nur, ohne überall stetig zu sein, gewisse leicht angebbare Eigenschaften besitzen, die in § 17 meines Lehrbuchs genauer besprochen sind.

Berlin, den 5. August 1901.

Gleichgewichtsbedingungen für vier Kräfte, die senkrecht zu einer starren Geraden wirken.

Von H. Schubert in Hamburg.

Es bezeichnen: 1) p_1, p_2, p_3, p_4 die Intensitäten der vier Kräfte; 2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Winkel, die ihre Richtungen mit einer beliebig gewählten Anfangsrichtung bilden; 3) l_1, l_2, l_3, l_4 die Entfernungen, die ihre auf einer starren Geraden g befindlichen vier Angriffspunkte von einem beliebig auf g gewählten Anfangspunkte haben.

Dann sind die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$\begin{aligned} p_1 \cos\alpha_1 + p_2 \cos\alpha_2 + p_3 \cos\alpha_3 + p_4 \cos\alpha_4 &= 0, \\ p_1 \sin\alpha_1 + p_2 \sin\alpha_2 + p_3 \sin\alpha_3 + p_4 \sin\alpha_4 &= 0, \\ p_1 l_1 \cos\alpha_1 + p_2 l_2 \cos\alpha_2 + p_3 l_3 \cos\alpha_3 + p_4 l_4 \cos\alpha_4 &= 0, \\ p_1 l_1 \sin\alpha_1 + p_2 l_2 \sin\alpha_2 + p_3 l_3 \sin\alpha_3 + p_4 l_4 \sin\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

Diese vier Gleichungen bestehen zwischen nur acht wesentlich verschiedenen Gröfsen, nämlich drei Winkeln, da drei den vierten bestimmen müssen, drei Intensitätsverhältnissen und zwei Abstandsverhältnissen. Eliminiert man daher die Winkel, so mufs eine Relation entstehen, die allein zwischen den Intensitäten der Kräfte und den Abständen ihrer Angriffspunkte besteht. Diese lautet:

$$\begin{aligned} &p_1^2(l_1-l_2)(l_1-l_3)(l_1-l_4) + p_2^2(l_2-l_1)(l_2-l_3)(l_2-l_4) \\ &+ p_3^2(l_3-l_1)(l_3-l_2)(l_3-l_4) + p_4^2(l_4-l_1)(l_4-l_2)(l_4-l_3) = 0. \end{aligned}$$

Wenn die vier Angriffspunkte symmetrisch liegen, so dafs $l_1 - l_2 = l_3 - l_4$ und $l_1 - l_3 = l_2 - l_4$ ist, so spezialisiert sich diese Relation zu: $(p_1^2 - p_4^2)(l_1 - l_4) = (p_2^2 - p_3^2)(l_2 - l_3)$.

Andererseits mufs aber durch Elimination der Kraft-Intensitäten eine Relation entstehen, die nur zwischen den Winkeln und den Abständen der Angriffspunkte besteht. Diese Relation, die man durch Elimination von p_1, p_2, p_3, p_4 aus den vier Bedingungsgleichungen erhält, lautet:

$$\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_4 - \alpha_2)} : \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_4 - \alpha_3)} = \frac{l_1 - l_2}{l_4 - l_2} : \frac{l_1 - l_3}{l_4 - l_3}.$$

Diese Relation sagt aber nichts anderes aus, als dafs die Winkel, unter denen die Kraftrichtungen zu einander geneigt sind, dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die Strecken zwischen den Angriffspunkten der entsprechenden Kräfte. Hieraus folgt der Satz:

Wenn vier Kräfte, die senkrecht zu einer starren Geraden wirken, sich das Gleichgewicht halten, und man zieht in einer zu ihren Richtungen parallelen Ebene durch einen Punkt vier Parallele zu diesen Richtungen, so erhält man vier Strahlen, die projektiv zu den vier Angriffspunkten auf der starren Geraden sind.

Hamburg, den 24. April 1901.

Vereinfachte Lösung der Eulerschen Aufgabe: $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$.

Von K. Schwering in Köln.

Diese Aufgabe ist von Euler in seiner Algebra[1]) gelöst worden. Die gegebene Lösung ist etwas umständlich und läfst nicht leicht erkennen, ob die anscheinend willkürlichen Gröfsen bei Abänderung ihrer Werte zu neuen Lösungen führen oder nicht. An diese Lösung knüpft Binet[2]) an (C. R. **12**, 248, 1841); mit dieser Note werden wir uns weiter unten auseinandersetzen. Ich glaube eine von mir gefundene Lösung veröffentlichen zu sollen, weil ich sie für eine wesentliche Vereinfachung der Eulerschen Lösung halte und die Aufgabe an sich höchst elegant ist.

Ich behaupte, dafs die allgemeinste Lösung in folgenden Gleichungen enthalten ist:

$$(1) \quad x = m\alpha - n^2, \quad y = -m\beta + n^2, \quad z = -n\alpha + m^2, \quad v = n\beta - m^2.$$

Die Zahlen α, β, m, n sind nur durch *eine* Gleichung verbunden:

$$(2) \qquad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3mn.$$

Zunächst überzeugen wir uns durch Ausrechnung, dafs (1) und (2) wirklich die Aufgabe lösen. Wir finden:

$$x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = (m^3 - n^3)(\alpha^3 - \beta^3) + (3mn^4 - 3m^4n)(\alpha - \beta), \text{ oder}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = (m^3 - n^3)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3mn).$$

Damit ist diese Behauptung bewiesen.

Jetzt haben wir noch zu zeigen, dafs die Aufgabe auch in allgemeinster Weise durch unsere Lösung erledigt wird. Angenommen, es existiere irgend eine Lösung x, y, z, v. Wir werden zeigen, dafs sie in den Gleichungen (1) und (2) enthalten ist, d. h. wir werden Werte α, β, m, n angeben, welche die vorgelegte Lösung hervorbringen.

---

1) Desgl. in Euleri opera minora collecta. Petrop. 1849. Tom. I. p. 193 ff.

2) Encyklop. d. mathem. Wissensch. **1**, 572.

Wir finden leicht:

$$\alpha = \frac{x + n^2}{m} = \frac{m^2 - z}{n}; \quad \beta = \frac{n^2 - y}{m} = \frac{m^2 + v}{n}. \tag{3}$$

Folglich

$$nx + mz = -ny - mv = m^3 - n^3, \tag{4}$$

also

$$\frac{x + y}{v + z} = -\frac{m}{n}. \tag{5}$$

Setzen wir nun

$$m = \vartheta(x + y), \quad n = -\vartheta(v + z),$$

so folgt aus (4)

$$z(x + y) - x(v + z) = \vartheta^2\{(x + y)^3 + (v + z)^3\}.$$

Oder mit Rücksicht auf $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$:

$$\vartheta^2 = \frac{zy - xv}{3xy(x + y) + 3vz(v + z)}. \tag{6}$$

Diese Gleichung ist aber immer rational lösbar. Denn man braucht den Zahlen x, y, z, v nur einen bestimmten gemeinsamen Faktor λ zu geben, um für ϑ sogar den Wert Eins zu erhalten. Ist ϑ gefunden, so liefern $m = \vartheta(x + y)$, $n = -\vartheta(v + z)$ für m und n sogar, wenn es verlangt wird, ganzzahlige Werte, und dann erhält man α und β aus (3).

Hiermit ist bewiesen, dafs jede rationale Lösung in der von uns gegebenen enthalten ist. Wenn α, β, m, n nicht ganze Zahlen sind, so können sie durch Multiplikation mit einer bestimmten ganzen Zahl, dem Hauptnenner, ganzzahlig gemacht werden. Dadurch wird den Werten x, y, z, v nach (1) ein gemeinsamer Faktor, das Quadrat des vorgenannten Nenners beigefügt. Dieser kann zum Schlufs wieder abgetrennt werden. Folglich erhält man alle ganzzahligen Lösungen, wenn man m, n alle zulässigen ganzen Zahlen durchlaufen läfst. Wegen (2) kann man für m und n aufser 3 nur Zahlen wählen, welche Primzahlen von der Form $6p - 1$ und eine ungerade Potenz von 2 als Faktoren nicht enthalten. Für m und n sind also nur zulässig:

1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21 u. s. w.

Beispiele: $m = 1$, $n = 3$; $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 9$.

Dann sind folgende Annahmen möglich:

$$\alpha = 3, -3, 0, 0, 3, -3; \quad \beta = 0, 0, 3, -3, -3, 3.$$

Man findet folgende Lösungen:

$$\begin{array}{rrrrrrr} x = & -6, & -12, & -9, & -9, & -6, & -12, \\ y = & 9, & 9, & 6, & 12, & 12, & 6, \\ z = & -8, & 10, & 1, & 1, & -8, & 10, \\ v = & -1, & -1, & 8, & -10, & -10, & 8. \end{array}$$

Unter diesen sind 3 verschieden:

$$9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3, \quad 12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3, \quad 6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3.$$

Für $m = 1$, $n = 4$; $\alpha = -4$, $\beta = 2$ wird: $20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3$.

Für $m = 3$, $n = 4$; $\alpha = 6$, $\beta = -6$ und $\alpha = -6$, $\beta = 0$ wird

$$34^3 + 2^3 = 33^3 + 15^3, \quad 34^3 + 9^3 = 33^3 + 16^3.$$

Für $\alpha = 6$, $\beta = 0$: $16^3 + 2^3 = 15^3 + 9^3$.

Um auch ein Beispiel der Zurückführung einer gegebenen Lösung auf die hier gefundene Form zu haben, wählen wir das von Euler op. min. coll. Petrop. 1849 mitgeteilte $x = -72$, $y = 39$, $z = 65$, $v = 34$. Man findet $\vartheta^2 = 151 : 33^2 \cdot 26$. Folglich erteilen wir den x, y, z, v den gemeinsamen Faktor $\lambda = 151 \cdot 26$, woraus $\vartheta = 1 : 33 \cdot 26$ wird. Dann folgt

$$m = -\frac{1}{33 \cdot 26} \cdot 151 \cdot 26 \cdot 33 \cdot = -151, \quad n = -3 \cdot 151.$$

Nun ergiebt sich

$$\alpha = \frac{-151 \cdot 26 \cdot 72 + 9 \cdot 151^2}{-151} = 9 \cdot 57, \quad \beta = \frac{9 \cdot 151^2 - 26 \cdot 151 \cdot 39}{-151} = -3 \cdot 115.$$

Die Ausrechnung ergiebt richtig $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3mn$.

Von hohem Interesse ist die Frage, wie unsere Lösung sich umformen wird, wenn eine der Unbekannten verschwindet. Dafs die entstehende Gleichung $x^3 = y^3 + z^3$ rational nicht lösbar sein kann, sagt der berühmte Fermatsche Satz.

Setzen wir also eine der Unbekannten gleich Null, etwa $y = 0$, so folgt $\beta = \frac{n^2}{m}$, daher

$$\alpha^2 + \frac{n^2}{m}\alpha = 3mn - \frac{n^4}{m^2}.$$

Damit diese Gleichung rational sei, mufs $3n(4m^3 - n^3)$ ein Quadrat sein. Dies ist für $m = n = 1$ der Fall, was aber zu einer nichtssagenden Lösung führt. Nehmen wir aber z. B. $m = 1$, $n = 2$, so wird $\beta = 4$, $\alpha = -2 + i\sqrt{6}$. Wenn man also Zahlen von der Form

$a + bi\sqrt{6}$ zuläfst, kann man die Gleichung $x^3 = y^3 + z^3$ rational lösen. Eine solche Lösung ist z. B.

$$(i\sqrt{6})^3 + (1 - i\sqrt{6})^3 = (1 + i\sqrt{6})^3.$$

Wir bemerken, dafs die Unmöglichkeit $x^3 = y^3 + z^3$ rational zu lösen, genau von derselben Tragweite ist wie die Unmöglichkeit, $3n(4m^3 - n^3)$ zu einem rationalen Quadrate zu machen, also nach Division mit n^4:

$$y^2 = 12x^3 - 3 \tag{7}$$

in rationalen Zahlen zu lösen. Ersetzen wir y durch $3y$, so kommen wir auf

$$4x^3 = 1 + 3y^2. \tag{8}$$

Die einfachen Aufgaben (7) und (8) sind also in rationalen Zahlen nicht lösbar, abgesehen von den Lösungen $x = 1$, $y = 3$ und $x = 1$, $y = 1$, welche den Charakter der Singularität keineswegs auf den ersten Blick zu erkennen geben.

Die von Binet gegebenen Formeln, — ich verdanke diese Bemerkung Herrn E. Lampe — gehen in die obigen (1) über, wenn man $m = 1$, $n = a^2 + 3b^2$, $\alpha = a - 3b$, $\beta = a + 3b$ setzt und die Vorzeichen von x und y ändert. Wesentlich ist hier allein die Annahme $m = 1$; denn, dafs n in der Form $a^2 + 3b^2$ darstellbar ist, folgt aus bekannten Sätzen der quadratischen Formen, da $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3n$, $(2\alpha + \beta)^2 + 3\beta^2 = 12n$ ist, also $12n$ keinen Teiler von der Form $6n + 5$ haben kann. Es fragt sich nun, ob die Binetsche Lösung die allgemeine ist. Wird die Ganzzahligkeit[1]) verlangt, so ist dies von vornherein nicht sehr wahrscheinlich, da aus Gleichung (5) sich ergiebt $\frac{v+z}{x+y} = -\frac{n}{m}$. Es müfsten also die 4 Zahlen x, y, z, v sich mindestens auf eine Weise immer so in Gruppen von je zwei ordnen lassen, dafs die Summe der einen, $v + z$, ein genaues Vielfaches der anderen, $x + y$, wäre. Merkwürdigerweise trifft dies, so viel ich sehe, bei den Eulerschen Beispielen zu, z. B. $3, 4, 5, -6$: $4 + 5$ ist teilbar durch $3 - 6$; $3 + 4$ durch $5 - 6$; $3 + 5$ durch $4 - 6$. Ebenso für $1, 6, 8, -9$.

---

1) Binet (C. R. 12, 249) sagt nur: „... ainsi ces dernières valeurs de x, y, x', y' données par Euler comme particulières peuvent dans tous les cas tenir lieu des expressions qui renferment quatre lettres, à un facteur près commun aux quatre valeurs, facteur qui peut toujours être écarté ou réintroduit à volonté quand il s'agit de satisfaire à une équation homogène telle que $x^3 + y^3 = x'^3 + y'^3$."

Indes genügt ein einziges Beispiel, für welches eine solche Gruppierung nicht möglich ist, zur Widerlegung. Ein solches ist

$$m = 7,\ n = 13,\ \alpha = 8,\ \beta = 11;\quad x = -113,\ y = 92,\ z = -55,\ v = 94.$$

$$x + y = -21;\quad x + z = -168;\quad x + v = -19,$$
$$v + z = 39;\quad y + v = 186;\quad y + z = 37.$$

Folgende Gleichungen mögen noch erwähnt werden:

$$x + y + z + v = (m - n)(\alpha - \beta),\qquad \frac{x + z}{v + y} = -\frac{\alpha + m + n}{\beta + m + n}.$$

Trier, im Januar 1901.

Anwendung des Abelschen Theorems auf die Lösung der diophantischen Gleichungen $x^3 + Ay^3 = z^3$ und $x^3 + y^3 = z^2$.

Von K. Schwering in Köln.

In einer Programmabhandlung Düren 1898 habe ich den schon von C. G. J. Jacobi bemerkten Zusammenhang zwischen dem Abelschen Theorem und gewissen diophantischen Gleichungen näher erforscht und durch einige Beispiele erläutert. In der folgenden Mitteilung sollen zwei weitere interessante Beispiele gegeben werden. Die Gleichung $x^3 + Ay^3 = z^3$ behandelt Legendre in seiner Zahlentheorie (Deutsche Ausg. 2. Teil § 13 S. 110) und zwar in der anscheinend allgemeineren Form $x^3 + ay^3 = bz^3$. Er nimmt an, dafs eine Lösung der Gleichung bekannt sei, und leitet dann aus dieser Lösung eine neue ab. Das ist nun auch bei der Anwendung des Abelschen Satzes nicht zu umgehen; der Vorteil besteht bei dieser Behandlungsweise darin, dafs auf den Zusammenhang der abgeleiteten Lösungen mit der ursprünglichen helles Licht fällt.

Wir setzen

$$(1)\qquad (mx + n)^3 - x^3 - 1 = (m^3 - 1)(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Dann wird

$$m\alpha + n = \sqrt[3]{\alpha^3 + 1}, \quad m\beta + n = \sqrt[3]{\beta^3 + 1}.$$

Hieraus bestimmt man die Werte von m und n. Bildet man nun in (1) die Koeffizienten von x^2 und x und nimmt ihren Quotienten, so folgt:

$$(2)\qquad \frac{m}{n} = -\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma}.$$

Setzt man in diese Gleichung die für m und n gefundenen Werte ein, so findet man

$$(3)\qquad \gamma = \frac{\beta^2\sqrt[3]{\alpha^3 + 1} - \alpha^2\sqrt[3]{\beta^3 + 1}}{\alpha\sqrt[3]{\alpha^3 + 1} - \beta\sqrt[3]{\beta^3 + 1}}.$$

Hieraus wird für $\alpha = \beta$

$$(4) \qquad \gamma = -\frac{2\alpha + \alpha^4}{1 + 2\alpha^3}; \quad \sqrt[3]{\gamma^3 + 1} = \frac{1 - \alpha^3}{1 + 2\alpha^3}\sqrt[3]{1 + \alpha^3}.$$

Berechnet man aus (1) $m\gamma + n$, so folgt

$$(5) \qquad \sqrt[3]{\gamma^3 + 1} = \frac{-\beta\sqrt[3]{(\alpha^3 + 1)^2} + \alpha\sqrt[3]{(\beta^3 + 1)^2}}{\alpha\sqrt[3]{\alpha^3 + 1} - \beta\sqrt[3]{\beta^3 + 1}}.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs *eine* Lösung der Gleichung $x^3 + 1 = y^3$ in ganzen Zahlen sofort durch (4) und (5) unzählige neue Lösungen derselben Art liefern würde. Aber damit würden wir nur auf eine längst als unlösbares Problem erwiesene Aufgabe geführt werden. Nun kann aber unsere Gleichung

$$(6) \qquad x^3 + Ay^3 = z^3$$

in die Form

$$1 + \left(\frac{y}{x}\sqrt[3]{A}\right)^3 = \left(\frac{z}{x}\right)^3$$

treten. Setzen wir $\alpha = \frac{y}{x}\sqrt[3]{A}$, so ist zwar α mit der Irrationalität $\sqrt[3]{A}$ behaftet, aber $\sqrt[3]{1 + \alpha^3} = \frac{z}{x}$ ist wie α^3 rational. Die Gleichung (4) zeigt, dafs dasselbe für γ gilt, und die Gleichungen (3) und (5) zeigen, dafs aus *zwei* Lösungen sich eine weitere ähnlicher Art zusammensetzen läfst. — Nehmen wir das Legendresche Beispiel

$$x^3 + 7y^3 = z^3,$$

so finden wir die erste Lösung: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$, aus welcher sich $x = -4$, $y = 3$, $z = 5$ und dann durch die Annahmen $\alpha = \sqrt[3]{7}$, $\beta = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{7}$ sofort $x = 17$, $y = 38$, $z = 73$ ergiebt. Die Vervierfachung des Arguments ergiebt

$$1256^3 + 7 \cdot 183^3 = 1265^3.$$

Dieselben Zahlwerte hat Legendre. Es sei noch bemerkt, dafs Legendre die Gleichung $x^3 + y^3 = 6z^3$ für unmöglich hält (art. 334). Dies ist ein Irrtum. Die kleinste Lösung ist 17, 37, 21. Encykl. d. Math. I C 1 S. 572.

Schreiten wir jetzt zur Lösung der zweiten Aufgabe, welche von Euler Comm. ar. 1. pag. 207 behandelt ist. Wir setzen:

$$(7) \qquad x^3 + 1 - (mx + n)^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Die Rechnung ergiebt

$$(8) \qquad \alpha_3 = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2 - 4(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2 + 2\sqrt{\alpha_1^3 + 1}\sqrt{\alpha_2^3 + 1}}.$$

Daher für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$:

(9) $$\alpha_3 = \frac{(\alpha^3 - 8)\alpha}{4(\alpha^3 + 1)}.$$

Berechnet man $m\alpha_3 + n$, so findet man

(10) $$-\sqrt{\alpha_3^3 + 1} = \frac{\alpha_1^3\alpha_2^3 + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + 9\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) - 8}{(\alpha_2^3 + 3\alpha\alpha_2^2 + 4)\sqrt{\alpha_1^3 + 1} + (\alpha_1^3 + 3\alpha_2\alpha_1^2 + 4)\sqrt{\alpha_2^3 + 1}},$$

also für $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$

(11) $$-\sqrt{\alpha_3^3 + 1} = \frac{\alpha^6 + 20\alpha^3 - 8}{8(\alpha^3 + 1)\sqrt{\alpha^3 + 1}}.$$

Die Wurzelzeichen haben positive Werte. Wenn α_1 und α_2 stetige Variable sind, ist das negative Zeichen links in (10) und (11) nicht willkürlich. Nach Quadrierung ergiebt sich aus (11) mit Hilfe von (9)

(12) $$(\alpha^3 - 8)^3\alpha^3 + 64(\alpha^3 + 1)^3 = (\alpha^6 + 20\alpha^3 - 8)^2.$$

Hierin liegt die Lösung der Gleichung

(13) $$x^3 + y^3 = z^2,$$

$$x = \alpha^4 - 8\alpha, \quad y = 4(\alpha^3 + 1), \quad z = \alpha^6 + 20\alpha^3 - 8.$$

$\alpha =$	$x =$	$y =$	$z =$
1,	− 7,	8,	13;
3,	57,	112,	1261;
4,	56,	65,	671;
5,	65,	56,	671;
6,	312,	217,	6371.

Es ist bemerkenswert, dafs unsere Methode ohne den mindesten Kunstgriff direkt auf die Lösung führt.

Wir bemerken noch, dafs z sich folgendermafsen darstellen läfst:

$$z = (\alpha^3 + (1 - \sqrt{3})^3)(\alpha^3 + (1 + \sqrt{3})^3);$$

z hat also den Faktor $(\alpha + 1 - \sqrt{3})(\alpha + 1 + \sqrt{3}) = \alpha^2 + 2\alpha - 2$, und $x + y = \alpha^4 + 4\alpha^3 - 8\alpha + 4$ ist das Quadrat dieses Faktors.

Wenn wir uns nach den Transzendenten umsehen, deren Additionstheoreme wir entwickelt haben, so ist diese Frage für die zweite Aufgabe keiner weiteren Erörterung bedürftig. Wir haben die Umkehrung des Integrals vor uns:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

Für die erste Aufgabe setzen wir

$$R(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$
$$(mx + n)^3 - x^3 - 1 = (m^3 - 1)R(x),$$

also

$$3(mx + n)^2 m - 3x^2 = (m^3 - 1)R'(x).$$

Dagegen für $x = \alpha$, wenn wir nach α differentiieren:

$$m\alpha + n = \sqrt[3]{\alpha^3 + 1},$$

$$\alpha dm + dn = \left(\frac{\alpha^2}{(m\alpha + n)^2} - m\right) d\alpha,$$

oder

$$\frac{\alpha dm + dn}{\frac{1}{3}(m^3 - 1) R'(\alpha)} = \frac{d\alpha}{(m\alpha + n)^2}.$$

Dieselbe Gleichung besteht für β und γ. Addieren wir die 3 Gleichungen und beachten, dafs in leicht verständlicher Bezeichnung

$$\sum \frac{1}{R'(\alpha)} = 0, \quad \sum \frac{\alpha}{R'(\alpha)} = 0,$$

so folgt:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + 1)^2}} + \frac{d\beta}{\sqrt[3]{(\beta^3 + 1)^2}} + \frac{d\gamma}{\sqrt[3]{(\gamma^3 + 1)^2}} = 0$$

Setzen wir also

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}}, \quad x = \varphi(u),$$

so haben wir die gesuchte Transzendente vor uns.

Trier, im Januar 1901.

Über eine einfache konstruktive Ermittelung der cyklischen Ebenen für Kegel und Cylinder.

Von Georg Majcen in Agram (Kroatien).

Nicht ohne Grund hatte R. Sturm in seinen „Elementen der darstellenden Geometrie" auf die Wichtigkeit der kotierten Projektion hingewiesen. Es treten bei dieser Projektionsmethode Verhältnisse auf, die anderswo unbemerkt bleiben.

Im folgenden will ich eine einfache, aus elementaren Operationen zusammengestellte Konstruktion der cyklischen Ebenen, sowohl deren Begründung, als auch einige daraus gezogene Folgerungen in Kürze darstellen. Diese Konstruktion ist in der kotierten Projektion durchgeführt, kann aber auch für den Fall der Annahme zweier Projektionsebenen angewendet werden. Es ist dann hierbei keine Transformation der Projektionsebene notwendig, wie es meistens geschieht, wenn der Kegel nicht gegen jene eine spezielle Lage einnimmt.

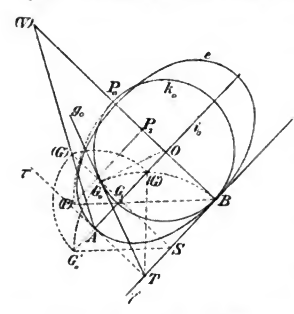
Die Basis eines geraden, elliptischen Kegels $(\varkappa)$ sei e mit den Achsen AA' und BB', seine Höhe $VO = (V)O$. Wir wollen die Lage jener Kreisschnittebene (γ) dieses Kegels feststellen, welche durch den Scheitelpunkt (B) der Basisellipse hindurchgeht. Aus bekannten Symmetrieverhältnissen folgt die Trace γ' der Kreisschnittebene (γ) auf der Basisebene als eine Tangente in B an e.

Den Kreisschnitt (k) in γ und die Ellipse e fassen wir als zentrisch-kollineare Kurven auf. Die Tangenten an diese in ihren entsprechenden Punkten, d. h. in ihren Schnittpunkten mit derselben Kegelerzeugenden schneiden sich in der Schnittlinie γ' beider Kurvenebenen.

Die Erzeugende VA des Kegels schneidet die Basis in A, den gesuchten Kreisschnitt in einem Punkte G. Es wird also die Tangente (g) an den Kreis k im Punkte G die Trace γ' in einem Punkte T schneiden, welcher offenbar in der Tangente τ' der Ellipse in A liegen mufs. Die vom Punkte T an den Kreis k gezogenen Tangenten TB und TG haben gleiche Längen. Es handelt sich sonach um die Ermittelung des Punktes G und seiner Höhe über der Basisebene.

Wir legen die Erzeugende (AV) des Kegels um die Bildflächentrace τ' der Tangentialebene längs dieser Erzeugenden in die Projektionsebene um. Die umgelegte Erzeugende (i_0) fällt mit der grofsen Achse der Ellipse zusammen. Den gesuchten Punkt (G) auf i finden wir also, indem wir $TB = T(G)$ machen. Aus (G) bekommen wir die Projektion dieses Punktes in G_1, wenn wir die Erzeugende i abermals umlegen und zwar um die Trace AO der Symmetrieebene des Kegels. Hierbei gelangt der Mittelpunkt desselben nach (V), wenn $(V)O$ die gegebene Höhe des Kegels darstellt.

Der Punkt (G) kommt in der neuen Umlegung $A(V)$ der Erzeugenden i nach (G'). Man erhält sonach seine Projektion im Punkte G_1 der Geraden AO, als einer Projektion der Erzeugenden i.



Die Kreistangente g in G hat man daher um γ' umzulegen. Es geschieht dies auf bekannte Weise mittelst Übertragung der Strecke $\overline{G_1(G')}$ von G_1 bis G_0' auf die im Punkte G_1 auf $(G')S$ errichtete Senkrechte. Man macht weiter $\overline{SG_0'} = \overline{SG_0}$ und hat in der Verbindungslinie TG_0 die gesuchte umgelegte Tangente g_0. Es sind also vom Kreisschnitte (k) zwei Tangenten g_0 und γ' nebst dem Berührungspunkte B in dieser bekannt; somit ist die Umlegung k_0 bestimmt. Die Höhe des Punktes G über der Basisebene stellt die Länge G_1G_0' dar. Zur Kontrolle eignet sich auch der Punkt P des Kreises K für die Bestimmung der Kreisschnittebene γ.

Läfst man die hier zur Begründung der Konstruktion herangezogenen Nebenkonstruktionen weg, so vereinfacht sich jene Konstruktion folgendermafsen.

Man beschreibe aus T mit dem Halbmesser TB einen Bogen BG_0, welcher die grofse Achse der Ellipse in (G) schneidet, und aus A mit dem Halbmesser $A(G)$ einen Bogen $(G)(G')$ bis zum Durchschnitte mit der um AO umgelegten Erzeugenden $A(V)$ des Kegels. Man fälle eine Senkrechte aus (G') auf γ', welche den Bogen BG_0 in G_0 und die grofse Achse der Ellipse in G_1 schneidet. Der Punkt G_1 ist die Projektion eines Punktes der Kreisschnittebene und $\overline{G_1(G')}$ seine Kote.

Ist die cyklische Ebene für einen Cylinder zu bestimmen, so verfahre man auf dieselbe Weise. Die Konstruktion vereinfacht sich in-

soweit, als die Tangente g bei der Umlegung um γ' mit τ' zusammenfällt. Der Punkt G hat hierbei seine Projektion in A, und seine Kote findet man als die von dem Bogen $(G)(G')$ auf τ' eingeschnittene Strecke $\overline{(G'')A}$.

Wie schon oben erwähnt, bleibt diese Konstruktion für beliebige Lagen einer zweiten Projektionsebene unverändert.

Da der Punkt G in einer Symmetrieebene liegt, zu welcher auch die beiden Scharen cyklischer Ebenen γ symmetrisch sind, so wird man die durch den Punkt G gehende cyklische Ebene der zweiten Schar als die der eben bestimmten Ebene γ symmetrische Ebene in Bezug auf die Ebene AOV erhalten. — Die Bogen BG_0 und $(G)(G')$ bleiben für alle geraden Kegel über derselben Basisellipse e konstant. Denkt man sich daher das Dreieck $AO(V)$ um AO in die räumliche Lage zurückgedreht, so kommt der Punkt (G') nach G, und man kann sagen:

Trägt man vom Scheitelpunkte (A) der grofsen Ellipsenachse auf die Erzeugende VA des Kegels (V, e) die Strecke $\overline{AG}$, welche man als eine „zweite" Kathete im rechtwinkligen Dreiecke erhält, dessen eine Kathete die halbe kleine (AT) und dessen Hypotenuse die halbe grofse Ellipsenachse $T(G)$ ist, so bestimmt der Endpunkt G dieser Strecke mit den beiden an die Ellipse in den Scheitelpunkten der kleinen Achse gezogenen Tangenten die beiden Stellungen der cyklischen Ebenen des Kegels.

Jene „zweite" Kathete ist aber gleich der linearen Exzentrizität der Ellipse, es folgt demnach: *„Trägt man vom Scheitelpunkte (A) der grofsen Ellipsenachse auf die Erzeugende VA des Kegels*[1]) *die Exzentrizität der Basisellipse auf, so bestimmt ihr Endpunkt mit den beiden Tangenten in den Scheitelpunkten der kleinen Achse beide Stellungen der cyklischen Ebenen jenes Kegels (V, e)."*

Wir bemerkten, dafs der umgelegte Kreis k_0 die Gerade g_0 im Punkte G_0 berührt, so dafs die Länge der Senkrechten in G_0 auf g_0 bis zu ihrem Durchschnitte mit OB den Halbmesser des Kreises k_0 darstellt. Dieser Halbmesser wird ein Maximum, wenn G_0 die gröfstmögliche Entfernung von OB einnimmt. Es geschieht dies, wenn G_0 in τ' liegt, d. h. wenn (V) unendlich weit entfernt ist. Da G_0 immer auf dem Bogen BG_0 liegt, so wird für diesen Fall der Halbmesser des Kreises gleich $\overline{TB}$, oder gleich der halben grofsen Achse der Ellipse.

1) Oder Cylinders, siehe oben.

Nimmt dagegen die Höhe des Kegels stetig ab, so wird die Entfernung $\overline{(G')G_1}$ des Punktes G von der Projektionsebene immer kleiner und wird schliefslich den Wert Null annehmen, sobald die Höhe des Kegels Null wird. Für diesen Fall haben wir den Punkt (G') im Punkte (G), als in dem Durchschnittspunkte beider Bogen BG_0 und $(G)(G')$ zu suchen. Im Punkte (G) ist dann auch der zugehörige Berührungspunkt G_0 der Tangente g_0 zu suchen. Diese erhalten wir in der Verbindungslinie $T(G)$. Die in (G) auf $T(G)$ errichtete Senkrechte schneidet OB im Mittelpunkte des zugehörigen umgelegten Kreises. Es ist dies der kleinste unter den Kreisschnitten durch γ' für dieselbe Basisellipse e.

Setzt der Mittelpunkt (V) des Kegels seine Bewegung auf VO *unter* der Projektionsebene fort, so resultieren verschiedene in Bezug auf die Projektionsebene gegen die vorherigen symmetrische Lagen von cyklischen Ebenen.

Bei dem Durchgange des Mittelpunktes V von der einen auf die andere Seite der Projektionsebene (also für einen Kegel, dessen Höhe gleich Null ist) ist der Kreisschnitt k ein reeller Kreis mit einem Minimum des Halbmessers. Man erhält diesen, wenn man von A aus die Exzentrizität bis (G) auf die grofse Achse aufträgt, den erhaltenen Endpunkt (G) mit T verbindet und auf dieser Verbindungslinie in (G) eine Senkrechte bis zum Durchschnitte mit BO errichtet.

Es stimmt dies mit der obigen Regel überein.

Agram, den 15. Januar 1901.

Über die arithmetischen Eigenschaften der Faktoriellen.

Von K. Hensel in Berlin.

Wenn man die ganzen Zahlen nach steigenden Potenzen einer gegebenen Primzahl p entwickelt, so kann man sehr einfach die höchste Potenz p^{μ_m} bestimmen, welche in dem Produkte

(1) $$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$$

enthalten ist, und zugleich die Zahl

(1ª) $$A_m = \frac{m!}{p^{\mu_m}}$$

finden, der $m!$, dividiert durch die höchste in jenem Produkte enthaltene Potenz von p, modulo p kongruent ist. Die erste Aufgabe hat schon Legendre, die zweite auf einem anderen Wege Herr Stickelberger (Math. Annalen **37**, 342—343) gelöst.

Es sei für die Zahl m:

(2) $$m = a_i p^i + a_{i+1} p^{i+1} + \cdots \qquad \binom{0 \leq a_k < p}{a_i > 0}$$

die Entwickelung nach Potenzen von p, so dafs:

(2ª) $$m - 1 = (p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{i-1} + (a_i - 1)p^i + a_{i+1}p^{i+1} + \cdots$$

die Darstellung der nächst niedrigeren Zahl $m-1$ ist. Ebenso seien für die Produkte $(m-1)!$ und $m!$

(3) $$(m-1)! = A_{m-1} p^{\mu_{m-1}} + \cdots,$$
$$m! = A_m p^{\mu_m} + \cdots$$

die bezüglichen Entwickelungen nach Potenzen von p. Dann folgt aus der Gleichung $m \cdot (m-1)! = m!$ unter Benutzung von (2) und (3):

$$(a_i p^i + \cdots)(A_{m-1} p^{\mu_{m-1}} + \cdots) = A_m p^{\mu_m} + \cdots,$$

also ergeben sich durch Vergleichung der Anfangsglieder auf beiden Seiten die Relationen:

(4) $$A_m \equiv a_i \cdot A_{m-1} \pmod{p},$$
$$\mu_m - \mu_{m-1} = i,$$

durch die in Verbindung mit den offenbar richtigen Anfangsgleichungen:

(4ª) $$A_1 = 1, \qquad \mu_1 = 0$$

jene beiden Zahlen A_m und μ_m eindeutig bestimmt sind. Hieraus ergiebt sich aber ohne weiteres, dafs für jedes m:

$$\mu_m = \frac{m - (a_i + a_{i+1} + \cdots)}{p-1}, \tag{5}$$

$$A_m \equiv (-1)^{\mu_m} a_i! \, a_{i+1}! \ldots \quad (\text{mod. } p)$$

ist. Einmal nämlich gehen jene Gleichungen für $m = 1$ in (4^a) über. Berechnet man aber zweitens diese beiden Zahlen nach (5) für die in (2^a) betrachtete nächstvorhergehende Zahl $m-1$, so wird:

$$\mu_{m-1} = \frac{(m-1) - ((p-1)i + (a_i - 1) + a_{i+1} + \cdots)}{p-1} \tag{5^a}$$

$$= \frac{m - (a_i + a_{i+1} + \cdots)}{p-1} - i = \mu_m - i$$

und zweitens unter Benutzung des Wilsonschen Satzes:

$$A_{m-1} \equiv (-1)^{\mu_{m-1}} \big((p-1)!\big)^i \, (a_i - 1)! \, a_{i+1}! \cdots \tag{5^b}$$

$$\equiv (-1)^{\mu_{m-1} + i} \, (a_i - 1)! \, a_{i+1}! \cdots$$

und die so bestimmten Zahlen A_m, A_{m-1}, μ_m, μ_{m-1} erfüllen offenbar wirklich die Gleichungen (4).

Es ergiebt sich also der Satz:

Ist

$$m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r \qquad (0 \leq a_i < p)$$

die Entwickelung einer beliebigen Zahl m nach Potenzen von p, so ist:

$$m! = (-p)^{\mu_m} \cdot (a_0! \, a_1! \cdots a_r!) + \cdots, \tag{6}$$

wenn in dieser Entwickelung der Exponent μ_m des Anfangsgliedes durch die Gleichung:

$$\mu_m = \frac{m - (a_0 + a_1 + \cdots + a_r)}{p-1} \tag{6^a}$$

bestimmt ist.

Beachtet man endlich, dafs offenbar:

$$\left[\frac{m}{p^k}\right] = a_k + a_{k+1} p + \cdots + a_r p^{r-k}$$

ist, wenn $[\alpha]$, wie gewöhnlich, die gröfste in dem Bruche α enthaltene ganze Zahl bedeutet, so ergiebt sich leicht für die in (6) angegebene Zahl μ_m die gewöhnliche Darstellung:

$$\mu_m = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots, \tag{6^b}$$

wo die Summation beliebig weit fortgesetzt werden kann, da alle auf $\left[\frac{m}{p^r}\right]$ folgenden Zahlen von selbst Null sind.

Berlin, den 5. April 1901.

On the Potential of a single sheet.

By T. J. I'A. Bromwich (Cambridge, England.)

In order to find the discontinuities in the first derivatives of the potential of a double sheet, Poincaré discusses[1] the second derivatives of the potential of a single sheet; so far as I know it has not been remarked that these discontinuities can be easily found by the simple process used by Weingarten in the determination of the discontinuities of the second derivatives of the potential of a solid mass.[2] Weingarten has applied the same method to other physical problems.[3]

For simplicity, take the axis of z as normal to the surface with which the single sheet coincides, and the origin in the surface. The positive direction of z is supposed to be from the inside towards the outside of the surface.[4] Then, if the origin is an ordinary point of the surface, the equation to the surface takes the form

$$z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + 2hxy + by^2) + \cdots$$

in the neighbourhood of the origin. Let σ be the surface-density of the sheet at (x, y, z) and let σ_0, $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0$ be the values of σ and its first derivatives at the origin. We denote by V_0, V_1, the values of the potential of the sheet, outside and inside the surface, respectively. Also we write for brevity

$$u_x = \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_0}{\partial z},$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} \text{ etc.,}$$

the values of all these quantities being estimated at the origin. Then our problem is to find u_{xx}, u_{xy} ... in terms of a, b, h, σ_0, $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0$.

1) *Potentiel Newtonien*, pp. 232—252.

2) *Acta Mathematica*, **10**, 303, 1887.

3) *Archiv der Math. u. Phys.* (3) **1**, 27, 1901.

4) If the surface is not closed, the terms „inside" and „outside" may be used arbitrarily to distinguish the two sides of the surface.

At a point (x, y, z) the quantity

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial x} = u_x + x u_{xx} + y u_{xy} + z u_{xz} + \cdots = u_x + x u_{xx} + y u_{xy},$$

if the point is on the surface and if $|x|$, $|y|$ are so small that $x^2, xy, y^2 \ldots$ can be neglected. We find similar expressions for:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_0}{\partial z}.$$

But, at any point on the surface

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial x} = 4\pi\sigma l, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial y} = 4\pi\sigma m, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_0}{\partial z} = 4\pi\sigma n,$$

according to the general theory of the potential of a single sheet[1]), where l, m, n are the direction-cosines of the normal (drawn outwards) at the point and σ is the surface-density there. Now on our surface at (x, y, z):

$$l = -(ax + hy), \qquad m = -(hx + by), \qquad n = 1,$$

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 y,$$

where, as before, x^2, $xy, \ldots$ have been neglected. We are thus led to the equations

$$u_x + x u_{xx} + y u_{xy} = -4\pi\left[\sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 y\right](ax + hy),$$

$$u_y + x u_{xy} + y u_{yy} = -4\pi\left[\sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 y\right](hx + by),$$

$$u_z + x u_{xz} + y u_{yz} = -4\pi\left[\sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 y\right].$$

As these hold for all values of x, y, subject only to the conditions that $|x|$, $|y|$ shall be small, it follows that

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 4\pi\sigma_0,$$

$$u_{xx} = -4\pi a\sigma_0, \quad u_{xy} = -4\pi h\sigma_0, \quad u_{yy} = -4\pi b\sigma_0,$$

$$u_{xz} = +4\pi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0, \quad u_{yz} = +4\pi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0.$$

The values of u_x, u_y, u_z agree with what is known from the general theorem just quoted. We still have to find u_{zz}; to do this, we note that

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = 0 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2}$$

so that

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

1) This theorem appears in all the text-books; see for instance Poincaré, *Potentiel Newtonien*, chap. 3; Weingarten's proof, in the first of the papers quoted already, is perhaps the simplest.

Hence

$$u_{zz} = -(u_{xx} + u_{yy}) = 4\pi(a + b)\sigma_0.$$

Since $a + b = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$, where ϱ_1, ϱ_2 are the principal radii of curvature of the surface at the origin, it follows that[1])

$$u_{zz} = 4\pi\sigma_0(a + b) = u_z\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

We have thus found the values of the discontinuities in the six second derivatives of the potential at the origin; these values agree with Poincaré's[2]), with the exception of u_{xz}, u_{zy}. But the difference in the case of these two derivatives is apparent only; for the quantity denoted by γ' in Poincaré's work is the cosine of the angle between Oz and the normal. Hence, at the origin:

$$\gamma' = 1, \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial y} = 0,$$

for at (x, y, z) near the origin:

$$\gamma' = 1 - \tfrac{1}{2}\left[(ax + hy)^2 + (hx + by)^2\right] + \cdots$$

Using these values of γ', $\frac{\partial \gamma'}{\partial x}$, $\frac{\partial \gamma'}{\partial y}$, Poincaré's expressions reduce to those found above.

Addition. I take the opportunity of remarking that the same method can be used to obtain Korn's expressions for the discontinuities in the second derivatives of the potential of a double sheet (*Lehrbuch der Potentialtheorie*, Bd. 1, S. 52). 11th Nov. 1901.

Cambridge, England, 20th June 1901.

---

1) This equation seems to have been given first by Green in discussing the theory of the Leyden jar (*Essay on the application of Mathematics to Electricity and Magnetism* Art. 8).

2) See the table, *Potentiel Newtonien*, p. 251; where it is to be observed that the expressions all have their signs changed. That is, Poincaré gives $\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$ etc.

Vgl. zu dieser Arbeit: *Paci*, Giornale da Battaglini **15**, 289—298, 1877; *C. Neumann*, Math. Ann. **16**, 432—435, 1880; *E. Beltrami*, Ann. di Mat (2) **10**, 46—63, 1880. *Th. Horn*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **26**, 145, 1881; *G. A. Maggi*, Lomb. Rend. (2) **22**, 785, 1891. Anm. d. Red.

Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen.

Von KARL HEUN in Berlin.

(Fortsetzung.)

16. *Die Eulerschen Bewegungsgleichungen für den rotierenden Körper.* — Nach den Gleichungen (3) und (3') des Schema V' sind die kinetischen Grundgleichungen des rotierenden starren Systems

$$\overline{\mathrm{M}}_h = \overline{\mathrm{M}}_v \quad \text{und} \quad \overline{\mathrm{M}}_k = \frac{d\overline{\mathrm{M}}_v}{dt},$$

denn die ganzen Momente der Reaktionen verschwinden. In der Formel

$$\overline{\mathrm{M}}_v = \Sigma m \overline{x\dot{x}}$$

hat man jetzt nur für $\dot{\bar{x}}$ den Ausdruck $\overline{\sigma x}$ einzusetzen und die Summation über alle Massenpunkte des Körpers zu erstrecken, um die Impulsgleichungen in expliziter Form zu erhalten. Nun ist aber (vgl. die Einleitung):

$$\overline{x(\overline{\sigma x})} = x^2 \cdot \bar{\sigma} - (\bar{x}\bar{\sigma}) \cdot \bar{x}.$$

Gewöhnlich zerlegt man $\bar{x}$ nach drei rechtwinkligen Achsen, welche mit dem System fest verbunden sind, indem man

$$\bar{x} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$$

setzt. Auf diese Weise folgen die entsprechenden Komponenten des Vektors $\overline{\mathrm{M}}_v$, nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{v,1} &= \Sigma m(a_2^2 + a_3^2) \cdot \sigma_1 - \Sigma m a_1 a_2 \cdot \sigma_2 - \Sigma m a_3 a_1 \cdot \sigma_3,\\
\mathrm{M}_{v,2} &= \Sigma m(a_3^2 + a_1^2) \cdot \sigma_2 - \Sigma m a_2 a_3 \cdot \sigma_3 - \Sigma m a_1 a_2 \cdot \sigma_1,\\
\mathrm{M}_{v,3} &= \Sigma m(a_1^2 + a_2^2) \cdot \sigma_3 - \Sigma m a_3 a_1 \cdot \sigma_1 - \Sigma m a_2 a_3 \cdot \sigma_2,
\end{aligned}$$

worin man noch zur Abkürzung

$$\Sigma m(a_2^2 + a_3^2) = \mathrm{A}_1,\ \Sigma m(a_3^2 + a_1^2) = \mathrm{A}_2,\ \Sigma m(a_1^2 + a_2^2) = \mathrm{A}_3$$

und

$$\Sigma m a_2 a_3 = \mathrm{D}_1,\ \Sigma m a_3 a_1 = \mathrm{D}_2,\ \Sigma m a_1 a_2 = \mathrm{D}_3$$

setzt und diese Gröfsen als Trägheitsmomente und Deviationsmomente

bezeichnet. Die kinetischen Impulsgleichungen erhalten demnach die übliche Form:

$$(18)\qquad \begin{cases} M_{k,1} = A_1 \cdot \sigma_1 - D_3 \cdot \sigma_2 - D_2 \cdot \sigma_3, \\ M_{k,2} = A_2 \cdot \sigma_2 - D_1 \cdot \sigma_3 - D_3 \cdot \sigma_1, \\ M_{k,3} = A_3 \cdot \sigma_3 - D_2 \cdot \sigma_1 - D_1 \cdot \sigma_2. \end{cases}$$

Zur Herstellung der Eulerschen Gleichungen haben wir nur den Differentialquotienten $\frac{d\overline{M}_v}{dt}$ zu bilden. Statt dessen kann man auch den Elementarvektor

$$\overline{M}_v = (\bar{x}\bar{x}) \cdot \bar{\sigma} - (\bar{x}\bar{\sigma}) \cdot \bar{x}$$

nach der Zeit differentiieren und erhält

$$\frac{d\overline{M}_v}{dt} = 2(\bar{x}\dot{\bar{x}}) \cdot \bar{\sigma} + (\bar{x}\bar{x}) \cdot \dot{\bar{\sigma}} - (\bar{x}\dot{\bar{\sigma}}) \cdot \bar{x} - (\dot{\bar{x}}\bar{\sigma}) \cdot \bar{x} - (\bar{x}\bar{\sigma}) \cdot \dot{\bar{x}}.$$

Nun ist aber offenbar $\bar{x}\dot{\bar{x}} = 0$ und $\dot{\bar{x}}\bar{\sigma} = 0$, da die betreffenden Vektoren auf einander senkrecht stehen. Folglich wird

$$\frac{d\overline{M}_v}{dt} = (\bar{x}\bar{x}) \cdot \dot{\bar{\sigma}} - (\bar{x}\dot{\bar{\sigma}})\bar{x} - (\bar{x}\bar{\sigma}) \cdot \dot{\bar{x}} = (\bar{x}\bar{x}) \cdot \dot{\sigma} - (\bar{x}\dot{\bar{\sigma}})x + \overline{\sigma M_v}$$

und dementsprechend:

$$(19)\qquad \frac{d\overline{M}_v}{dt} = \left(\frac{d\overline{M}_v}{dt}\right) + \overline{\sigma M_v},$$

wo die Klammern um die Derivierte von $\overline{M}_v$ andeuten, daſs man bei dieser Differentiation nur die Gröſse $\bar{\sigma}$ als veränderlich zu betrachten hat. Die Eulerschen Gleichungen heiſsen also in unserer Bezeichnungsweise:

$$(20)\qquad \overline{M}_k = \left(\frac{d\overline{M}_v}{dt}\right) + \overline{\sigma M_v}.$$

Sie wurden in dieser Form (natürlich ohne die Symbolik der Vektoranalysis) zuerst von Lagrange in seiner „Mécan. anal." 2. éd. Bd. 2, p. 239 mitgeteilt, wo er dieselben aus dem kinetischen Prinzip (vgl. Nr. **13** dieser Arbeit) der virtuellen Verschiebungen abgeleitet hat. Lagrange benutzt dort die kinetische Energie E des rotierenden Systems, welche wegen der Gleichung $\dot{\bar{x}} = \overline{\sigma x}$ die Form hat:

$$E = \tfrac{1}{2}\Sigma m(\overline{\sigma x} \cdot \overline{\sigma x}) = \tfrac{1}{2}(A_1\sigma_1^2 + A_2\sigma_2^2 + A_3\sigma_3^2) - D_1\sigma_2\sigma_3 - D_2\sigma_3\sigma_1 - D_3\sigma_1\sigma_2.$$

Nach den Gleichungen (18) ist dann

$$M_{v,1} = \frac{\partial E}{\partial \sigma_1}, \quad M_{v,2} = \frac{\partial E}{\partial \sigma_2}, \quad M_{v,3} = \frac{\partial E}{\partial \sigma_3}.$$

Infolgedessen (oder eigentlich wegen der prinzipiell verschiedenen

Herleitung) stehen bei **Lagrange** statt der Komponenten der relativen Geschwindigkeit $\left(\frac{d\overline{M}_e}{dt}\right)$ die Gröfsen $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \sigma_1}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \sigma_2}$ und $\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \sigma_3}$.

Bezieht man den Vektor $\overline{\sigma}$ auf die Hauptachsen, so verschwinden die Deviationsmomente in dem Ausdrucke für $\overline{M}_e$, und man erhält aus der Gleichung (20) die gewöhnlichen **Eulerschen** Gleichungen:

$$
(21)\qquad \begin{cases} A_1 \frac{d\sigma_1}{dt} + (A_3 - A_2)\,\sigma_2\sigma_3 = M_{k,1}, \\ A_2 \frac{d\sigma_2}{dt} + (A_1 - A_3)\,\sigma_3\sigma_1 = M_{k,2}, \\ A_3 \frac{d\sigma_3}{dt} + (A_2 - A_1)\,\sigma_1\sigma_2 = M_{k,3}. \end{cases}
$$

Die Gleichung (19) hätte man sofort hinschreiben können, da sie unmittelbar aus dem Prinzip der relativen Bewegung folgt. $\left(\frac{d\overline{M}_e}{dt}\right)$ ist offenbar der Vektor der relativen Änderungsgeschwindigkeit von $\overline{M}_e$ in Bezug auf das rotierende System, $\overline{\sigma M_e}$ ist der Vektor der zugehörigen Führungsgeschwindigkeit. Genau genommen, hat schon **Euler** zur Ableitung seiner Gleichungen denselben Gedanken benutzt, ohne ihn jedoch in eine bestimmte analytische Form zu kleiden.

17. *Lagranges Transitivitätsgleichungen für das starre System.* — Das **D'Alembertsche** Prinzip in der von **Lagrange** und **Hamilton** benutzten Integralform:

$$
(22)\qquad \left[\delta' A_e\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta E + \delta' A_k)\, dt
$$

verursacht bei der Verwendung eines Geschwindigkeitssystems, welches durch kinematische Parameter ausgedrückt ist, die nicht gleichzeitig die Zeitderivierten von Koordinaten sind, eine bemerkenswerte Schwierigkeit, die von **Lagrange** zuerst klar erkannt und — für den Fall des rotierenden starren Systems — mit dem ihm eigenen Geschick überwunden wurde. In dem Ausdrucke

$$
(23)\qquad \delta E = \frac{\partial E}{\partial \sigma_1}\delta\sigma_1 + \frac{\partial E}{\partial \sigma_2}\delta\sigma_2 + \frac{\partial E}{\partial \sigma_3}\delta\sigma_3
$$

müssen nämlich die Variationen $\delta\sigma_i$ so transformiert werden, dafs sie nur die $\delta\theta_i$ und die vollständigen Zeitderivierten dieser Gröfsen enthalten. **Lagrange** (Mécan. anal. 2. éd. Bd. 2, p. 229) hat dies durch Benutzung der Relationen, welche zwischen den 9 Achsenkosinus bestehen, erreicht. Wir schlagen statt dessen einen direkteren und bequemeren

Weg ein, indem wir unmittelbar von der Konzeption des Systems möglicher Geschwindigkeiten ausgehen. Infolge der Gleichung $\bar{x} = \overline{\sigma x}$ ist

$$d\bar{x} = \overline{d\theta \cdot x} \quad \text{und} \quad \delta\bar{x} = \overline{\delta\theta \cdot x}.$$

Hieraus erhält man durch Variieren und Differentiieren

$$\delta d\bar{x} = \overline{\delta d\theta \cdot x} + \overline{d\theta \cdot \delta x} \quad \text{und} \quad d\delta\bar{x} = \overline{d\delta\theta \cdot x} + \overline{\delta\theta \cdot dx}.$$

Da nun offenbar $\delta d\bar{x} = d\delta\bar{x}$ ist, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen durch Subtraktion:

$$\overline{(\overline{\delta d\theta} - \overline{d\delta\theta}) \cdot x} = \overline{d\theta\,(\overline{\delta\theta \cdot x})} - \overline{\delta\theta\,(\overline{d\theta \cdot x})} = \overline{(\overline{d\theta \cdot \delta\theta}) \cdot x}$$

oder, da $\bar{x}$ ganz beliebig ist,

$$\delta\overline{d\theta} - d\overline{\delta\theta} = \overline{d\theta \cdot \delta\theta}. \tag{24}$$

Dies ist die Lagrangesche *Transitivitätsgleichung* für ein rotierendes starres System. Sie ist eine unmittelbare Folgerung aus dem kinematischen Ausdruck des Geschwindigkeitssystems. Wir schliefsen hieraus, dafs jeder charakteristischen Form eines Geschwindigkeitssystems als Funktion *wesentlich kinematischer* Parameter eine besondere — für das materielle System ebenso charakteristische — Transitivitätsgleichung entsprechen mufs.

Aus der Gleichung (24) folgen die Beziehungen zwischen den Achsenkomponenten:

$$\begin{cases} \delta d\theta_1 = d\delta\theta_1 + d\theta_2 \cdot \delta\theta_3 - d\theta_3 \cdot \delta\theta_2, \\ \delta d\theta_2 = d\delta\theta_2 + d\theta_3 \cdot \delta\theta_1 - d\theta_1 \cdot \delta\theta_3, \\ \delta d\theta_3 = d\delta\theta_3 + d\theta_1 \cdot \delta\theta_2 - d\theta_2 \cdot \delta\theta_1, \end{cases} \tag{25}$$

wie sie Lagrange a. a. O. mitgeteilt hat.

Diese Werte, in Verbindung mit der Gleichung (23), setzen wir in den Integralausdruck

$$\left[\delta' \mathrm{A}_e\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta \mathrm{E} + \delta' \mathrm{A}_k)\, dt \tag{26}$$

ein. Nun besteht die Relation:

$$\delta \mathrm{E} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_1}\delta\sigma_1 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_2}\delta\sigma_2 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \sigma_3}\delta\sigma_3 = \overline{\mathrm{M}}_e \cdot \overline{\delta\sigma},$$

worin nach der Gleichung (24)

$$\overline{\delta\sigma} = \frac{d}{dt}\overline{\delta\theta} + \overline{\sigma \cdot \delta\theta} \tag{27}$$

zu setzen ist. Folglich wird:

$$\delta \mathrm{E} = \overline{\mathrm{M}}_e \cdot \frac{d}{dt}\overline{d\theta} + \overline{\mathrm{M}}_e \cdot \overline{\sigma \cdot \delta\theta} = \frac{d}{dt}(\overline{\mathrm{M}}_e \cdot \overline{\delta\theta}) - \frac{d\overline{\mathrm{M}}_e}{dt} \cdot \overline{\delta\theta} - \overline{\sigma \mathrm{M}_e}\, \overline{\delta\theta}.$$

Die Gleichung (26) geht also über in

$$\left[\delta' A_r\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \left\{ \left(\frac{d \mathrm{M}_r}{dt}\right) + (\sigma \mathrm{M}_r) - \mathrm{M}_k \right\} \cdot \delta\theta \cdot dt;$$

denn es ist $\overline{\mathrm{M}}_r \cdot \overline{\delta\theta} = \delta' A_r$ und $\overline{\mathrm{M}}_k \overline{\delta\theta} = \delta' A_k$, da Translationen ausgeschlossen sind. Mithin mufs

$$\left(\frac{d \overline{\mathrm{M}}_r}{dt}\right) + \overline{\sigma \mathrm{M}}_r = \overline{\mathrm{M}}_k$$

sein, woraus man durch die Zerlegung in Komponenten die Lagrangesche Form der Bewegungsgleichungen:

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \sigma_1}\right) + \sigma_2 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_3} - \sigma_3 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_2} = \mathrm{M}_{k,1}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \sigma_2}\right) + \sigma_3 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_1} - \sigma_1 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_3} = \mathrm{M}_{k,2}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \sigma_3}\right) + \sigma_1 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_2} - \sigma_2 \dfrac{\partial E}{\partial \sigma_1} = \mathrm{M}_{k,3} \end{cases}$$

gewinnt.

18. *Die kinetischen Gleichungen von Lagrange in allgemeinen Positionskoordinaten.* — Wir setzen zunächst ein beliebiges System möglicher Geschwindigkeiten voraus, welches wir durch die symbolische Gleichung

$$(29) \qquad \dot{\bar{x}} = \text{funkt.}\,(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_i, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_i)$$

andeuten. Hierin sollen die $\bar{\varepsilon}$ Vektoren im gewöhnlichen Sinne, die q dagegen reelle von einander unabhängige Positionskoordinaten sein. Die Anzahl der letzteren wird gleich der Anzahl der Freiheitsgrade angenommen, so dafs die Bewegung des Systems durch keine Bedingungsgleichungen beschränkt ist. Die Vektoren $\bar{\varepsilon}$ sind im allgemeinen eindeutige Funktionen dieser Koordinaten. Aus der symbolischen Gleichung (29) folgt:

$$(30) \qquad \delta \bar{x} = \text{funct.}\,(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_i, \delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_i).$$

Für einen *freien* materiellen Punkt ist immer

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \dot{q}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_2 + \bar{\varepsilon}_3 \cdot \dot{q}_3$$

und dementsprechend

$$\delta \bar{x} = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \delta q_1 + \bar{\varepsilon}_2 \cdot \delta q_2 + \bar{\varepsilon}_3 \cdot \delta q_3.$$

Folglich

$$\delta' A_r = \dot{\bar{x}} \delta \bar{x} = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=3} \bar{\varepsilon}_\iota \dot{\bar{x}} \cdot \delta q_\iota,$$

oder, wenn wir in üblicher Weise zur Abkürzung

$$\bar{\varepsilon}_\iota \bar{\dot{x}} = p_\iota$$

setzen:

$$\delta' A_v = \mathop{S}_{\iota=1}^{\iota=3} p_\iota \cdot \delta q_\iota.$$

Die Gröfsen p sind *lineare* Funktionen der Gröfsen $\dot{q}$. Die funktionale Beziehung in Gleichung (29) oder die damit übereinstimmende in Gleichung (30) unterwerfen wir nun für *Systeme* der Bedingung, dafs die daraus abgeleitete skalare Gröfse $\delta' A_v$ die Form

$$(31) \qquad \delta' \mathrm{A}_v = \mathop{S}_{\iota=1}^{\iota=i} p_\iota \cdot \delta q_\iota$$

erhalten mufs und dafs die p *lineare* Funktionen der $\dot{q}$ werden.

Unter dieser Voraussetzung kann man immer $\delta' \mathrm{A}_h = \mathop{S}_{\iota=1}^{\iota=i} h_\iota \cdot \delta q_\iota$ setzen, wodurch die Grundgleichung der *impulsiven* Wirkung:

$$(\mathrm{I}) \qquad \delta' \mathrm{A}_v = \delta' \mathrm{A}_h$$

die einfache Form

$$(32) \qquad p_\iota = h_\iota \quad (\iota = 1, 2, 3, \ldots, i)$$

erhält.

In der Integralgleichung für Zeitkräfte:

$$(\mathrm{II}) \qquad \Big[\delta' \mathrm{A}_v\Big]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta \mathrm{E} + \delta' \mathrm{A}_k)\, dt$$

ist nach der durch die Gleichung (31) ausgedrückten Voraussetzung die kinetische Energie E des ganzen Systems eine quadratische Funktion der $\dot{q}$; denn diese Gleichung mufs auch giltig bleiben, wenn δq durch dq ersetzt wird. Folglich wird

$$(33) \qquad 2\,\mathrm{E} = \mathop{S}_{\iota=1}^{\iota=i} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} \cdot \dot{q}_\iota.$$

Ohnedies ist:

$$\delta \mathrm{E} = \mathop{S}_{\iota=1}^{\iota=i} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} \cdot \delta \dot{q}_\iota + \mathop{S}_{\iota=1}^{\iota=i} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q_\iota} \cdot \delta q_\iota.$$

Wir setzen ferner, ganz analog der Gleichung $\delta' \mathrm{A}_h = \mathop{S}_{\iota=1}^{\iota=i} \mathrm{h}_\iota \cdot \delta q_\iota$ auch für die Zeitkräfte

$$(34) \qquad \delta' \mathrm{A}_k = \sum \bar{k} \cdot \delta \bar{x} = \mathop{S}_{\iota=1}^{\iota=i} \mathrm{k}_\iota \cdot \delta q_\iota$$

und nennen nach dem Vorgange von Hertz (Prinzipien, p. 218) die Gröfsen $k_1, k_2, \ldots, k_i$ die Komponenten der Lagrangeschen Kraft, welche wir symbolisch mit k bezeichnen wollen. Das Symbol k nennt Hertz bekanntlich einen „Vektor in Bezug auf das ganze System“. Da nun die q *Koordinaten*, d. h. die $\dot{q}$ *vollständige* Derivierte nach der Zeit sind, so besteht immer die Gleichung:

$$\delta \dot{q}_\iota = \delta \frac{d q_\iota}{d t} = \frac{d}{d t} \delta q_\iota,$$

und die Grundgleichung (II) geht über in

$$\left[\underset{\iota}{\mathrm{S}} p_\iota \cdot \delta q_\iota\right]_{t_0}^{t} = \left[\underset{\iota}{\mathrm{S}} \frac{d \mathrm{E}}{d \dot{q}_\iota} \cdot \delta q_\iota\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \underset{\iota}{\mathrm{S}} \left\{-\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q_\iota} + k_\iota\right\} \delta q_\iota \cdot dt.$$

Diese Gleichung kann für beliebige Werte der δq nur identisch erfüllt sein, wenn

$$p_\iota = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} \tag{35}$$

und

$$\frac{d p_\iota}{d t} - \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q} = k_\iota \tag{36}$$

ist. Dies sind die Gleichungen von Lagrange. Ausdrücklich bemerken möchte ich noch, dafs auch die Impulsgleichungen, welche sich durch Kombination der Formeln (32) und (35) ergeben, nämlich

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_\iota} = h_\iota \tag{37}$$

von Lagrange (Méc. anal. 2. éd. Bd. 2, p. 183) und nicht von Niven herrühren, wie Routh in seinen „Rigid Dynamics“ bemerkt, und zwar stehen sie an der zitierten Stelle genau in der Form, welche Routh gebraucht. Es ist nämlich dort die Existenz einer Funktion Ω vorausgesetzt, welche die Komponenten

$$h_\iota = \frac{\partial \Omega}{\partial q_\iota}$$

ergiebt.

Clifford hat in seinen „Elements of Dynamic“ (2. Bd. der posthumen Veröffentlichung, p. 81) eine Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen gegeben, deren Grundgedanken wir hier wiederholen. Das Geschwindigkeitssystem sei nur von zwei Koordinaten q_1 und q_2 abhängig. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\bar{v} = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \dot{q}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_2;$$

Clifford setzt zunächst $\dot{q}_1 = 1$ und $\dot{q}_2 = 0$, darauf $\dot{q}_1 = 0$ und $\dot{q}_2 = 1$.

Die entsprechenden Werte von v sind: $\bar{v}_1 = \bar{\varepsilon}_1$ und $\bar{v}_2 = \bar{\varepsilon}_2$. Nun beweist er, daſs $\frac{d\bar{v}_1}{dq_2} = \frac{d\bar{v}_2}{dq_1}$ ist. Die Energie des Systems hat den Wert:

$$E = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1 \cdot \dot{q}_1^2 + 2\,\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_1\dot{q}_2 + \bar{\varepsilon}_2\varepsilon_2 \cdot \dot{q}_2^2).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \bar{\varepsilon}_1\bar{v}, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \bar{\varepsilon}_2\bar{v}.$$

Nun giebt es — ohne weitere Bedingungen — die Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1} = \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_2} = \frac{d\bar{\varepsilon}_2}{dt}.$$

Aus der Energiegleichung

$$E = \tfrac{1}{2}\bar{v}v$$

folgert er dann

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1} \cdot \bar{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_2} \cdot \bar{v}$$

oder

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{dt} \cdot \bar{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{d\varepsilon_2}{dt} \cdot \bar{v}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{dt} \cdot \bar{v} + \bar{\varepsilon}_1\frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{d\bar{\varepsilon}_2}{dt} \cdot \bar{v} + \bar{\varepsilon}_2\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial E}{\partial q_1} = \bar{\varepsilon}_1\frac{d\bar{v}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial E}{\partial q_2} = \bar{\varepsilon}_2\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Man kann die Lagrangeschen Gleichungen für einen freien Punkt streng *kinematisch* ableiten. Denn in diesem einfachen Falle hat $\bar{v}$ die Form

$$v = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \dot{q}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \cdot \dot{q}_2 + \bar{\varepsilon}_3 \cdot \dot{q}_3.$$

Hieraus folgt $\bar{\varepsilon}_\iota\bar{v} = p_\iota$ und durch Differentiation nach der Zeit

$$\bar{\varepsilon}_\iota\frac{dv}{dt} = \frac{dp_\iota}{dt} - \frac{d\varepsilon_\iota}{dt}\bar{v}.$$

Da v eine vollständige Derivierte nach der Zeit ist, so bestehen, wegen der Integrabilitätsbedingungen, die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_\varkappa}{\partial q_\iota} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\iota}{\partial q_\varkappa}.$$

Mithin ist:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_\iota} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_1}{\partial q_\iota} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_2}{\partial q_\iota} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_3}{\partial q_\iota} \cdot \dot{q}_3 = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\iota}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\iota}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{\varepsilon}_\iota}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3,$$

oder

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_\iota} = \frac{d\bar{\varepsilon}_\iota}{dt}.$$

Hieraus erhält man sofort die Gleichungen von **Lagrange** in der kinematischen Form

$$\bar{\varepsilon}_\iota \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dp_\iota}{dt} - \frac{\partial E}{\partial q_\iota}.$$

Die „begriffliche Bedeutung" der **Lagrangeschen** Gleichungen ist schon wiederholt Gegenstand von Untersuchungen gewesen. Doch scheinen diese noch kein befriedigendes Resultat ergeben zu haben. Es handelt sich dabei wesentlich um die Frage, wie dieselben aus den Impulsgleichungen $\bar{p}_\iota = h_\iota$ hervorgehen. Differentiieren wir diese nach der Zeit, so müssen die so erhaltenen Gleichungen

$$Dp_\iota = Dh_\iota$$

mit den Gleichungen

$$dp_\iota - \frac{\partial E}{\partial q_\iota} \cdot dt = k_\iota \cdot dt$$

identisch sein. Nun ist

$$p_\iota = \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \varepsilon_{\iota\varkappa} \cdot \dot{q}_\varkappa,$$

also

$$dp_\iota = \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \varepsilon_{\iota\varkappa} \cdot \ddot{q}_\varkappa \cdot dt + \underset{\iota}{\mathrm{S}} \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \frac{\partial \varepsilon_{\iota\varkappa}}{\partial q_\varkappa} \dot{q}_\iota \dot{q}_\varkappa \cdot dt$$

oder durch Berücksichtigung des zweiten Termes $-\frac{\partial E}{\partial q_\iota} \cdot dt$:

$$dp_\iota = \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \varepsilon_{\iota,\varkappa} \ddot{q}_\varkappa \cdot dt + \underset{\lambda}{\mathrm{S}} \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \gamma_{\lambda\varkappa}^{(\iota)} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\varkappa \cdot dt.$$

Das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung können wir, wie bei der Ableitung der **Eulerschen** Gleichungen, mit $(dp_\iota) \cdot dt$ bezeichnen, indem wir durch die Klammern eine *reine* Impulsdifferentiation andeuten, bei welcher die Koordinaten — dem Begriff des Impulses entsprechend — unverändert bleiben. Wir erhalten also

$$Dp_\iota = (dp_\iota) + C_\iota = k_\iota \cdot dt.$$

Die ganze Schwierigkeit ist jetzt auf die Interpretation der Funktionen

$$C_\iota = \underset{\lambda}{\mathrm{S}} \underset{\varkappa}{\mathrm{S}} \gamma_{\lambda\varkappa}^{(\iota)} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\varkappa$$

reduziert. Alle Wahrscheinlichkeit spricht dafür, dafs diese Funktionen C_ι, in denen die Koeffizienten $\gamma_{\lambda\varkappa}^{(\iota)}$ mit den **Christoffelschen** Symbolen $\begin{bmatrix} \lambda,\varkappa \\ \iota \end{bmatrix}$ identisch sind, Komponenten — oder doch einfache Kombinationen der Komponenten — einer Zentrifugalbeschleunigung sind. Doch ist es mir bisher nicht gelungen, dies nachzuweisen und damit den speziellen Sachverhalt vollständig klarzulegen. Vielleicht dienen

diese Bemerkungen zur Anregung weiterer Untersuchungen über diesen für die Kinetik durchaus nicht unwesentlichen Gegenstand.

19. *Explizite Form der Lagrangeschen Gleichungen.* — Hamilton benutzt bekanntlich neben der Funktion $E = \frac{1}{2} \underset{\iota}{S} \underset{\varkappa}{S} \varepsilon_{\iota,\varkappa} \dot{q}_\iota \dot{q}_\varkappa$ noch die reziproke Funktion $E = \frac{1}{2} \underset{\iota}{S} \underset{\varkappa}{S} \eta_{\iota,\varkappa} p_\iota p_\varkappa$, welche mit der ersten durch die linearen Beziehungen $\bar{\varepsilon}_\iota \bar{v} = p_\iota$ verbunden ist. Wir verwenden nun die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\iota} = p_\iota, \quad \frac{\partial F}{\partial p_\iota} = \dot{q}_\iota, \quad \frac{\partial F}{\partial q_\iota} = -\frac{\partial E}{\partial q_\iota}$$

zu einer expliziten Darstellung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, die wir den Untersuchungen über die Kinetostatik der Gelenksysteme zu Grunde legen. Zunächst ist

$$\ddot{q}_\iota = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial p_\iota} = \underset{\varkappa}{S} \frac{\partial_2 F}{\partial p_\iota \partial p_\varkappa} \cdot \frac{dp_\varkappa}{dt} + \underset{\varkappa}{S} \frac{\partial_2 F}{\partial p_\varkappa \partial q_\varkappa} \cdot \dot{q}_\varkappa.$$

Aus der gewöhnlichen Form der Lagrangeschen Gleichungen folgt:

$$\frac{dp_\iota}{dt} = k_\iota = \frac{\partial F}{\partial q_\iota}.$$

Hierdurch geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{d q_\iota}{dt} = \underset{\varkappa}{S} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial p_\iota \partial q_\varkappa} \frac{\partial F}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial^2 F}{\partial p_\iota \partial p_\varkappa} \frac{\partial F}{\partial q_\varkappa} \right] + \underset{\varkappa}{S} \frac{\partial^2 F}{\partial p_\iota \partial p_\varkappa} \cdot k_\varkappa. \tag{38}$$

Das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung ist eine homogene Funktion zweiten Grades der Gröfsen $p_1, p_2, \ldots, p_i$, also auch der Gröfsen $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\iota$. Das nachfolgende Glied enthält aufser den Lagrangeschen allgemeinen Kraftkomponenten $k_1, k_2, \ldots, k_i$ nur die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_i$. Wir können deshalb die Gleichung (38) auch noch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{d q_\iota}{dt} = \underset{\lambda}{S} \underset{\varkappa}{S} \alpha^{(\iota)}_{\lambda,\varkappa} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\varkappa + \underset{\varkappa}{S} \eta_{\iota,\varkappa} \cdot k_\varkappa. \tag{39}$$

Hierin sind die Koeffizienten $\alpha^{(\iota)}_{\lambda,\varkappa}$ und $\eta_{\iota,\varkappa}$ bekannte Funktionen der Koordinaten. Die Gröfsen $\alpha^{(\iota)}_{\lambda,\varkappa}$ lassen sich unmittelbar durch die Christoffelschen Symbole zweiter Art, welche durch $\left\{ {\lambda, \varkappa \atop \iota} \right\}$ bezeichnet werden, ausdrücken. Doch scheint es nicht nötig, jetzt schon auf diese Beziehungen weiter einzugehen. Die $\eta_{\iota,\varkappa}$ sind die Koeffizienten in der reziproken Funktion F.

20. *Die Rodrigues-Cayleyschen Positionskoordinaten für das starre System.* — Hier knüpfe ich, um die Ableitungen möglichst abzukürzen, an die Theorie des Kreisels von F. Klein und A. Sommerfeld an. In diesem Werke (S. 21 und 43) sind die Komponenten σ_1, σ_2, σ_3 des Vektors der Rotationsgeschwindigkeit durch 4 Quaternionenkomponenten A, B, C, D in der folgenden Weise ausgedrückt:

$$(40)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_1 = D\dot{A} - A\dot{D} - (B\dot{C} - C\dot{B}), \\ \frac{1}{2}\sigma_2 = D\dot{B} - B\dot{D} - (C\dot{A} - A\dot{C}), \\ \frac{1}{2}\sigma_3 = D\dot{C} - C\dot{D} - (A\dot{B} - B\dot{A}). \end{cases}$$

Eigentlich stehen dort auf S. 43 komplexe Verbindungen der σ, aber die Gleichungen (40) ergeben sich ohne weiteres daraus. Wir nehmen nun an, A, B, C seien die Komponenten eines Vektors $\bar{\lambda}$. Dann lassen sich die Gleichungen (40) in eine einzige Vektorgleichung zusammenziehen, nämlich:

$$(41)\qquad \tfrac{1}{2}\bar{\sigma} = \mu^2 \frac{d\,\bar{\lambda}}{dt\,\mu} - \overline{\dot{\bar{\lambda}}\bar{\lambda}},$$

wo zur Abkürzung

$$1 - \bar{\lambda}\bar{\lambda} = 1 - \lambda^2 = \mu^2$$

gesetzt ist. Führen wir noch einen zweiten Vektor $\bar{\varkappa}$ durch die Gleichung

$$\bar{\lambda} = \mu\bar{\varkappa}$$

ein, dann wird $\mu^2 + \mu^2\varkappa^2 = 1$ und

$$(42)\qquad \bar{\sigma} = \frac{1}{1+\varkappa^2}(\dot{\bar{\varkappa}} - \overline{\varkappa\dot{\varkappa}}).$$

Diese schöne Gleichung, welche die $\bar{\sigma}$ durch die hinreichende und notwendige Anzahl von Koordinaten ausdrückt, hat Cayley (Cambr. and Dublin J. vol. 1. 1846) mitgeteilt und darauf eine sehr elegante Theorie der Rotation starrer Körper aufgebaut. Obwohl in Somoffs Kinematik auf diese Arbeit verwiesen ist, so scheint sie doch nicht diejenige Beachtung gefunden zu haben, die sie nach unserer Ansicht verdient. Aus der Gleichung (42) ergeben sich die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit in der übersichtlichen und symmetrischen Form:

$$(43)\qquad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{2}{1+\varkappa^2}[\dot{\varkappa}_1 - (\varkappa_2\dot{\varkappa}_3 - \varkappa_3\dot{\varkappa}_2)], \\ \sigma_2 = \frac{2}{1+\varkappa^2}[\dot{\varkappa}_2 - (\varkappa_3\dot{\varkappa}_1 - \varkappa_1\dot{\varkappa}_3)], \\ \sigma_3 = \frac{2}{1+\varkappa^2}[\dot{\varkappa}_3 - (\varkappa_1\dot{\varkappa}_2 - \varkappa_2\dot{\varkappa}_1)]. \end{cases}$$

Setzt man diese Gröfsen in den Wert für die kinetische Energie E ein, so kann man aus dem so erhaltenen Ausdrucke ohne weiteres die Bewegungsgleichungen von **Lagrange** ableiten, da die $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ unabhängige Positionskoordinaten sind.

21. *Der Vektor B.* — Ebenso wie wir die Energie E eines Systems mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden in den allgemeinen **Lagrange**schen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_i$ darstellen konnten, ist dies auch für den Systemvektor $\overline{\mathrm{B}}$ ausführbar. Wir wollen uns jedoch hier auf den Elementarvektor $\overline{B}$ für einen freien materiellen Punkt ($m = 1$) beschränken. Dann ist in der Definitionsgleichung

$$\overline{B} = \overline{\dot{\bar{x}}\ddot{\bar{x}}}$$

zu setzen

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varepsilon}_1 \dot{q}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \dot{q}_2 + \bar{\varepsilon}_3 \dot{q}_3 = \bar{v}$$

und dementsprechend

$$\ddot{\bar{x}} = \bar{\varepsilon}_1 \ddot{q}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \ddot{q}_2 + \bar{\varepsilon}_3 \ddot{q}_3 + \dot{\bar{\varepsilon}}_1 \dot{q}_1 + \dot{\bar{\varepsilon}}_2 \dot{q}_2 + \dot{\bar{\varepsilon}}_3 \dot{q}_3.$$

Die Ausführung dieser Substitution ergiebt unmittelbar:

$$\begin{aligned} \overline{B} = {} & \overline{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2}(\dot{q}_1 \ddot{q}_2 - \dot{q}_2 \ddot{q}_1) + \overline{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3}(\dot{q}_2 \ddot{q}_3 - \dot{q}_3 \ddot{q}_2) + \overline{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_1}(\dot{q}_3 \ddot{q}_1 - \dot{q}_1 \ddot{q}_3) \\ & + (\overline{\bar{\varepsilon}_1 \dot{\bar{\varepsilon}}_2} + \overline{\bar{\varepsilon}_2 \dot{\bar{\varepsilon}}_1}) \dot{q}_1 \ddot{q}_2 + \overline{\bar{\varepsilon}_1 \dot{\bar{\varepsilon}}_1} \dot{q}_1^2 \\ & + (\overline{\bar{\varepsilon}_2 \dot{\bar{\varepsilon}}_3} + \overline{\bar{\varepsilon}_3 \dot{\bar{\varepsilon}}_2}) \dot{q}_2 \ddot{q}_3 + \overline{\bar{\varepsilon}_2 \dot{\bar{\varepsilon}}_2} \dot{q}_2^2 \\ & + (\overline{\bar{\varepsilon}_3 \dot{\bar{\varepsilon}}_1} + \overline{\bar{\varepsilon}_1 \dot{\bar{\varepsilon}}_3}) \dot{q}_3 \ddot{q}_1 + \overline{\bar{\varepsilon}_3 \dot{\bar{\varepsilon}}_3} \dot{q}_3^2. \end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dafs die Gleichungen

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_1 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_2 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_2}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_3 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_3}$$

bestehen, so erkennt man ohne weiteres, dafs $\overline{B}$ in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\overline{B} = \overline{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3}(\dot{q}_2 \ddot{q}_3 - \dot{q}_3 \ddot{q}_2) + \overline{\bar{\varepsilon}_3 \bar{\varepsilon}_1}(\dot{q}_3 \ddot{q}_1 - \dot{q}_1 \ddot{q}_3) + \overline{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2}(\dot{q}_1 \ddot{q}_2 - \dot{q}_2 \ddot{q}_1) + H,$$

worin H eine homogene Funktion **dritten** Grades der Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ bedeutet. Setzt man noch

$$\overline{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3} = \bar{\varepsilon}_1', \quad \overline{\bar{\varepsilon}_3 \bar{\varepsilon}_1} + \bar{\varepsilon}_2', \quad \overline{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2} = \bar{\varepsilon}_3',$$

so ist

$$\bar{v} = \bar{\varepsilon}_1' p_1 + \bar{\varepsilon}_2' p_2 + \bar{\varepsilon}_3' p_3,$$

so dafs man $\overline{B}$ auch durch die Gröfsen $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ und p_1, p_2, p_3 ausdrücken kann. Die eintretenden Gröfsen $\bar{\varepsilon}_i'$ und $\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}$ sind Funktionen der q_i.

Als *Systemvektor* wollen wir $\bar{\ddot{\mathrm{B}}}$ nur für den rotierenden starren Körper bestimmen. Wir setzen hierzu in

$$\bar{\mathrm{B}} = \Sigma m \overline{\dot{x}\ddot{x}}$$

die Werte von $\bar{\dot{x}}$ und $\bar{\ddot{x}}$ ein, nämlich

$$\bar{\dot{x}} = \overline{\sigma x} \quad \text{und} \quad \bar{\ddot{x}} = \overline{\dot{\sigma} x} + (\bar{\sigma} x) \cdot \bar{\sigma} - \sigma^2 \cdot \bar{x}$$

und erhalten nach einigen Reduktionen:

$$\mathrm{B} = \Sigma m (\overline{\sigma x} \cdot \bar{\dot{\sigma}}) \cdot \bar{x} - \Sigma m (\sigma \bar{x})^2 + \Sigma m (\sigma^2 x^2) \cdot \bar{\sigma}.$$

Nun ist aber

$$\Sigma m(\sigma^2 x^2) - \Sigma m(\bar{\sigma} \bar{x})^2 = \Sigma m \overline{\sigma x}\,\overline{\sigma x} = 2\,\mathrm{E}.$$

Mithin wird

$$\bar{\mathrm{B}} = 2\,\mathrm{E} \cdot \bar{\sigma} + \bar{\mathrm{G}},$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\bar{\mathrm{G}} = \Sigma m(\overline{\dot{\sigma}\sigma} \cdot \bar{x})\bar{x}$$

setzen.

Die Komponenten dieses Vektors sind:

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{G}}_1 = (\dot{\sigma}_2\sigma_3 - \dot{\sigma}_3\sigma_2)\mathrm{T}_{11} + (\dot{\sigma}_3\sigma_1 - \dot{\sigma}_1\sigma_3)\mathrm{T}_{12} + (\dot{\sigma}_1\sigma_2 - \dot{\sigma}_2\sigma_1)\mathrm{T}_{13}, \\ \overline{\mathrm{G}}_2 = (\dot{\sigma}_2\sigma_3 - \dot{\sigma}_3\sigma_2)\mathrm{T}_{21} + (\dot{\sigma}_3\sigma_1 - \dot{\sigma}_1\sigma_3)\mathrm{T}_{22} + (\dot{\sigma}_1\sigma_2 - \dot{\sigma}_2\sigma_1)\mathrm{T}_{23}, \\ \overline{\mathrm{G}}_3 = (\dot{\sigma}_2\sigma_3 - \dot{\sigma}_3\sigma_2)\mathrm{T}_{31} + (\dot{\sigma}_3\sigma_1 - \dot{\sigma}_1\sigma_3)\mathrm{T}_{32} + (\dot{\sigma}_1\sigma_2 - \dot{\sigma}_2\sigma_1)\mathrm{T}_{33}, \end{cases}$$

worin

$$\mathrm{T}_{\lambda\mu} = \Sigma m x_\lambda x_\mu$$

bedeutet.

Ist die Winkelbeschleunigung Null, oder fällt der Vektor derselben in die Richtung der Winkelgeschwindigkeit, so verschwindet der Vektor $\bar{\mathrm{G}}$, und $\bar{\mathrm{B}}$ erhält alsdann die Richtung der Momentanachse. $\bar{\mathrm{B}}$ ist dann sowohl der kinetischen Energie als auch der Winkelgeschwindigkeit des Systems proportional. Die Komponenten von $\bar{\ddot{\mathrm{B}}}$ sind also in diesem besonderen Falle homogene Funktionen dritten Grades der Komponenten der Winkelgeschwindigkeit.

22. *Die Eulerschen Gleichungen für Gelenkketten.* — Im ersten Hefte der „Theorie des Kreisels“ von F. Klein und A. Sommerfeld auf S. 154 finden wir den folgenden Gesichtspunkt von allgemeinerem kinetischen Interesse dargelegt: „Die Eulerschen Gleichungen nehmen in dem System der Mechanik eine ganz singuläre Stellung ein und ordnen sich dem allgemeinen Typus der mechanischen Differentialgleichungen, wie er von Lagrange aufgestellt ist, nicht unter. Auch ist es nicht möglich, bei beliebigen mechanischen Systemen Gleichungen

aufzustellen, welche ähnliche Vorteile darbieten, wie die Eulerschen Gleichungen bei dem starren Körper."

Die Frage, ob für ein gegebenes System kinetische Gleichungen in der typischen Eulerschen Form aufgestellt werden können, ist für uns im Anschlufs an die bisherige allgemeine Auseinandersetzung in bestimmter Weise beantwortbar. Ist es nämlich gelungen, die für das System charakteristischen analytischen Ausdrücke des Geschwindigkeitssystems durch die hinreichende und notwendige Anzahl *rein kinematischer* Vektoren (Parameter) aufzufinden und aufserdem die erforderlichen Transitivitätsgleichungen für die letzteren aufzustellen, so ergiebt das D'Alembertsche Prinzip in der Integralform

$$[\delta' \mathrm{A}_r]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\delta \mathrm{E} + \delta' \mathrm{A}_k) dt$$

oder für Impulse in der einfacheren Form

$$\delta' \mathrm{A}_r = \delta' \mathrm{A}_h$$

stets die notwendige Anzahl von Vektorgleichungen, welche zur Gattung der Eulerschen Bewegungsgleichungen resp. Impulsgleichungen gehören.

Die Lagrangeschen Gleichungen — im engeren Sinne des Wortes — kann man im allgemeinen nur aufstellen, wenn das Geschwindigkeitssystem durch die hinreichende und notwendige Anzahl von *Koordinaten* und ihrer ersten Derivirten nach der Zeit darstellbar ist.

Gelingen also für ein bestimmtes materielles System *beide* Darstellungen: die kinematische und die geometrische, so steht nichts im Wege, die kinetischen Grundgleichungen in beiderlei Form aufzustellen, vorausgesetzt, dafs nötigenfalls die Transitivitätsgleichungen bekannt sind. Für die Impulsgleichungen ist natürlich die letzte Forderung überflüssig.

Eine besonders wichtige Klasse von Systemen, für welche zunächst Gleichungen von dem Typus der Eulerschen existieren, sind die *Gelenkketten*, da sich ihnen die technischen Maschinen — im allgemeinen Sinne — unterordnen. Die Gelenkverbindungen starrer Teilsysteme sind allerdings in der Praxis sehr beschränkt. Sie reduzieren sich im wesentlichen auf Kugelgelenke, zylindrische Zapfenführungen und ebene Geradführungen. Wir betrachten im folgenden nur Kugelgelenke, weil die anderen Fälle leicht auf diesen Fall zurückführbar sind, oder doch jedenfalls auf kinetische Gleichungen führen, welche von den hier zu behandelnden prinzipiell nicht abweichen.

Wir denken uns, um die Vorstellung des Systems zu präzisieren, als Ausgangspunkt ein festes Kugelgelenk (oder auch mehrere solcher

— wodurch die Behandlung nicht erschwert wird). In dieses möge ein beliebig gestalteter fester Körper mit einem Kugelzapfen dauernd eingreifen. Dieser erste Körper stützt in gleicher Weise einen zweiten oder anderen und so weiter. Diese mehrgliedrige Gelenkkette kann *offen* sein, d. h. das letzte Glied ist nicht weiter gestützt; oder es kann *geschlossen* sein, indem man es noch zwingt, sich in einer vorgeschriebenen Führung zu bewegen.

Der Einfachheit wegen wollen wir für die nachfolgende Rechnung eine am Ende offene Gelenkkette aus zwei starren Gliedern bestehend betrachten, da dieser Fall schon hinreicht, um das Charakteristische der kinetischen Grundgleichungen zur Anschauung zu bringen.

Das erste Glied der Kette kann also nur Rotationen ausführen, welche durch einen Drehvektor $\overline{\sigma'}$ darstellbar sind. Das entsprechende Geschwindigkeitssystem ist demnach $\dot{\overline{x}} = \overline{\sigma' a'}$, wenn wir den ortsbestimmenden Vektor eines beliebigen materiellen Punktes dieses Teilsystems mit $\overline{a'}$ bezeichnen. Der Bezugspunkt des $\overline{a'}$ ist selbstverständlich der Mittelpunkt des festen Kugelgelenkes. Von demselben Punkte ziehen wir einen Vektor $\overline{c'}$ nach dem Mittelpunkte des beweglichen Kugelgelenkes und nennen den Vektor der Geschwindigkeit dieses zweiten Punktes $\dot{\overline{c}}'$. Dann ist $\dot{\overline{c}}' = \overline{\sigma' c'}$. Die Punkte des zweiten Systemteiles mögen durch die Gleichung

$$\overline{x''} = \overline{c'} + \overline{a''}$$

im Raume festgelegt sein. Die relativen Vektoren $\overline{a''}$ sind also auf den Mittelpunkt des beweglichen Kugelgelenkes bezogen. Bezeichnen wir noch den zugehörigen Drehvektor mit $\overline{\sigma''}$, so besteht die Gleichung:

$$\dot{\overline{x}}'' = \overline{\sigma' c'} + \overline{\sigma'' a''},$$

und man erhält die zugehörigen Elementarbewegungen in der Form:

$$\delta \overline{x'} = \overline{\delta\theta' \cdot a'}, \quad \delta \overline{x''} = \overline{\delta\theta' \cdot c'} + \overline{\delta\theta'' a''}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich die kinetischen **Impulsgleichungen** für das zusammengesetzte System aufstellen. Für einen materiellen Punkt des ersten Teilsystems (mit der Masse = Eins) ist

$$\delta' A'_e = \overline{\dot{x}' \delta x'} = \overline{\sigma' a'} \cdot \overline{\delta\theta' \cdot a'}$$

oder

$$\delta' A'_e = (\overline{\sigma'}\overline{\delta\theta'})(\overline{a'}\overline{a'}) - (\overline{a'}\overline{\delta\theta'})(\overline{a'}\overline{\sigma'}).$$

Nun ist aber das Moment der Geschwindigkeit dieses Systempunktes

$$\overline{M'_a} = \overline{a'(\sigma' a')} = \overline{\sigma'} \cdot (\overline{a'}\overline{a'}) - \overline{a'} \cdot (\overline{a'}\overline{\sigma'}).$$

Folglich wird

$$\delta' A'_e = \overline{M'_e} \cdot \delta\theta'. \tag{45}$$

Für einen Punkt ($m'' = 1$) des zweiten Teilsystems haben wir:

$$\delta' A''_e = \overline{\dot{x}''\delta x''} = [\overline{(\sigma' c') + (\sigma'' a'')}][\overline{(\delta\theta' \cdot c') + (\delta\theta'' \cdot a'')}]$$

oder entwickelt:

$$\delta' A''_e = \overline{\sigma' c'} \cdot \overline{\delta\theta' \cdot c'} + \overline{\sigma' c'}\ \overline{\delta\theta'' \cdot a''} + \overline{\sigma'' a''}\ \overline{\delta\theta' c'} + \overline{\sigma'' a''}\ \overline{\delta\theta'' a''}.$$

Das erste und das vierte Glied dieses Ausdruckes für $\delta' A''_e$ lassen sich sich schreiben:

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma' c'}\ \overline{\delta\theta' c'} &= (\bar{\sigma}' \bar{\delta\theta}')(\bar{c}' \bar{c}') - (\bar{c}' \overline{\delta\theta}')(\sigma' \bar{c}') \\
&= c'(\overline{\sigma' c'})\overline{\delta\theta}' = \overline{M}' c \overline{\delta\theta}', \\
\overline{\sigma'' a''}\ \overline{\delta\theta'' a''} &= (\bar{\sigma}'' \overline{\delta\theta}'')(a'' \bar{a}'') - (\bar{a}'' \overline{\delta\theta}'')(\sigma'' \bar{a}'') \\
&= \bar{a}''(\overline{\sigma'' a''}) \cdot \overline{\delta\theta}'' = \overline{M}''_a \overline{\delta\theta}'',
\end{aligned}$$

worin $\overline{M}'_c$ und $\overline{M}''_a$ hinreichend definierte Geschwindigkeitsmomente sind. Weniger einfach ist die Auffassung der beiden mittleren Glieder des Ausdruckes für $\delta A''_e$. Hier wollen wir zwei neue Vektoren $\overline{A}''$ und $\overline{C}''$ einführen, deren Gröfse und Richtung aus den Gleichungen

$$\overline{\sigma' c'}\ \overline{\delta\theta'' a''} = \overline{A}'' \delta\theta'', \quad \overline{\sigma'' a''}\ \overline{\delta\theta' c'} = \overline{C}'' \overline{\delta\theta}'$$

zu ermitteln sind. Auf diese Weise erhalten wir den Ausdruck:

$$\delta'' A''_e = \overline{M}'_c \overline{\delta\theta}' + \overline{M}''_a \overline{\delta\theta}'' + \overline{C}'' \overline{\delta\theta}' + \overline{A}'' \delta\theta''. \tag{46}$$

Von den Gleichungen (45) und (46) ist jetzt zu den entsprechenden Systemgleichungen durch Summation der Elementargröfsen überzugehen. Wir setzen

$$\Sigma' m' \overline{M}'_a = \overline{\mathrm{M}}'_a, \quad \Sigma'' m'' \overline{M}''_a = \overline{\mathrm{M}}''_a, \quad \Sigma'' m'' \overline{A}'' = \overline{\mathrm{A}}'', \quad \Sigma'' m'' \overline{C}'' = \overline{\mathrm{C}}''$$

und erhalten

$$\delta' \mathrm{A}_e = \overline{\mathrm{M}'_a + \mathrm{M}'_c + \mathrm{M}''} \cdot \overline{\delta\theta}' + \overline{\mathrm{M}''_a + \mathrm{A}''} \cdot \overline{\delta\theta}''. \tag{47}$$

Ferner ist mit Berücksichtigung des Geschwindigkeitssystems für die eingeprägten Impulse:

$$\begin{aligned}
\delta' A'_h &= \bar{h}' \overline{\delta\theta' a'} = \overline{a' h'}\ \overline{\delta\theta}', \\
\delta' A''_h &= \bar{h}'' \overline{\delta\theta' c'} + \bar{h}'' \overline{\delta\theta'' a''} \\
&= \overline{c' h''} \cdot \overline{\delta\theta}' + \overline{a'' h''} \cdot \overline{\delta\theta}''
\end{aligned}$$

und durch Übergang zu den Teilsystemen:

$$\delta' A_h' = \Sigma' \overline{a'h'} \cdot \overline{\delta\theta'} = \overline{M_h'} \cdot \overline{\delta\theta'},$$

$$\delta' A_h'' = \Sigma'' \overline{c'h''} \cdot \overline{\delta\theta'} + \Sigma'' \overline{a''h''} \cdot \overline{\delta\theta''}$$
$$= \overline{c'h''} \cdot \overline{\delta\theta'} + \overline{M_h''} \cdot \overline{\delta\theta''},$$

wo $\Sigma'' \overline{h''} = \overline{h''}$ gesetzt ist.

Führt man diese Werte in die Gleichung

$$\delta' A_h = \delta' A_v$$

ein, so erhält man die Impulsformeln:

$$(48) \qquad \begin{cases} \overline{M_h'} + \overline{c'h''} = \overline{M_a'} + \overline{M_c'} + \overline{C''}, \\ \overline{M_h''} \qquad\qquad = \overline{M_a''} + \overline{A''}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen können die 6 Gröfsen σ_1', σ_2', σ_3' und σ_1'', σ_2'', σ_3'' bestimmt werden, sobald die wirkenden Impulse gegeben sind. Die Vektoren $\overline{M_a'}$, $\overline{M_a''}$, $\overline{A''}$ und $\overline{C''}$ sind natürlich von den Trägheitsmomenten und Deviationsmomenten der Teilsysteme abhängig.

Der Übergang zu den Eulerschen Bewegungsgleichungen ist nun verhältnismäfsig einfach. Denn wir haben nur in der Gleichung

$$\left[\delta' A_v\right]_{t_1}^{t} = \int_{t_1}^{t} [\delta E + \delta A]\, dt$$

noch den Ausdruck für die Gröfse δE zu bilden. Nun ist für einzelne materielle Punkte (mit den Massen $m' = 1$ und $m'' = 1$):

$$E = \tfrac{1}{2} (\overline{\sigma' a'}) (\overline{\sigma' a'}) \quad \text{und} \quad \delta E' = \overline{M_a'} \cdot \delta\sigma',$$

sowie

$$E'' = \tfrac{1}{2} \left[(\overline{\sigma' c'}) + (\overline{\sigma'' a''})\right] \left[(\overline{\sigma' c'}) + (\overline{\sigma'' a''})\right].$$

Mithin wird

$$\delta E'' = \overline{M_c'} \overline{\delta\sigma'} + \overline{M_a''} \overline{\delta\sigma''} + \overline{C''} \overline{\delta\sigma'} + \overline{A''} \overline{\delta\sigma''}.$$

Daraus folgt durch Einführung der Massen und Summation über die Teilsysteme:

$$\delta \mathrm{E} = \overline{\mathrm{M}_a' + \mathrm{M}_c' + \mathrm{C}''} \cdot \overline{\delta\sigma'} + \overline{\mathrm{M}_a'' + \mathrm{A}''} \cdot \overline{\delta\sigma'}.$$

Die Transitivitätsgleichungen sind

$$\overline{\delta\sigma'} = \frac{d}{dt} \overline{\delta\theta'} + \overline{\sigma' \delta\theta'},$$

$$\overline{\delta\sigma''} = \frac{d}{dt} \overline{\delta\theta''} + \overline{\sigma'' \delta\theta''}.$$

Führt man diese Werte in die Integralgleichung ein, und berück-

sichtigt man, daſs die Reduktion der Zeitkräfte $\bar{k}'$ und $\bar{k}''$ dieselbe ist, wie in dem Falle der Impulse, so erhält man die Eulerschen Bewegungsgleichungen für das zweigliedrige Gelenksystem in der Vektorform:

$$(49) \qquad \begin{cases} \left(\frac{d\overline{\mathrm{R}'}}{dt}\right) + \overline{\sigma'\mathrm{R}'} = \mathrm{M}_k' + \overline{c'k''}, \\ \left(\frac{d\overline{\mathrm{R}''}}{dt}\right) + \overline{\sigma''\mathrm{R}''} = \overline{\mathrm{M}_k''}, \end{cases}$$

wobei noch zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\overline{\mathrm{M}_a'} + \overline{\mathrm{M}_c'} + \overline{\mathrm{C}''} = \mathrm{R}', \quad \overline{\mathrm{M}_a''} + \overline{\mathrm{A}''} = \overline{\mathrm{R}''}, \quad \Sigma\bar{k}'' = \bar{\mathrm{k}}''.$$

Die Vektoren $\left(\frac{d\overline{\mathrm{A}''}}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d\overline{\mathrm{C}''}}{dt}\right)$ haben eine gewisse Analogie zu der zusammengesetzten Zentripetalbeschleunigung, welche Coriolis bei der Betrachtung der relativen Bewegung eines einzelnen Massenpunktes eingeführt hat.

Für unsere aus starren Gliedern bestehenden Gelenkketten lassen sich natürlich auch Lagrangesche Gleichungen in allgemeinen Koordinaten aufstellen. Man könnte dazu die Rodrigues-Cayleyschen Ausdrücke für jedes Teilsystem aufstellen, die kinetische Energie E des ganzen Systems bilden und würde nach den bekannten Vorschriften die expliziten Bewegungsgleichungen gewinnen. In dem oben durchgeführten speziellen Beispiele würden 6 Lagrangesche Gleichungen resultieren, die zur Bestimmung der Bewegung des Systems vollständig ausreichen.

Die Gleichungen (49) sind immer vorzuziehen, wenn die Bewegung ohne Einwirkung äuſserer Kräfte erfolgt. Für die technische Mechanik ist dieser theoretisch interessante Fall ohne Bedeutung, denn hier fehlen die treibenden Kräfte niemals. Doch wird man bei der Behandlung kinetischer Maschinenprobleme auch ebensowenig veranlaſst, so allgemeine Geschwindigkeitssysteme zu betrachten, wie wir sie in der obigen Auseinandersetzung vorausgesetzt haben. Jedenfalls aber ist die bestimmte Auffassung allgemeinerer Bewegungsvorgänge auch dann von einer gewissen Bedeutung, wenn ihre praktische Realisierung fernliegt.

E. Die Bestimmung der Reaktionen.

23. *Einführung der Schnittreaktionen.* — Wenn ein einfacher starrer Körper sich in seiner allgemeinsten Bewegungsform befindet, so wird die Kohäsion seiner Teile in veränderlicher Weise in Anspruch genommen. Diese inneren Kräfte können bei den idealen Gebilden, welche wir starre Systeme nennen, jeden beliebigen Wert annehmen, da wir die Widerstands-

fähigkeit derselben stillschweigend als eine unbegrenzte annehmen. Der Wirklichkeit entspricht aber diese Systemhypothese keineswegs. Wird vielmehr ein fester Körper in eine allgemeine Bewegung (Translation und Rotation) versetzt, so können die inneren Spannungen so grofse Werte erreichen, dafs die Kohäsionskräfte an einzelnen Stellen oder in bestimmten Flächengebieten nicht mehr ausreichen, um das Zusammenhalten der Teile aufrecht zu erhalten. Der Körper zerspringt, und es entsteht eine neue Bewegungserscheinung. Aber selbst, wenn wir bei wirklichen — als starr vorausgesetzten — Systemen von dieser Katastrophe absehen, welche einem bestimmten Geschwindigkeitszustande entspricht, so wird doch bei wachsender Geschwindigkeit eine Vermehrung der Spannungen eintreten, die es nicht mehr gestattet, die Hypothese der „Starrheit" des Systems aufrecht zu erhalten, indem elastische oder plastische Deformationen von merklicher Gröfse eintreten. Dasselbe gilt in noch höherem Mafse für Gelenksysteme, welche aus „starren", d. h. in erster Annäherung als starr vorausgesetzten Gliedern bestehen. In diesem Sinne hat auch die Kinetik der Maschinen, und insbesondere der Kraftmaschinen mit hin- und hergehenden Teilen Anlafs gegeben, den *Spannungen* eine gesonderte Aufmerksamkeit neben den Bewegungsbegriffen einzuräumen. Die quantitative Bestimmung der Reaktionen bewegter Massensysteme ist also ein wichtiges Kapitel der technischen Mechanik und verdient als solche eine systematische Bearbeitung.

Um die Vorstellung der Systemreaktionen zu fixieren, denken wir uns das ganze zusammenhängende materielle System durch einen Flächenschnitt geometrisch in zwei Teile zerlegt, ohne an dem Kräftesystem und dem bestehenden Geschwindigkeitszustande irgend etwas zu ändern. Wird der physische Zusammenhang längs der trennenden Schnittfläche plötzlich aufgehoben, so mufs im allgemeinen jedes Teilsystem von diesem Augenblicke an eine neue Bewegungsform beginnen. Alle Reaktionen des einen Stückes setzen sich zu einem Resultantensystem zusammen, das nach dem D'Alembertschen Prinzip oder dem Newtonschen Grundsatze der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, dem Resultantensystem der Reaktionen des anderen Stückes äquivalent im entgegengesetzten Sinne ist. Der Systemzerlegung in zwei Stücke entspricht die Zerlegung der Gesamtenergie E in zwei Teile E' und E'', sodafs

$$E = E' + E''$$

wird. Wir wollen ferner annehmen, das ganze System sei durch Koordinaten so festgelegt, dafs für die Impulswirkung die Lagrangeschen Gleichungen

$$p_\iota = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\iota} = h_\iota \qquad (\iota = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

bestehen. Aus den Energieteilen E' und E'' leiten wir ebenfalls Gröfsen von dem kinetischen Charakter der p_ι ab, indem wir setzen

$$p_\iota' = \frac{\partial E'}{\partial \dot{q}_\iota}, \quad p_\iota'' = \frac{\partial E''}{\partial \dot{q}_\iota}.$$

Aus dem D'Alembertschen Prinzip folgt dann unmittelbar

$$p_\iota' = h_\iota' - r_\iota', \quad p_\iota'' = h_\iota'' - r_\iota'',$$

wo die Gröfsen r_ι', r_ι'' Komponenten der Resultantensysteme der Reaktionen nach den allgemeinen Koordinaten q_ι bedeuten. Da $r_\iota'' = -r_\iota'$ sein mufs, so genügt zur Bestimmung dieser Reaktionskomponenten eines der vorstehenden Gleichungssysteme, etwa

$$r_\iota' = h_\iota' - p_\iota'. \tag{50}$$

Die zur Berechnung der r_ι' erforderlichen Impulskomponenten h_ι' bestimmt man aus der Formel

$$\delta' A_h' = \Sigma' \bar{h} \cdot \delta \bar{x},$$

indem man darin die $\delta \bar{x}$ durch die q_ι und δq_ι ausdrückt, wodurch man die Gleichung

$$\delta' A_h' = \mathop{\mathrm{S}}_{\iota=1}^{\iota=i} h_\iota' \cdot \delta q_\iota$$

erhält.

Ist das System der Wirkung zeitlicher Kräfte (k) unterworfen, so benutzt man zur Bestimmung der Komponenten s_ι' die gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen

$$\dot{p}_\iota - \frac{\partial E}{\partial q_\iota} = k_\iota \qquad (\iota = 1, 2, 3, \ldots, i)$$

und gewinnt durch die erwähnte Systemspaltung die Reaktionsformeln

$$\dot{p}_\iota' - \frac{\partial E'}{\partial q_\iota} = k_\iota' - s_\iota' \quad \text{und} \quad \dot{p}_\iota'' - \frac{\partial E''}{\partial q_\iota} = k_\iota'' + s_\iota',$$

wo wieder

$$p_\iota' = \frac{\partial E'}{\partial \dot{q}_\iota} \quad \text{und} \quad p_\iota'' = \frac{\partial E''}{\partial \dot{q}_\iota}$$

zu setzen ist.

In ganz ähnlicher Weise kann man auch die Eulerschen Bewegungsgleichungen zur Bestimmung der entsprechenden Komponenten der Schnittreaktionen verwenden. Im Falle eines einfachen starren Körpers, der nicht unter dem Einflufs äufserer Kräfte steht, ist dieser Weg entschieden der einfachere.

24. *Explizite Darstellung der Schnittreaktionen.* — Bei Impulsproblemen hängen die Schnittreaktionen nur von den Positionskoordinaten und den auf das materielle System einwirkenden äufseren Impulsen ab.

Wirken aber auf das System Zeitkräfte, so ist auch noch der Geschwindigkeitszustand auf die Schnittreaktionen mafsgebend. Es können also in den Reaktionsgleichungen, welche wir oben durch allgemeine Koordinaten ausgedrückt haben, im ersten Falle die allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten $\dot{q}_\iota$ mittelst der Gleichungen $p_\iota = h_\iota$, im zweiten Falle die Beschleunigungskomponenten $\ddot{q}_\iota$ durch Benutzung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eliminiert werden, wodurch man zu expliziten Darstellungen der Schnittreaktionskomponenten gelangt.

Für die Impulsreaktionen

$$r'_\iota = h'_\iota - p'_\iota$$

ist dies aufserordentlich einfach. Transformieren wir die kinetische Energie E durch Einführung der $h_\iota = p_\iota$ an Stelle der $\dot{q}_\iota$ in die Hamiltonsche reziproke Funktion F, die nun eine homogene Funktion zweiten Grades der h_ι wird, so ist

$$\dot{q}_\iota = \frac{\partial F}{\partial h_\iota}.$$

Diese Werte setzt man in die nach den $\dot{q}_\varkappa$ lineare Gleichung

$$p'_\iota = \mathop{S}_{\varkappa=1}^{\varkappa=i} \eta'_{\iota\varkappa} \dot{q}_\varkappa$$

ein und erhält die Endgleichungen

$$r'_\iota = h'_\iota - \mathop{S}_{\varkappa=1}^{\varkappa=i} \eta'_{\iota\varkappa} \frac{\partial F}{\partial h_\iota} \tag{51}$$

zur expliziten Darstellung der Schnittreaktionen für Impulse. Die Koeffizienten $\eta'_{\iota\varkappa}$ sind bekannte Funktionen der Positionskoordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_i$.

Die analoge Betrachtung für Zeitkräfte vereinfacht sich sehr, wenn wir die Bewegungsgleichungen von Lagrange in der expliziten Form annehmen, die in Nr. **19** durch die Gleichungen (38) oder (39) dargestellt ist. Diese gestattet, die Gröfsen $\ddot{q}_1, \ddot{q}, \ldots, \ddot{q}_i$ unmittelbar in die Reaktionsformel

$$s'_\iota = k'_\iota + \frac{\partial E'}{\partial q_\iota} - \dot{p}'_\iota \tag{52}$$

einzusetzen. Denn es ist

$$p'_\iota = \mathop{S}_\varkappa \eta'_{\iota\varkappa} \cdot \dot{q}_\varkappa$$

und infolgedessen

$$\dot{p}'_\iota = \mathop{S}_\varkappa \mathop{S}_\lambda \gamma^{(\iota)}_{\varkappa\lambda} \dot{q}_\varkappa \dot{q}_\lambda + \mathop{S}_\varkappa \eta'_{\iota\varkappa} \cdot \ddot{q}_\varkappa.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung (52) und durch Zusammenfassen der Glieder gleicher Art erhält man für die Reaktionskomponenten die Endformeln

$$s_\iota' = k_\iota' - \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa=1}^{\varkappa=i} \eta_\varkappa^{(\iota)} k_\varkappa + \mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa=1}^{\varkappa=i} \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda=1}^{\lambda=i} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} \dot{q}_\varkappa \dot{q}_\lambda, \tag{53}$$

wo die Koeffizienten $\eta_\varkappa^{(\iota)}$ und $\varepsilon_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ nur von den Positionskoordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_i$ abhängig sind. Dieses Resultat lautet in Worten:

Die Lagrangeschen Komponenten der Schnittreaktion für ein Gelenksystem, auf welches beliebige äufsere Kräfte einwirken, setzen sich aus je zwei Teilen zusammen. Der erste Teil hängt nur von den bewegenden Kräften und den Positionskoordinaten ab, während der zweite — ebenso wie die kinetische Energie des ganzen Systems — durch eine homogene Funktion zweiten Grades der allgemeinen Geschwindigkeitskomponenten dargestellt wird.

Über die Gestalt des Systemschnittes haben wir bisher keine besonderen Voraussetzungen gemacht. Sind einzelne Glieder des Gelenksystemes cylindrisch gestreckte Körper, wie es bei Maschinen häufig ist, so wird man zur Erforschung der Querschnittsspannungen, welche in diesen Gliedern auftreten, meistens ebene Schnitte senkrecht zur Längsachse wählen. Will man dagegen die Drucke in den beweglichen Gelenken finden, deren Kenntnis für die Technik äufserst wichtig ist, so führt man den Systemschnitt längs der betreffenden Lagerfläche. Die Drücke in den unbeweglichen Lagern müssen besonders berechnet werden.

Hier kam es nur darauf an, die allgemeinen Ansätze zu geben, nach welchen auf Grund des D'Alembertschen Prinzips die Systemreaktionen bestimmbar sind, und damit zu zeigen, dafs die Lagrangeschen Ideen zur Lösung solcher Aufgaben vollständig ausreichen. Jedenfalls wird die rationelle Mechanik durch Aufnahme allgemeiner kinetostatischer Probleme neben den spezifisch statischen und kinetischen ihr Gebiet in fruchtbarer Weise erweitern können und damit durchaus berechtigten Anforderungen der Technik entgegenkommen.

25. *Die Fundamentreaktionen einfach oder mehrfach gestützter Gelenksysteme.* — Aus der D'Alembertschen Grundgleichung für Impulse

$$\bar{r} = \bar{h} - m\bar{\dot{x}}$$

leiten wir zunächst mit Berücksichtigung des ganzen Gelenksystems die Ausdrücke

$$\Sigma\bar{r} = \Sigma\bar{h} - \Sigma m\bar{\dot{x}}$$

und

$$\Sigma \overline{x r} = \Sigma \overline{x h} - \Sigma m \overline{x \ddot{x}}$$

ab und schreiben dieselben in der Form

$$(54) \qquad \begin{cases} \bar{\mathrm{r}} = \bar{\mathrm{h}} - \mathrm{m}\bar{\ddot{\mathrm{x}}}, \\ \overline{\mathrm{M}}_r = \overline{\mathrm{M}}_h - \overline{\mathrm{M}}_{\ddot{x}}. \end{cases}$$

Das starre und unbewegliche Fundament bildet mit dem Gelenksystem einen gröfseren materiellen Komplex. Folglich werden nach dem D'Alembertschen Prinzip die resultierenden Reaktionskomponenten $\bar{\mathrm{r}}$ und $\overline{\mathrm{M}}_r$, welche sich nur auf die beweglichen Teile beziehen, im allgemeinen nicht verschwinden. Sie werden von dem ruhenden Fundament als Druck und virtuelles drehendes Moment aufgenommen. Hierbei ist zu beachten, dafs der Vektor $\overline{\mathrm{M}}_r$ sich auf einen bestimmten statischen Reduktionspunkt bezieht und seinen Wert und seine Richtung ändert, sobald dieser Bezugspunkt seine Lage zum Fundament wechselt. Man wird aber wie bei jedem statischen Problem, welches den starren Körper betrifft, auch hier die Zentralachse bestimmen können und dadurch die Vektoren $\bar{\mathrm{r}}$ und $\overline{\mathrm{M}}_r$ in *einer* Richtung erhalten.

Stützt das starre Fundament das bewegliche System mit mehr als einem Auflagegelenk, so kann man die Frage stellen, wie sich in diesem Falle die Fundamentreaktionen auf die einzelnen Stützen verteilen. Man zerteilt jetzt die gemeinsame Unterlage in so viele Stücke, als Stützen vorhanden sind, giebt jedem Teile die entsprechenden virtuellen Bewegungen in Bezug auf das absolute Koordinatensystem und wendet zur Bestimmung der Einzelreaktionen das Lagrangesche Prinzip der virtuellen Arbeiten an.

Für die totalen Fundamentreaktionen bei zeitlich wirkenden Kräften treten an Stelle der Gleichungen (54) die folgenden:

$$(55) \qquad \begin{cases} \bar{\mathrm{s}} = \bar{\mathrm{k}} - \mathrm{m}\bar{\ddot{\mathrm{x}}}, \\ \overline{\mathrm{M}}_s = \overline{\mathrm{M}}_h - \overline{\mathrm{M}}_{\ddot{x}}. \end{cases}$$

Dieser Fall ist in der Maschinentheorie in einem speziellen Beispiele (parallele Kurbelgetriebe, welche auf eine gemeinsame Welle wirken) eingehender untersucht worden, weshalb wir im folgenden etwas näher darauf eingehen wollen.

26. *Das Problem der Ausgleichung der Massenwirkungen bei Gelenksystemen.* — Die Gröfsen $\bar{\mathrm{s}}$ und $\overline{\mathrm{M}}_s$ in den Gleichungen (55) bestehen aus je zwei Gliedern. Die ersten werden aus den auf das System

wirkenden äufseren Kräften abgeleitet und hängen deshalb von der Massenverteilung des ganzen Systems nicht ab. Die zweiten Glieder hat man durch passende Anordnung des Systems in dem Falle der mehrkurbeligen Dampfmaschine bis auf verschwindend kleine Restbeträge gleich Null gemacht und dadurch die Massenwirkung auf das Fundament praktisch eliminiert. Wir wollen nun in dem allgemeinen Falle die Bedingungen für das Verschwinden der Vektoren $\mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}}$ und $\overline{\mathrm{M}}_{\ddot{x}}$ bei Gelenkketten untersuchen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir in jedem starren Teilsystem den Schwerpunkt. Die von dem absoluten Bezugspunkte (O) gerechneten Vektoren der einzelnen Schwerpunkte seien der Reihe nach

$$\bar{x}_s', \; \bar{x}_s'', \; \ldots, \; \bar{x}_s^{(\nu)}, \; \ldots, \; \bar{x}_s^{(n)}.$$

Wählen wir dieselben als relative Bezugspunkte $(O', O''$, etc.) für Vektoren $\overline{a'}, \overline{a''}$, etc., welche die einzelnen materiellen Punkte der Teilsysteme festlegen, dann sind die absoluten Vektoren dieser Punkte:

$$\bar{x}^{(\nu)} = \bar{x}_s^{(\nu)} + \bar{a}^{(\nu)}.$$

Der Vektor des Schwerpunktes des ganzen Systems sei $\bar{x}_s$. Dann ist also

$$\Sigma m \bar{x} = \mathrm{m}\bar{\mathrm{x}}_s$$

und

$$\mathrm{m}\ddot{\bar{\mathrm{x}}} = \mathrm{m}\ddot{\bar{\mathrm{x}}}_s.$$

Folglich verschwindet die Reaktion $\mathrm{m}\ddot{\bar{\mathrm{x}}}$ nur, wenn die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes aller Teilsysteme während der Bewegung unverändert bleibt.

Zur Untersuchung der Momente bilden wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\overline{x^{(\nu)}\ddot{x}^{(\nu)}} &= \overline{(x_s^{(\nu)} + a^{(\nu)})(\ddot{x}_s^{(\nu)} + \ddot{a}^{(\nu)})} \\ &= \overline{x_s^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}} + \overline{x_s^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}} + \overline{a^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}} + \overline{a^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}}.\end{aligned}$$

und erhalten durch Summation

$$\Sigma^{(\nu)} m \overline{x^{(\nu)}\ddot{x}^{(\nu)}} = \Sigma^{(\nu)} m \overline{x_s^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}} + \Sigma^{(\nu)} m \overline{a^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}},$$

da die Gröfsen

$$\Sigma^{(\nu)} m \overline{x_s^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}}, \quad \Sigma^{(\nu)} m \overline{a^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}}$$

für den starren Körper verschwinden. Demnach wird

$$\overline{\mathrm{M}}_{\ddot{x}} = \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=n} m_\nu \overline{x_s^{(\nu)}\ddot{x}_s^{(\nu)}} + \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=n} \Sigma^{(\nu)} m \overline{a^{(\nu)}\ddot{a}^{(\nu)}},$$

wo zur Abkürzung $\Sigma^{(\nu)} m = m_{(\nu)}$ gesetzt ist. Bei mehrzylindrigen

Dampfmaschinen bleibt der Wert des zweiten Gliedes dieser Gleichung stets innerhalb enger Grenzen, weil sie die Gröfsenordnung der Rotationsbeschleunigungen hat. In diesem speziellen Falle sind aber die Bedingungen für den Ausgleich der Massenwirkung auf ein starres Fundament darstellbar in der Form

$$\frac{d x_s}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \mathop{\mathrm{S}}_{\nu=1}^{\nu=n} m_\nu \overline{x_s^{(\nu)} \dot{x}_s^{(\nu)}} = 0. \tag{56}$$

Die weitere Diskussion dieser Gleichungen ist Aufgabe der technischen Mechanik. Eine ausführliche Darstellung des Problems der Massenausgleichung giebt H. Lorenz in seiner „Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen" (1901).

F. Die kinetostatischen Beanspruchungen.

27. *Normalspannungen und Schubspannungen.* — Die Theorie der statischen Beanspruchungen wurde zuert an elastischen prismatischen Stäben (Balken) entwickelt. Im einfachsten Falle wirken nur Kräfte in der Richtung der Längsachse, welche man als Zug- und Druckkräfte unterscheidet. Sie erzeugen einen inneren Spannungszustand, indem elastische Kräfte längs dieser Axe hervorgerufen werden. In einem zweiten Falle reduzieren sich die äufseren Kräfte auf ein Kräftepaar, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen senkrecht durchdringt. Die elastische Wirkung äufsert sich in einer Biegung des Balkens. Zug- und Biegungsspannung werden gemeinsam als „Normalspannungen" bezeichnet. Liegt die Achse des Kräftepaares in der Längsachse des Stabes, so treten neben den Dehnungen in den als rechtwinklige Parallelepipeda vorausgesetzten Körperelementen Winkelveränderungen ein, die man Schiebung oder Gleitung nennt. Es entsteht eine Torsionsspannung, welche mit dem deformierenden Kräftepaar statisch gleichwertig ist. Endlich können wir uns auch vorstellen, dafs die wirkenden Kräfte ganz in die Ebene eines Stabquerschnittes fallen und das Bestreben haben, den einen Körperteil von dem anderen längs der Schnittebene zum Abgleiten zu bringen. Es entsteht jetzt eine scheerende Spannung in dem betrachteten Querschnitte. Torsionsspannung und Scheerungsspannung werden gemeinsam als Schubspannungen bezeichnet. Diese elementaren Begriffe der Festigkeitslehre wenden wir jetzt auf den starren Körper und die Gelenkketten mit starren Gliedern an. Obwohl hierbei die Deformationen ausgeschlossen sind, so kann man doch die Reduktion der inneren Reaktionskräfte in einer solchen Weise durchführen, dafs die Kompo-

nenten den üblichen Beanspruchungskategorien entsprechen. Man gewinnt hierdurch gleichzeitig eine anschauliche Übersicht der Resultate, welche den allgemeinen Reduktionen mit Benutzung der Lagrangeschen Koordinaten nicht eigen ist.

28. *Die Bestimmung der Beanspruchungskomponenten.* — Aus der D'Alembertschen Grundgleichung für zeitlich wirkende Kräfte:

$$\bar{k} = m\ddot{\bar{x}} + \bar{s}$$

folgt

$$\Sigma'\bar{s} = \Sigma'\bar{k} - \Sigma' m\ddot{\bar{x}} \tag{57}$$

und

$$\Sigma'\overline{xs} = \Sigma'\overline{xk} - \Sigma' m\overline{x\ddot{x}}, \tag{58}$$

wobei alle Summationen über denjenigen Teil eines starren Körpers zu erstrecken sind, welcher durch eine Schnittebene virtuell abgetrennt wird. Nun ist aber für jedes starre System (ohne Translation):

$$\dot{\bar{x}} = \overline{\sigma x},$$

und hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$\ddot{\bar{x}} = \overline{\dot{\sigma} x} + \overline{\sigma(\sigma x)},$$

oder nach Ausführung des ternären Vektorproduktes:

$$\ddot{\bar{x}} = \overline{\dot{\sigma} x} + (\bar{\sigma}\bar{x}) \cdot \bar{\sigma} - (\bar{\sigma}\bar{\sigma}) \cdot \bar{x}.$$

Diese Beschleunigung zerlegen wir nach drei rechtwinkligen Achsen welche mit dem starren Körper fest verbunden sind, und bezeichnen die betreffenden Projektionen des Vektors $\bar{x}$ mit a_1, a_2, a_3. Dann wird

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \dot{\sigma}_2 a_3 - \dot{\sigma}_3 a_2 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) a_1 + \sigma_1\sigma_2 a_2 + \sigma_1\sigma_3 a_3,\\
\ddot{x}_2 &= \dot{\sigma}_3 a_1 - \dot{\sigma}_1 a_3 + (\sigma_3^2 + \sigma_1^2) a_2 + \sigma_2\sigma_3 a_3 + \sigma_2\sigma_1 a_1,\\
\ddot{x}_3 &= \dot{\sigma}_1 a_2 - \dot{\sigma}_2 a_1 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) a_3 + \sigma_3\sigma_1 a_1 + \sigma_3\sigma_2 a_2.
\end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken müssen nun die Komponenten $\dot{\sigma}_1$, $\dot{\sigma}_2$, $\dot{\sigma}_3$ mit Hilfe der Eulerschen Rotationsgleichungen (21):

$$\begin{aligned}
A_1\dot{\sigma}_1 &= (A_2 - A_3)\sigma_2\sigma_3 + M_{k,1},\\
A_2\dot{\sigma}_2 &= (A_3 - A_1)\sigma_3\sigma_1 + M_{k,2},\\
A_3\dot{\sigma}_3 &= (A_1 - A_2)\sigma_1\sigma_2 + M_{k,3}
\end{aligned}$$

eliminiert werden. Dies giebt:

$$A_2 A_3 \cdot \ddot{x}_1 = A_2 A_3 (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) \cdot a_1 + A_2 (A_3 - A_1 + A_2) \sigma_1 \sigma_2 \cdot a_2$$
$$+ A_3 (A_2 - A_3 + A_1) \sigma_1 \sigma_3 \cdot a_3 + A_3 M_{k,2} \cdot a_3 - A_2 M_{k,3} \cdot a_2,$$
$$A_3 A_1 \cdot \ddot{x}_2 = A_3 A_1 (\sigma_3^2 + \sigma_1^2) a_2 + A_3 (A_1 - A_2 + A_3) \sigma_2 \sigma_3 \cdot a_3$$
$$+ A_1 (A_3 - A_1 + A_2) \sigma_2 \sigma_1 \cdot a_1 + A_1 M_{k,3} \cdot a_1 - A_3 M_{k,1} \cdot a_3,$$
$$A_1 A_2 \cdot \ddot{x}_3 = A_1 A_2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) a_3 + A_1 (A_2 - A_3 + A_1) \sigma_3 \sigma_1 \cdot a_1$$
$$+ A_2 (A_1 - A_2 + A_3) \sigma_3 \sigma_2 a_2 + A_2 M_{k,1} \cdot a_2 - A_3 M_{k,2} \cdot a_3.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\Sigma' \bar{s} = \bar{\mathrm{s}}', \quad \Sigma' \bar{k} = \mathrm{k}', \quad \Sigma' m = \mathrm{m}',$$

so ergeben die Gleichungen (57) die Komponenten der Resultantkraft der inneren Spannungen in der expliziten Form:

$$\mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{s}_1' = \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 \mathrm{k}_1' + \mathrm{m}' (\mathrm{A}_2 \mathrm{M}_{k,3} \cdot \mathrm{a}_2^* - \mathrm{A}_3 \mathrm{M}_{k,2} \mathrm{a}_3^*)$$
$$+ \mathrm{m}' \{ \mathrm{A}_2 (\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3) \sigma_1 \sigma_2 \cdot \mathrm{a}_2^* + \mathrm{A}_3 (\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) \sigma_1 \sigma_3 \cdot \mathrm{a}_3^*$$
$$- \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3 (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) \mathrm{a}_1^* \},$$

und zwei analoge Ausdrücke für s_2', s_3', welche durch zyklische Vertauschung der Indices hieraus folgen.

Der besseren Übersicht wegen schreiben wir

$$\bar{\mathrm{s}}' = \bar{\mathrm{k}}' + \mathrm{m}' \cdot \bar{\mathrm{u}} + \mathrm{m}' \bar{\mathrm{w}}. \tag{59}$$

Dann bedeutet $\bar{\mathrm{u}}$ einen Vektor, welcher im wesentlichen von den Totalmomenten der drehenden Kräfte abhängt und $\bar{\mathrm{w}}$ einen zweiten Vektor, der hauptsächlich durch den Geschwindigkeitszustand des Systems bestimmt ist. In den Komponenten von $\bar{\mathrm{u}}$ und $\bar{\mathrm{w}}$ treten aufserdem noch die Komponenten a_1^*, a_2^*, a_3^* des Schwerpunktvektors $\bar{\mathrm{a}}^*$ des virtuell abgetrennten Körperstückes gröfsenbestimmend auf. Geht man von einer Trennungsebene zu einer anderen über, so ändert dieser Schwerpunkt seine Lage, und die Komponenten von s' werden in leicht übersehbarer Weise beeinflufst.

Nach unserer Bezeichnungsweise können wir die Gleichung (58), welche das Moment der Reaktionskräfte in Bezug auf den festen Punkt bestimmt, schreiben:

$$\bar{M}_s' = \bar{M}_k' - \bar{M}_{\ddot{x}}'$$

oder

$$\bar{M}_s' = \bar{M}_k' - \frac{d \bar{M}_v'}{dt}.$$

Nun ist aber nach Nr. 16 Gleichung (19)

$$\frac{d \bar{M}_v'}{dt} = \left(\frac{d \bar{M}_v'}{dt} \right) + \bar{\sigma} \bar{M}_v'.$$

Demnach wird

$$\overline{M'_s} = \overline{M'_k} - \overline{\sigma M'_v} - \left(\frac{d\overline{M'_v}}{dt}\right) \tag{60}$$

oder in Komponenten zerlegt:

$$\begin{aligned} M'_{s,1} &= M'_{k,1} - (A'_3 - A'_2)\sigma_2\sigma_3 - A'_1\dot{\sigma}_1, \\ M'_{s,2} &= M'_{k,2} - (A'_1 - A'_3)\sigma_3\sigma_1 - A'_2\dot{\sigma}_2, \\ M'_{s,3} &= M'_{k,3} - (A'_2 - A'_1)\sigma_1\sigma_2 - A'_3\dot{\sigma}_3. \end{aligned}$$

A'_1, A'_2, A'_3 sind die Hauptträgheitsmomente des virtuell abgetrennten Körperstückes.

Durch Elimination der Komponenten der Winkelbeschleunigung mit Hilfe der Eulerschen Bewegungsgleichungen, welche für das ganze System gelten, erhalten wir ohne weiteres:

$$\begin{cases} A_1 M'_{s,1} = A_1 M'_{k,1} - A'_1 M_{k,1} + D'_1 \cdot \sigma_2\sigma_3, \\ A_2 M'_{s,2} = A_2 M'_{k,1} - A'_2 M_{k,1} + D'_2 \cdot \sigma_3\sigma_1, \\ A_3 M'_{s,3} = A_3 M'_{k,3} - A'_3 M_{k,3} + D'_3 \cdot \sigma_1\sigma_2, \end{cases} \tag{61}$$

worin

$$\begin{aligned} D'_1 &= (A_1 A'_2 - A'_1 A_2) - (A_1 A'_3 - A'_1 A_3), \\ D'_2 &= (A_2 A'_3 - A'_2 A_3) - (A_2 A'_1 - A'_2 A_1), \\ D'_3 &= (A_3 A'_1 - A'_3 A_1) - (A_3 A'_2 - A'_3 A_2) \end{aligned}$$

zu setzen ist. Der Vektor $\overline{M'_s}$ hat also die Form

$$\overline{M'_s} = \overline{P} + \overline{Q}.$$

$\overline{P}$ hängt im wesentlichen von den äufseren Kräften ab, während $\overline{Q}$ hauptsächlich durch den Geschwindigkeitszustand des Systems bedingt ist. Die Trägheitsmomente des virtuell abgetrennten Körperteiles beeinflussen beide Vektoren.

Bis jetzt ist $\overline{M}_s$ auf den festen Punkt bezogen. Nehmen wir also das Moment in Bezug auf einen Punkt des Querschnittes, so gelten für diese Transformation die bekannten Regeln der Statik. Nun läfst sich aber dieser neue Bezugspunkt in der Ebene des Querschnittes so wählen, dafs die Resultante und das Moment der Reaktionen in eine Ebene fallen, welche auf der Schnittebene senkrecht stehen. Da der Ort für diese Bezugspunkte eine Gerade ist, so behält man noch die Wahl frei, welcher ihrer Punkte als definitiver Reduktionspunkt anzunehmen ist. Nach der Entscheidung zerlegt man die Resultante und das Moment in Komponenten, welche bezw. in die Schnittebene fallen oder darauf senkrecht stehen, und erhält so die Gröfsen, welche

den virtuell abgetrennten Körperteil in Bezug auf Zug (oder Druck) Biegung, Torsion und Scheerung beanspruchen.

Sollen die Komponenten der kinetostatischen Beanspruchung für ein *Gelenksystem* bestimmt werden, so verfährt man in ähnlicher Weise wie bei einem einzelnen starren Körper. Der einzige Unterschied besteht darin, dafs man zu den äufseren Kräften des betrachteten Gelenkstückes noch die bekannten Reaktionen des nächstliegenden Gelenkes — oder allgemein aller ihm auf derselben Seite der Schnittfläche angehörigen Gelenke — hinzufügt. Da wir diese Gelenkreaktionen vollständig berechnet haben, so können wir auch diese allgemeine Aufgabe als erledigt betrachten.

Berlin, den 1. Februar 1901.

Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes.

Von Stanislaus Jolles in Berlin.

1. Parallele Kräfte in einer Ebene ε, deren Intensitäten proportional sind den Abständen ihrer Angriffspunkte von einem in ε gelegenen Strahle, bestimmen ein mit ihrer Theorie eng verknüpftes polares Feld Γ^2. Auf dieses polare Feld hat Culmann[1]) zuerst hingewiesen; Herr Reye[2]) erkannte dann seinen Zusammenhang mit der Theorie der Hauptträgheitsachsen, als er diejenigen Dreiecke aufsuchte, in deren Eckpunkten bezw. drei Flächenstücke derart konzentriert werden können, dafs sie ein Flächenstück in Bezug auf seine Trägheitsmomente ersetzen. Bald nach ihm kam Hesse[3]) durch eine glückliche Intuition auf dasselbe polare Feld, ohne auch nur, wie seine beiden Vorgänger, von den Eigenschaften der Trägheitsellipse irgend welchen Gebrauch zu machen. Diese Arbeiten sind analytisch. Ausgehend von der Theorie der Trägheitsellipse sind später die Eigenschaften des polaren Feldes Γ^2 und der Trägheits- und Hauptträgheitsachsen von mir[4]) durch elementare Betrachtungen synthetisch abgeleitet worden.

Gelangt man von der Theorie der Trägheitsellipsen zu der des polaren Feldes Γ^2 und der Trägheits- und Hauptträgheitsachsen, so ist dies, wie im Laufe der Untersuchung bald erkannt wird, ein störender Umweg. Gelangt man umgekehrt vom polaren Felde Γ^2 aus zu diesen Achsen, so fehlte bisher der Nachweis des organischen Zusammenhanges zwischen ihm und den Trägheitsellipsen. Bezeichnend für Binets Scharfsinn ist es übrigens, dafs er — der Entdecker der Trägheits-

---

1) Culmann: Die graphische Statik. Zürich 1866, 2. Abschnitt, 7. Kapitel, § 63—67. Die ersten beiden Abschnitte erschienen, wie aus der Vorrede S. XI zu ersehen ist, als erste Lieferung schon 1864.

2) Reye: Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten. Zeitschrift für Math. u. Physik **10** (1865) S. 433.

3) Hesse: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. II. Auflage, Leipzig 1869, 25. Vorlesung.

4) Jolles: Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde. Diese Zeitschrift (3) **1** (1901), S. 91.

ellipse — sie in seiner grundlegenden Arbeit[1]) nur am Schlusse beiläufig erwähnt, ihr somit nicht die Bedeutung beimifst, die sie später bei anderen erlangt hat. Es ist meines Erachtens auch eine Willkür, auf irgend eine der bisher eingeführten Trägheitsellipsen die Theorie der Trägheitsmomente in der Ebene aufzubauen.

In den folgenden Untersuchungen wird, ausgehend vom Zentrifugalmoment, synthetisch sofort das polare Feld Γ^2 und sein Zusammenhang mit der Theorie der Trägheits- und Hauptträgheitsachsen dargethan und die organische Verbindung mit der Theorie der Trägheitsellipsen entwickelt. Hierbei erweist es sich von grofsem Nutzen, nicht nur zwei sich schneidende, sondern auch zwei parallele Strahlen als Trägheitsachsen eines ebenen Flächenstückes zu bezeichnen, sobald in Bezug auf sie das Zentrifugalmoment gleich Null ist. Beschreibt ein Strahl einen Strahlenbüschel I. Ordnung, so umhüllen die von ihm gleichweit abstehenden und zu ihm parallelen Trägheitsachsen die Trägheitsellipse seines Mittelpunktes. Zwischen den Strahlen der Ebene und den zu ihnen parallelen und von ihnen gleichweit abstehenden Trägheitsachsen besteht eine ein-zweideutige Verwandtschaft. Zum Schlusse ergeben sich die bekannten metrischen Eigenschaften der Trägheitsmomente als eine unmittelbare Folge der Brennpunkteigenschaften von Γ^2.

Die Hilfsmittel der Untersuchung liefert, wie schon hervorgehoben, die synthetische Geometrie. Sie gestaltet die Theorie der Trägheitsmomente, vor allem die Ableitung des polaren Feldes Γ^2 und seiner Eigenschaften, äufserst einfach und übersichtlich. Für die geometrische Mechanik, der man immer mehr zustrebt, bedarf diese Forschungsmethode keiner Empfehlung. Besonders der Ingenieur wird sich ihrer gerade hier gern bedienen, führt sie ihn doch ohne jeden Umweg zu dem so häufig abzuleitenden Kerne eines ebenen Querschnitts. — Da in meiner oben angeführten Abhandlung die Litteratnr, welche sich auf die Hauptsätze aus der Theorie der Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes bezieht, angeführt und besprochen worden ist, so konnten im Folgenden weitere Angaben unterbleiben.

2. Jedem Elemente $d\mathfrak{F}$ eines ebenen endlichen Flächenstückes $\mathfrak{F}$ kommt in Bezug auf einen in seiner Ebene ε gelegenen Strahl g ein parallel einer Strecke r gemessener Abstand r_g zu. In gleicher Weise entspricht dem Elemente $d\mathfrak{F}$ in Bezug auf einen zweiten Strahl h von ε ein parallel der Strecke s gemefsener Abstand s_h. Jenachdem r_g und s_h gleichen oder entgegengesetzten Sinn wie r und s haben, wird ihnen ein positiver oder negativer Wert beigelegt. Unter diesen Voraus-

1) Binet: Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps. Journ. de l'École Polyt. 9, 16. Heft (1813), S. 41. (Lu à l'Institut, en Mai 1811.)

setzungen heifst bekanntlich das über das endliche Flächenstück $\mathfrak{F}$ ausgedehnte Integral:

$$\int r_g s_h d\mathfrak{F}$$

das Zentrifugalmoment des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ bezüglich der Strahlen g, h. Es werde, wenn r und s beliebige Neigungswinkel mit ihrer Bezugsgeraden g bezw. h einschliefsen, durch:

$${}^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) = {}^{rs}\!\!\int r_g s_h d\mathfrak{F}$$

bezeichnet, hingegen, wenn sie bezw. auf ihr senkrecht stehen, durch:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int r_g s_h d\mathfrak{F}.$$

Sowie h mit g zusammenfällt, geht das Zentrifugalmoment des Flächenstückes $\mathfrak{F}$ bezüglich der Strahlen g, h in sein Trägheitsmoment:

$$\int r_g^2 d\mathfrak{F}$$

bezüglich des Strahles g über. Es werde für eine beliebige bezw. zu g senkrechte Richtstrecke r durch:

$${}^{r}M_{gg}(F) = {}^{r}\!\!\int r_g^2 d\mathfrak{F} \quad \text{bezw.} \quad M_{gg}(\mathfrak{F}) = \int r_g^2 d\mathfrak{F}$$

dargestellt.

3. Wird im Integral:

$${}^{r}\!\!\int r_x d\mathfrak{F}$$

der Abstand r_x des Flächenelementes $d\mathfrak{F}$ vom Strahle x als Mafs einer auf $d\mathfrak{F}$ ruhenden Masse aufgefafst, so ist hierdurch ein Massensystem:

$${}^{r}\mathfrak{M}_x = {}^{r}\!\!\int r_x d\mathfrak{F}$$

bestimmt, und zwar entspricht dem Strahle x eindeutig der Schwerpunkt X von ${}^{r}\mathfrak{M}_x$. Nun verschwindet der Ausdruck:

$${}^{sr}\mathfrak{M}_{xy} = {}^{sr}\!\!\int s_y (r_x d\mathfrak{F})$$

für das statische Moment von ${}^{r}\mathfrak{M}_x$ in Bezug auf einen Strahl y, wenn y durch den Schwerpunkt X von ${}^{r}\mathfrak{M}_x$ geht, ferner ist:

$${}^{sr}\!\!\int s_y (r_x d\mathfrak{F}) = {}^{rs}\!\!\int r_x (s_y d\mathfrak{F}),$$

folglich geht ein Strahl y durch den Schwerpunkt X von ${}^{r}\mathfrak{M}_x$, sobald der Schwerpunkt Y von ${}^{s}\mathfrak{M}_y$ auf x liegt. Jedem Strahle des Büschels X entspricht hiernach ein Punkt von x, dem Punkte X ist also auch der Strahl x eindeutig zugeordnet.

Zwischen den Punkten und Strahlen des ebenen Feldes ε besteht nunmehr folgende Beziehung. Ein Punkt X bestimmt eindeutig einen Strahl x und dieser eindeutig jenen, ferner ein Strahl y, der durch X geht, einen Punkt Y, der auf x liegt. Eine solche Verwandtschaft zwischen Punkten und Strahlen eines ebenen Feldes heifst eine involutorische Korrelation, und das Feld selbst, dessen Punkte und Strahlen derart verknüpft sind, ein polares Feld. Die Punkte A, B, . . ., X, . . . und die Strahlen a, b, . . ., x, . . . von ε sind also als Pole und Polaren in einem polaren Felde Γ^2 einander zugeordnet.

Bezüglich zweier konjugierten Strahlen von Γ^2 ist das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{F}$ gleich Null. Als ein Paar solcher konjugierten zusammenfallenden Strahlen kann jede Tangente t der Inzidenzkurve (Ordnungskurve) von Γ^2 aufgefafst werden. Das Trägheitsmoment von $\mathfrak{F}$ bezüglich eines reellen Strahles t ist aber niemals gleich Null, folglich hat das polare Feld Γ^2 keine reelle Inzidenzkurve, oder die seinen Durchmessern zukommenden Punktinvolutionen sind elliptisch.

Einem durch den Schwerpunkt S von $\mathfrak{F}$ gehenden Strahle x entspricht ein Massensystem $\mathfrak{M}_x$ mit der Gesamtmasse Null, das sich aus zwei gleich grofsen Massen mit verschiedenen Vorzeichen und Schwerpunkten zusammensetzt. Sein Schwerpunkt X liegt also im Unendlichen, und x ist somit ein Durchmesser und S der Mittelpunkt des polaren Feldes Γ^2.

4. Hat in Bezug auf zwei Strahlen von ε das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{F}$ den Wert Null, so heifsen diese Strahlen, wenn sie sich schneiden, ein Paar Trägheitsachsen ihres Schnittpunktes P und, wenn sie parallel laufen, ein Paar parallele Trägheitsachsen. Ein Punkt P ist der Schnittpunkt von ∞^1 Paaren von Trägheitsachsen, sie sind nach **3.** die Strahlenpaare der ihm im polaren Felde Γ^2 zukommenden Strahleninvolution, folglich gehen durch jeden Punkt, als Achsen dieser Strahleninvolution, ein Paar zu einander senkrechter Trägheitsachsen, sie heifsen seine Hauptträgheitsachsen. Durch die Brennpunkte F, F' von Γ^2 als Träger zirkularer Strahleninvolutionen gehen jedoch unendlich viele Paare von Hauptträgheitsachsen. F, F' heifsen deswegen wohl auch die Trägheitsbrennpunkte des Flächenstückes $\mathfrak{F}$. — Die Hauptträgheitsachsen eines Punktes P hälften die Winkel der von P nach den Trägheitsbrennpunkten führenden Strahlen. Ein Strahl g von ε ist Hauptträgheitsachse für den Fufspunkt der von seinem Pole G in Γ^2 auf ihn gefällten Normale. Dreht sich g um einen Punkt P, so umhüllen die Strahlen, die mit g zusammen je ein Paar Hauptträgheitsachsen bilden, i. a. eine Parabel, sie berührt die Polare p von P in Γ^2 und die Achsen dieses polaren Feldes. Ihre Leitlinie ist der Durchmesser SP. Die Haupt-

trägheitsachsen von $\mathfrak{F}$ vermitteln also zwischen den Punkten und Strahlen des ebenen Feldes ε eine involutorische quadratische Verwandtschaft. Alle diese Sätze von den konjugierten zu einander normalen Strahlen sind längst bekannt, ihre Beweise finden sich aufserdem in vielen Lehrbüchern, z. B. in der vierten Auflage des ersten Teiles von Herrn Reyes Geometrie der Lage.

5. Der zur Richtstrecke r parallele Abstand ϱ_{Gh} eines Punktes G von einem Strahle h, ebenso wie der zur Richtstrecke s parallele Abstand ϱ_{Sg} des Schwerpunktes S von der Polare g von G im polaren Felde Γ^2, sind positiv, wenn sie gleichen, negativ, wenn sie entgegengesetzten Sinn, wie die zugehörigen Richtstrecken haben. Nun ist nach **3.** das statische Moment ${}^{rs}\mathfrak{M}_{gh}$ des in G konzentrierten Massensystemes:

$$ {}^{r}\mathfrak{M}_g = \varrho_{Sg}\mathfrak{F} $$

in Bezug auf h gleich dem Zentrifugalmomente:

$$ {}^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) $$

von $\mathfrak{F}$ in Bezug auf g und h. Folglich läfst sich dieses in der Form:

$$ {}^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) = \varrho_{Gh}\varrho_{Sg}\mathfrak{F} $$

schreiben. Da aber:

$$ {}^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) = {}^{sr}M_{hg}(\mathfrak{F}) $$

ist, so kann auch:

$$ {}^{rs}M_{gh}(\mathfrak{F}) = \varrho_{Hg}\varrho_{Sh}(\mathfrak{F}) $$

gesetzt werden.

Das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{F}$ in Bezug auf g und h wird zum Trägheitsmomente ${}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F})$ von $\mathfrak{F}$ in Bezug auf g, wenn h mit g identisch ist, sein Ausdruck lautet also:

$$ {}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}) = \varrho_{Gg}\varrho_{Sg}\mathfrak{F}. $$

Fallen ϱ_{Sg} und ϱ_{Gg} auf den zu g konjugierten Durchmesser d des polaren Feldes Γ^2 (Fig. 1), ist also die Richtstrecke r zu ihm parallel, so sind G und der Schnittpunkt $(d, g) = G_1$ in Γ^2 konjugiert. Nun besteht zwischen den Strecken SG und SG_1 und der Potenz $-\mathfrak{e}^2$ der d nach **3.** in Γ^2 zugehörigen elliptischen Punktinvolution die Beziehung:

$$ SG \cdot SG_1 = -\mathfrak{e}^2. $$

Sie liefert, wenn der Mittelpunkt S von Γ^2 insbesondere den Abstand der konjugierten Punkte G, G_1 hälftet, diese also in den Punkten E, E_1 zusammenfallen:

$$ SE_1 = \varrho_{Sg} = -\mathfrak{e}, $$
$$ EE_1 = \varrho_{Gg} = -2\mathfrak{e}; $$

somit für den Strahl g:

$$^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}) = 2\mathfrak{e}^2\mathfrak{F},$$

und für den zu d konjugierten, also zu g parallelen Durchmesser e:

$$^{rr}M_{ee}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{e}^2\mathfrak{F}.$$

Die konjugierten Punkte E, E_1 aller Durchmesser d von Γ^2, deren Abstand durch den Mittelpunkt S von Γ^2 gehälftet wird, liegen nun

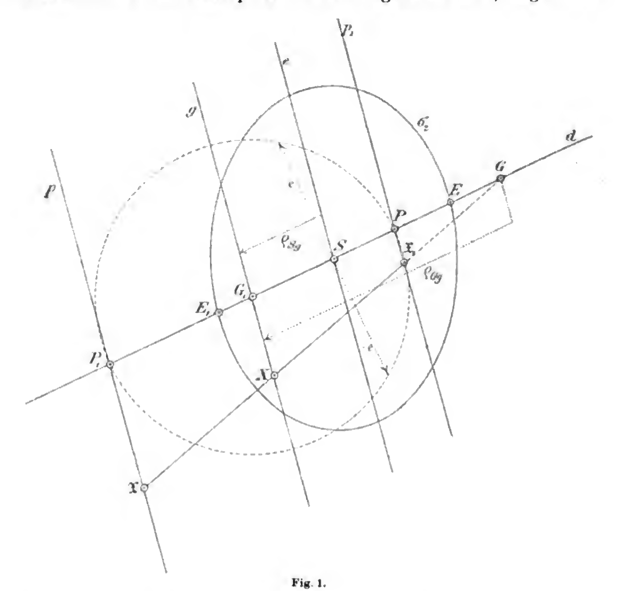


Fig. 1.

auf einer Ellipse σ^2, deren konjugierte Durchmesser die von Γ^2 sind. Folglich gilt, wenn die Strecken SE, SE_1 die dem Strahle e bezüglich S konjugierten Trägheitshalbmesser heifsen: Werden die den Durchmessern des polaren Feldes Γ^2 bezüglich S konjugierten Trägheitshalbmesser, vom Mittelpunkte S von Γ^2 aus, ihrer Gröfse und Richtung nach abgetragen, so liegen ihre Endpunkte auf einer Ellipse σ^2, deren konjugierte Durchmesser mit denen von Γ^2 zusammenfallen. Die Ellipse σ^2 heifst die Zentralellipse des Flächenstückes $\mathfrak{F}$, ihre parallelen

Tangenten sind in Γ^2 konjugiert, also paarweise parallele Trägheitsachsen.

Die Zentralellipse σ^2 und die imaginäre Inzidenzkurve von Γ^2 gehen in sich selbst über, wenn einer dieser Kegelschnitte in Bezug auf den andern polarisiert wird. Sie sind harmonisch einander zugeordnet, jeder also eine Imaginärprojektion des andern.

6. Der Schnittpunkt G_1 (Fig. 1) eines beliebigen Strahles g mit dem ihm in Γ^2 konjugierten Durchmesser d ist die Mitte zweier bestimmten auf d gelegenen konjugierten Punkte P, P_1 von Γ^2. Sie werden auf d durch einen Kreis mit dem Mittelpunkte G_1 ausgeschnitten, dessen durch den Schwerpunkt S gehende, zu d senkrechte Sehne so grofs ist, wie die auf d gelegene Durchmessersehne $EE_1 = 2\mathfrak{e}$ der Zentralellipse σ^2. Für die Abstände G_1P und G_1P_1 der Punkte P, P_1 von G_1 gilt folglich die Beziehung:

$$G_1P^2 = G_1P_1^2 = SG_1^2 + \mathfrak{e}^2,$$

und sonach sind sie die dem Strahle g bezüglich des Punktes G_1 konjugierten Trägheitshalbmesser. Die Endpunkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ der einem beliebigen Punkte X von g bezüglich g konjugierten Trägheitshalbmesser werden also, von ihm aus gemessen, erhalten, indem man die Verbindungsgerade des Punktes X und des Poles G von g mit den durch P_1 und P laufenden Parallelen p, p_1 zu g in $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ zum Schnitt bringt. p und p_1 stehen gleich weit vom Punkte X ab und sind als die Polaren von P, P_1 in Γ^2 konjugiert, sie sind folglich die gleich weit von g abstehenden zu ihm parallelen Trägheitsachsen von $\mathfrak{F}$.

Schneiden zwei Strahlen sich auf der Symmetrieachse zweier Parallelen, so schneiden sie die Parallelen selbst in den Eckpunkten eines vollständigen Viereckes, dessen drittes Paar Gegenseiten ebenfalls parallel laufen. Je zwei durch einen beliebigen Punkt X von g gehende konjugierte Strahlen von Γ^2 bestimmen also mit den in Γ^2 konjugierten parallelen Strahlen p, p_1 je ein Polviereck von Γ^2, dessen drittes Paar Gegenseiten x, x_1 parallel laufen und von X gleich weit abstehen. Die konjugierten Strahlen x, x_1 treffen den Strahl p bezw. p_1 in den Punktepaaren einer Involution, die perspektiv ist zu der dem Punkte X in Γ^2 zugehörigen Strahleninvolution. Sie verbinden folglich entsprechende Punkte projektiver Punktreihen, die keinen Punkt entsprechend gemein haben, und umhüllen sonach einen Kegelschnitt $\mathfrak{x}^2$. Sein Mittelpunkt ist X. Er ist, da das Polarsystem Γ^2 nach **3.** keine reelle Inzidenzkurve hat, und folglich die einem Punkte X zugehörige Strahleninvolution keine reellen Doppelstrahlen besitzt, eine Ellipse.

Konjugierte Durchmesser und parallele Tangenten von $\mathfrak{x}^2$ sind konjugierte Strahlen in Γ^2. Der Mittelpunkt X von $\mathfrak{x}^2$ und die beiden zu einem Durchmesser u parallelen Tangenten begrenzen demnach auf dem zu u konjugierten Durchmesser v zwei Strecken, die gleich sind den X bezüglich u konjugierten Trägheitshalbmessern. Aus diesem Grunde heifst die Ellipse $\mathfrak{x}^2$ die durch das Flächenstück $\mathfrak{F}$ bestimmte Trägheitsellipse des Punktes X. Die Trägheitsellipse des Schwerpunktes S ist die in **5.** gefundene Zentralellipse σ^2. Dreht sich ein Strahl x in ε um einen Punkt X, so umhüllen die zu x parallelen von ihm gleich weit abstehenden Trägheitsachsen die Trägheitsellipse $\mathfrak{x}^2$ von X.

Die Trägheitsellipsen der Punkte eines Durchmessers d von Γ^2 schneiden ihn in Punktepaaren der ihm in Γ^2 nach **3.** zukommenden elliptischen Involution, somit umschliefsen die Trägheitsellipsen aller Punkte der Ebene ε den Schwerpunkt S von $\mathfrak{F}$. Sie schneiden aufserdem die Zentralellipse σ^2 in Punktepaaren, die auf Parallelen zu dem d konjugierten Durchmesser e liegen. Die Trägheitsellipsen der Punkte einer beliebigen Geraden g berühren die zu ihr parallelen und von ihr gleich weit abstehenden Trägheitsachsen in Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden durch den Pol von g in Γ^2 gehen. Diese Verbindungsgeraden laufen parallel, wenn g ein Durchmesser von Γ^2 ist.

7. Die Brennpunkte eines polaren Feldes sind in ihm die Träger zirkularer Strahleninvolutionen, folglich sind die Trägheitsellipsen der Brennpunkte F, F' von Γ^2 Kreise. Sie berühren die zur Verbindungsgeraden von F, F' — also zur Hauptachse a von Γ^2 — parallelen und von ihr gleich weit abstehenden Trägheitsachsen und haben sonach gleich grofse Halbmesser. Ihre absolute Länge ist die des zu a konjugierten senkrechten Trägheitshalbmessers $\pm\mathfrak{a}$.

Wird zu einem beliebigen Strahle g von ε durch den Brennpunkt F von Γ^2 eine Parallele g' gezogen, so läfst sich das Trägheitsmoment $M_{gg}(\mathfrak{F})$ in Bezug auf g nach Fig. 2 in der Form:

$$M_{gg}(\mathfrak{F}) = \int (r_{g'} + \varrho_{Fg})^2 d\mathfrak{F} = M_{g'g'}(\mathfrak{F}) + 2\varrho_{Fg} \int r_{g'} d\mathfrak{F} + \varrho_{Fg}^2 \mathfrak{F}$$

schreiben. Nun ist:

$$M_{g'g'}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{a}^2 \mathfrak{F},$$

ferner:

$$\int r_{g'} d\mathfrak{F} = \varrho_{Sg'} \mathfrak{F} = -\frac{\varrho_{Fg} - \varrho_{Fg'}}{2} \mathfrak{F},$$

folglich ergiebt sich:

$$(\alpha) \qquad M_{gg}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Fg}\varrho_{Fg'})\mathfrak{F},$$

oder da:

$$\varrho_{Fg} = \varrho_{Sg} - \varrho_{Sg'} \quad \text{und} \quad \varrho_{Fg'} = \varrho_{Sg} + \varrho_{Sg'}$$

ist; auch:

$$(\beta) \qquad M_{gg}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sg}^2 - \varrho_{Sg'}^2)\mathfrak{F}.$$

Die rechte Seite der Gleichungen (α) oder (β) behält denselben Wert für alle Tangenten des durch die Brennpunkte F, F' und die Tangente g bestimmten Kegelschnittes γ_g^2, demnach sind alle Kurven, zu deren Tangenten je gleich lange senkrechte Trägheitshalbmesser gehören, konfokale Kegelschnitte mit den Brennpunkten F, F'. Durch einen beliebigen Punkt P geht eine Ellipse und eine Hyperbel der durch die Brennpunkte F, F' bestimmten Schar konfokaler Kegelschnitte. Ihre Tangenten in P sind zu einander senkrecht und konjugiert in allen polaren Feldern mit den Brennpunkten F, F'. Sie

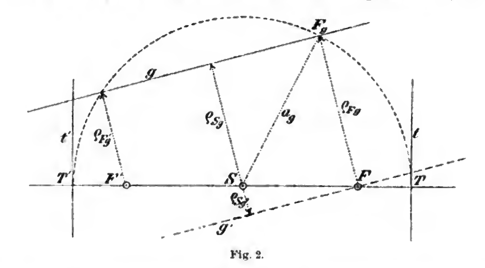


Fig. 2.

fallen also mit den Achsen der P in Γ^2 zukommenden Strahleninvolution oder mit den Hauptträgheitsachsen von P zusammen.

Der Abstand des Mittelpunktes S von γ_g^2 vom Fufspunkte F_g des Lotes ϱ_{Fg}, welches vom Brennpunkte F auf den Strahl g gefällt wird, ist bekanntlich gleich der halben Hauptsehne a_g dieses Kegelschnittes.

Der um S mit dem Halbmesser SF_g beschriebene Kreis schneidet also die zusammenfallenden Hauptachsen von Γ^2 und γ_g^2 in den Endpunkten T, T' der Hauptsehne a_g von γ_g^2 und bestimmt die in T, T' auf der Hauptachse a senkrechten Strahlen t, t' als zugehörige Scheiteltangenten. Ihnen entsprechen, da $ST = T'S$ ist, gleich grofse Trägheitsmomente M_{tt}, und $M_{t't'}$, deren Wert sich als:

$$(ST^2 + \mathfrak{a}^2)\mathfrak{F} = (SF_g^2 + \mathfrak{a}^2)\mathfrak{F} = (a_g^2 + \mathfrak{a}^2)\mathfrak{F}$$

ergiebt. Das dem Strahle g, sowie den Tangenten des Kegelschnittes

γ_g^2 zukommende Trägheitsmoment kann demnach auch drittens durch den Ausdruck:

$$(\gamma) \qquad M_{gg}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + a_g^2)\mathfrak{F}$$

dargestellt werden. Es gestattet, wenn $\mathfrak{a}$ und die Brennpunkte F, F' bekannt sind, eine ausnehmend einfache Konstruktion des einem Strahle g konjugierten senkrechten Trägheitshalbmessers.

8. Die Hauptträgheitsachsen h, e eines Punktes P (Fig. 3) werden durch die Brennpunkte F, F' von Γ^2 harmonisch getrennt. h schneidet die Hauptachse a von Γ^2 innerhalb, e aufserhalb der endlichen Strecke

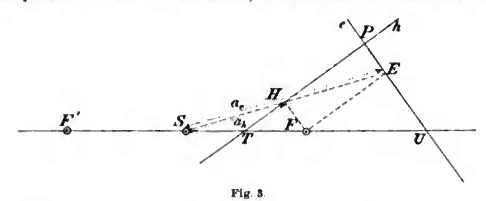


Fig. 3.

FF', wenn h in P die Hyperbel γ_h^2, e die Ellipse γ_e^2 mit den Brennpunkten F, F' berührt. Sind nun a_h und a_e die halben Hauptsehnen von γ_h^2 und γ_e^2, so ist:

$$a_h < a_e$$

oder auch:

$$\mathfrak{a}^2 + a_h^2 < a^2 + a_e^2.$$

Folglich ergiebt sich aus der Gleichung (γ) in 7., dafs die Hauptachsen der Trägheitsellipsen aller Punkte des ebenen Feldes ε die Hauptachse von Γ^2 innerhalb, die Nebenachsen aufserhalb der endlichen Strecke FF' schneiden.

Die halben Hauptsehnen a_h und a_e von γ_h^2 und γ_e^2 sind gleich den Strecken, die den Mittelpunkt S von Γ^2 mit den Fufspunkten H und E der vom Brennpunkte F auf h und e gefällten Lote verbinden. Nun besteht für die Schnittpunkte T und U der in Γ^2 konjugierten und zu einander normalen Strahlen h und e mit der Hauptachse von Γ^2 die Beziehung:

$$ST : SF = SF : SU$$

und ferner gilt für die homologen Punkte S, S' der durch die ähnlichen Dreiecke FHT und UEF auf einander bezogenen ähnlichen Felder Φ, Φ' die Proportion:

$$ST : SF = S'F : S'U.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind identisch, also auch die rechten, demnach fallen die entsprechenden Punkte S, S' und folglich auch die entsprechenden Strahlen HS und ES beider ähnlichen Felder zusammen.

Die drei Punkte S, H und E liegen sonach in einer Geraden, und für die halben Hauptsehnen a_h und a_e von γ_h^2 und γ_e^2 ergiebt sich ebenfalls:

$$a_h : a_e = ST : SF = SF : SU.$$

Kurz: zwischen den halben Hauptsehnen a_h und a_e der sich in einem Punkte P von ε schneidenden Hyperbel γ_h^2 und Ellipse γ_e^2 mit den Brennpunkten F, F'' und der halben Haupt- und Nebensehne a_π und b_π der Trägheitsellipse π^2 von P bestehen die Beziehungen:

$$a_\pi^2 = \mathfrak{a}^2 + a_e^2,$$
$$b_\pi^2 = \mathfrak{a}^2 + a_h^2,$$
$$a_h : a_e = ST : SF = SF : SU.$$

9. Aus dem in **7.** (β) gewonnenen Ausdrucke:

$$(\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sg}^2 - \varrho_{Sg'}^2)\mathfrak{F}$$

für das Trägheitsmoment $M_{gg}(\mathfrak{F})$ lassen sich recht einfach die Hauptsätze über Trägheits- und Zentrifugalmomente ableiten, die sich auf zu einander senkrechte und durch den nämlichen Punkt gehende Strahlen von ε beziehen.

a. Zwischen den Strecken ϱ_{Sg}, $\varrho_{Sg'}$ und ϱ_{Sh}, $\varrho_{Sh'}$, die bezw. zu zwei beliebigen zu einander senkrechten Strahlen g, h gehören, bestehen nach Fig. 4 die Gleichungen:

$$\varrho_{Sg}^2 + \varrho_{Sh}^2 = SP^2$$

und:

$$\varrho_{Sg'}^2 + \varrho_{Sh'}^2 = SF^2 = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2.$$

Mit Rücksicht hierauf kann nunmehr die Summe der Trägheitsmomente:

$$M_{gg}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sg}^2 - \varrho_{Sg'}^2)\mathfrak{F}$$

und:

$$M_{hh}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sh}^2 - \varrho_{Sh'}^2)\mathfrak{F}$$

in der Form:

$$M_{gg}(\mathfrak{F}) + M_{hh}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + SP^2)\mathfrak{F}$$

geschrieben werden. Hierin bleibt der Klammerausdruck für je zwei zu einander rechtwinklige Strahlen h, g des Büschels P unveränderlich, also auch die Summe der auf sie bezogenen Trägheitsmomente $M_{gg}(\mathfrak{F})$

und $M_{hh}(\mathfrak{F})$. Die Punkte, für welche diese Summen ein und denselben Wert haben, liegen je auf Kreisen mit dem Mittelpunkte S.

b. Das Zentrifugalmoment:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int r_g s_h d\mathfrak{F}$$

in Bezug auf zwei Strahlen g, h nimmt, wenn an die Stelle der r_g, s_h die Abstände $r_{g'}$, $r_{h'}$ von zwei zu g, h parallelen Strahlen

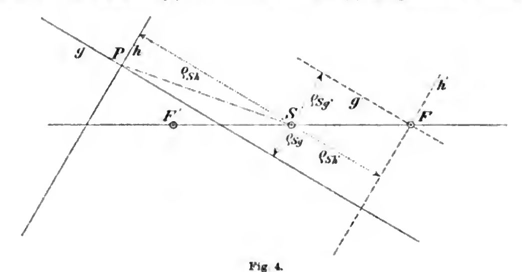


Fig. 4.

g', h' treten, und $\varrho_{g'g}$, $\varrho_{h'h}$ die in Richtung der r_g, s_h gemessenen Abstände der Parallelen g, g' und h, h' bedeuten, die Gestalt an:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int (r_{g'} + \varrho_{g'g})(s_{h'} + \varrho_{h'h}) d\mathfrak{F}$$

$$= \int r_{g'} s_{h'} d\mathfrak{F} + \varrho_{gg'} \int s_{h'} d\mathfrak{F} + \varrho_{hh'} \int r_{g'} d\mathfrak{F} + \varrho_{gg'} \varrho_{hh'} \mathfrak{F}.$$

Nun ist:

$$\int s_{h'} d\mathfrak{F} = \varrho_{Sh'} \mathfrak{F} \quad \text{und} \quad \int r_{g'} d\mathfrak{F} = \varrho_{Sg'} \mathfrak{F},$$

ferner:

$$\varrho_{g'g} = \varrho_{Sg} - \varrho_{Sg'} \quad \text{und} \quad \varrho_{h'h} = \varrho_{Sh} - \varrho_{Sh'},$$

folglich wird:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int r_{g'} s_{h'} d\mathfrak{F}$$

$$+ [(\varrho_{Sg} - \varrho_{Sg'})\varrho_{Sh'} + (\varrho_{Sh} - \varrho_{Sh'})\varrho_{Sg'} + (\varrho_{Sg} - \varrho_{Sg'})(\varrho_{Sh} - \varrho_{Sh'})]\mathfrak{F}$$

oder:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = \int r_{g'} s_{h'} d\mathfrak{F} = [\varrho_{Sg}\varrho_{Sh} - \varrho_{Sg'}\varrho_{Sh'}]\mathfrak{F}.$$

Stehen g und h senkrecht auf einander, und schneiden sich die zu ihnen parallelen Strahlen g', h' in einem Brennpunkte — etwa in F — von Γ^2, so ist:

$$\int r_{g'} s_{h'} d\mathfrak{F} = 0$$

und sonach endlich:

$$(\alpha)\qquad M_{gh}(\mathfrak{F}) = [\varrho_{Sg}\varrho_{Sh} - \varrho_{Sg'}\varrho_{Sh'}]\mathfrak{F}.$$

Für zwei sich in S schneidende zu einander senkrechte Strahlen g, h ergiebt sich hiernach:

$$M_{gh}(\mathfrak{F}) = -\varrho_{Sg'}\varrho_{Sh'}\mathfrak{F}.$$

Da ferner $M_{gh}(\mathfrak{F})$ nach (α) nur verschwinden kann, sobald:

$$(\beta)\qquad \varrho_{Sg}\varrho_{Sh} - \varrho_{Sg'}\varrho_{Sh'} = 0$$

wird, so drückt (β) die Bedingung aus, unter welcher die zu einander senkrechten Strahlen g, h mit einem Paar Hauptträgheitsachsen von $\mathfrak{F}$ zusammenfallen.

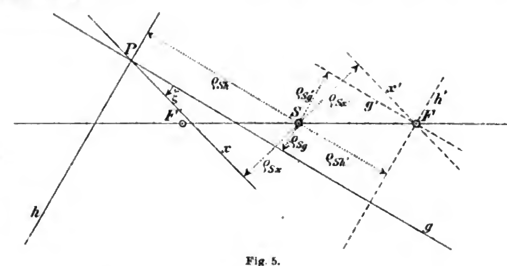


Fig. 5.

c. Für einen beliebigen Strahl x, der durch den Schnittpunkt P zweier zu einander senkrechten Strahlen g, h hindurchgeht, gelten nach Fig. 5 die Beziehungen:

$$\varrho_{Sx} = \varrho_{Sh}\sin\xi + \varrho_{Sg}\cos\xi,$$
$$\varrho_{Sx'} = \varrho_{Sh'}\sin\xi + \varrho_{Sg'}\cos\xi.$$

Folglich wird aus:

$$M_{xx}(\mathfrak{F}) = [\mathfrak{a}^2 + \varrho_{Sx}^2 - \varrho_{Sx'}^2]\mathfrak{F}$$

$$M_{xx}(\mathfrak{F}) = [\mathfrak{a}^2 + (\varrho_{Sh}\sin\xi + \varrho_{Sg}\cos\xi)^2 - (\varrho_{Sh'}\sin\xi + \varrho_{Sg'}\cos\xi)^2]\mathfrak{F}$$

oder:

$$M_{xx}(\mathfrak{F})$$
$$=[(\mathfrak{a}^2+\varrho_{Sg}^2-\varrho_{Sg'}^2)\cos^2\xi+(\mathfrak{a}^2+\varrho_{Sh}^2-\varrho_{Sh'}^2)\sin^2\xi+(\varrho_{Sh}\varrho_{Sg}-\varrho_{Sh'}\varrho_{Sg'})\sin 2\xi]\mathfrak{F}.$$

Die Faktoren von $\cos^2\xi$, $\sin^2\xi$ und $\sin 2\xi$ sind $\frac{1}{\mathfrak{F}} M_{gg}(\mathfrak{F})$, $\frac{1}{\mathfrak{F}} M_{hh}(\mathfrak{F})$ und nach (α) $\frac{1}{\mathfrak{F}} M_{gh}(\mathfrak{F})$, es ergiebt sich also:

$$(\gamma)\qquad M_{xx}(\mathfrak{F}) = M_{gg}(\mathfrak{F})\cos^2\xi + M_{hh}(\mathfrak{F})\sin^2\xi + M_{gh}(\mathfrak{F})\sin 2\xi.$$

Ist insbesondere g, h ein Paar Hauptträgheitsachsen, so ist nach (β) $M_{gh}(\mathfrak{F})$ gleich Null und folglich:

$$M_{xx}(\mathfrak{F}) = M_{gg}(\mathfrak{F}) \cos^2 \xi + M_{hh}(\mathfrak{F}) \sin^2 \xi.$$

Diese Gleichung geht, wenn:

$$M_{xx}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{x}^2 \mathfrak{F}, \quad M_{gg}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{g}^2 \mathfrak{F} \quad \text{und} \quad M_{hh}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{h}^2 \mathfrak{F}$$

gesetzt wird, in:

$$\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{g}^2 \cos^2 \xi + \mathfrak{h}^2 \sin^2 \xi$$

über. Sie stellt, wenn unter $2\mathfrak{h}$ und $2\mathfrak{g}$ die Haupt- und Nebensehne einer Ellipse π^2 mit der Hauptachse g und der Nebenachse h verstanden wird, bekanntlich das Quadrat des halben Abstandes $\mathfrak{x}$ der beiden zu x parallelen Tangenten von π^2 dar. Aus ihr folgt demnach für einen sich um P drehenden Strahl x von ε ebenfalls die in **6.** gefundene Trägheitsellipse π^2 des Punktes P.

Dem in P auf x senkrechten Strahle y entspricht als Trägheitsmoment $M_{yy}(\mathfrak{F})$ nach (γ) der Ausdruck:

$$(\delta) \qquad M_{yy}(\mathfrak{F}) = M_{gg}(\mathfrak{F}) \sin^2 \xi + M_{hh}(\mathfrak{F}) \cos^2 \xi - M_{gh}(\mathfrak{F}) \sin 2\xi.$$

Ferner kommt den in P zu einander senkrechten Strahlen x, y nach (α) das Zentrifugalmoment:

$$M_{xy}(\mathfrak{F}) = [\varrho_{Sx}\varrho_{Sy} - \varrho_{Sx'}\varrho_{Sy'}]\mathfrak{F}$$

zu. Es läfst sich auf gleiche Weise, wie $M_{xx}(\mathfrak{F})$ in die Gestalt:

$$(\varepsilon) \qquad M_{xy}(\mathfrak{F}) = \tfrac{1}{2}[M_{hh}(\mathfrak{F}) - M_{gg}(\mathfrak{F})] \sin 2\xi + M_{gh}(\mathfrak{F}) \cos 2\xi$$

überführen.

10. Gleichwertig in Bezug auf ihre Trägheitsmomente sind zwei Flächenstücke $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ eines ebenen Feldes ε, denen in Bezug auf seine Strahlen je gleiche Trägheitsmomente zukommen. Nach **7.** entspricht zwei solchen Flächenstücken $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ die gleiche Schar konfokaler Kegelschnitte, bezüglich deren Tangenten t die Trägheitsmomente ${}^{rr}M_{tt}(\mathfrak{F})$ und ${}^{rr}M_{tt}(\mathfrak{F}')$ je den gleichen Wert haben. Zu dieser Schar gehören die $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ bezw. zugewiesenen polaren Felder Γ und Γ', $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ haben demnach gemeinsame Hauptträgheitsachsen und gemeinsamen Schwerpunkt S. Ist $\varrho_{g'g}$ der parallel zur Richtstrecke r gemessene Abstand zweier Parallelen g', g des ebenen Feldes ε, von denen die eine — etwa g' — durch den Schwerpunkt S geht, so gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} {}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}) &= {}^{rr}M_{g'g'}(\mathfrak{F}) + \varrho_{g'g}^2 \mathfrak{F}, \\ {}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}') &= {}^{rr}M_{g'g'}(\mathfrak{F}') + \varrho_{g'g}^2 \mathfrak{F}'. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist aber:

$$ {}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}) = {}^{rr}M_{gg}(\mathfrak{F}') $$

und:

$$ {}^{rr}M_{g'g'}(\mathfrak{F}) = {}^{rr}M_{g'g'}(\mathfrak{F}'); $$

folglich wird:

$$ \varrho^2_{g'g}(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}') = 0 $$

oder:

$$ \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'. $$

Hiernach sind den zusammenfallenden Achsen der polaren Felder Γ^2 und Γ'^2 in Bezug auf S bezw. gleich grofse Trägheitshalbmesser konjugiert. Beiden Achsen kommen also in beiden polaren Feldern die nämlichen Punktinvolutionen zu, Γ^2 kann folglich nur mit Γ'^2 identisch sein. Kurz: zwei in Bezug auf ihre Trägheitsmomente gleichwertige Flächenstücke sind gleich grofs und bestimmen ein und dasselbe polare Feld Γ^2.

Das zu einem Flächenstücke $\mathfrak{F}$ gehörige polare Feld Γ^2 ist durch einen Mittelpunkt S und durch ein Poldreieck $P_1P_2P_3$ eindeutig festgelegt. In seinen Eckpunkten P_1, P_2, P_3 lassen sich nun bezw. drei Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ derart konzentrieren, dafs sie die Gesamtfläche $\mathfrak{F}$ und den Schwerpunkt S haben. Das mit diesem Flächensysteme verbundene polare Feld Γ'^2 hat ebenfalls $P_1P_2P_3$ zum Poldreieck und S zum Mittelpunkte; folglich fällt es mit dem von $\mathfrak{F}$ zusammen, oder das Flächenstück $\mathfrak{F}$ und die bezw. in P_1, P_2, P_3 konzentrierten Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ sind bezüglich ihrer Trägheitsmomente gleichwertig. Es lassen sich also in den Eckpunkten jedes Poldreiecks $P_1P_2P_3$ von Γ^2 bezw. drei Flächenstücke $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ derart konzentrieren, dafs sie $\mathfrak{F}$ bezüglich seiner Trägheitsmomente ersetzen.

Halensee-Berlin, 16. Juli 1901.

Historische und kritische Bemerkungen über den Begriff der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte.

Von RICHARD MÜLLER in Berlin.

Die Absicht dieser Zeilen ist, auf die seltsame Unsicherheit hinzuweisen, welche bei der Behandlung der ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte in einigen der verbreitetsten Lehrbücher zur Erscheinung kommt.

Der natürliche Ausgangspunkt für diesen Begriff liegt in der Elementargeometrie des Ähnlichkeitspunktes zweier Polygone; daher sind allgemein zwei krumme Linien ähnlich und ähnlich liegend, wenn in ihnen durch die von einem gewissen Punkte, dem Ähnlichkeitspunkte, ausgehenden Strahlen homologe parallele Sehnen projiziert werden. Daraus ergiebt sich im besonderen für zwei ähnliche und ähnlich gelegene *Kegelschnitte*, dafs irgend zwei konjugierte Durchmesser des einen den entsprechenden konjugierten Durchmessern des andern parallel sein müssen, oder mit andern Worten, dafs diese Kegelschnitte auf der unendlich fernen Geraden dieselbe Involution bestimmen.

Dieser Satz darf aber nicht umgekehrt werden, wie wir schon bei Poncelet lesen können, Traité des propriétés projectives (Paris 1822, Art. 91): „il est évident, en effet, que, pour que des hyperboles aient une sécante commune à l'infini, il suffit que leurs asymptotes soient parallèles; or elles ne seront nullement semblables, si elles se trouvent comprises dans des angles d'asymptotes différens."

Sonderbarer Weise wird etwa 50 Jahre später mehrfach das Gegenteil gelehrt. Z. B. heifst es in dem für die französischen Schulen mafsgebenden Traité de géométrie élémentaire von Rouché und de Comberousse (3. Aufl., Paris 1873, II. Nr. 1170, und zwar in wörtlicher Anlehnung an Chasles, Traité des sections coniques, Paris 1865, I. Nr. 374): „Réciproquement, lorsque la droite de l'infini est une corde commune à deux coniques, ces courbes sont homothétiques." Der angefügte Beweis enthält eine Lücke, weil er die von den Verfassern (in Nr. 1168) direkt ausgesprochene Forderung der gleichzeitigen Realität homologer Punkte der ähnlichen Kurven un-

berücksichtigt läfst. Noch auffälliger erscheint es, wenn in den von H. Schröter herausgegebenen Steinerschen Vorlesungen: „Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften“ (2. Aufl., Leipzig 1876, § 43 Schlufs) unter Verzicht auf jede geometrische Begründung in Parenthese gesagt wird: „Zwei Kegelschnitte heifsen nämlich ähnlich und ähnlich liegend, wenn ihnen dasselbe Punktsystem auf der unendlich entfernten Geraden G_∞ zugehört, d. h. G_∞ eine reelle oder ideelle gemeinschaftliche Sekante derselben ist.“ Dem gleichen Gedanken begegnen wir endlich auch bei Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte (4. Aufl., Leipzig 1878, Art. 242): „Zwei Kegelschnitte sind demnach ähnlich und ähnlich gelegen, wenn die Koeffizienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen in beiden übereinstimmen, oder nur durch einen konstanten Faktor verschieden sind.“ Zum Beweise wird für zwei parallele Halbmesser r und r' das Verhältnis $r^2 : r'^2$ gebildet, jedoch über das Vorzeichen dieses Bruches nichts gesagt. Dem rein analytisch denkenden Mathematiker mag es ja vielleicht unbedenklich erscheinen, die reelle und die imaginäre Ellipse:

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1 \quad \text{und} \quad x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = -1$$

ähnlich und ähnlich gelegen zu nennen, weil ihre Axenlängen den Proportionalitätsfaktor i zeigen; aber die alsdann konsequente Anwendung auf die beiden konjugierten Hyperbeln:

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1 \quad \text{und} \quad x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = -1$$

dürfte doch der geometrischen Anschauung zu sehr widerstreben, weil diese immer die Ähnlichkeit in den sichtbaren Zweigen verlangen würde.

Die genannten Lehrbücher sind inzwischen (zum Teil wiederholt) neu aufgelegt worden. Das französische Werk enthält die beanstandete Stelle noch jetzt unverändert (7. Aufl., Paris 1900, Art. 1180); die deutschen Autoren aber sind kritischer gewesen. Herr Fiedler hat sich der Mitwirkung seines Sohnes versichert, der nach der Vorrede besonders das Imaginäre systematischer behandelt hat; daher wurde auch der fragliche Art. 242 (6. Aufl., Leipzig 1898) völlig verändert; durch den Zusatz: „Man pflegt in der Regel nur den Fall eines reellen Proportionalitätsfaktors $r : r'$ in Betracht zu ziehen“ ist eine Annäherung an die von Poncelet vertretene Auffassung vollzogen. Die darauf folgenden beiden Absätze enthalten eine scharfe Darstellung der Frage. Auch die Steinerschen Vorlesungen haben nach Schröters Tode in Herrn R. Sturm einen neuen Herausgeber gefunden, dem der Mangel der früheren Darstellung nicht entgangen ist; in dem völlig umgearbeiteten § 43 (3. Aufl., Leipzig 1898) wird nun entsprechend den beiden Fällen des reellen und imaginären Proportionalitätsfaktors

Ähnlichkeit der Kegelschnitte im engeren und weiteren Sinne unterschieden, und dazu bemerkt: „Man macht diese eigentlich nicht erlaubte Erweiterung, um manche Sätze bequemer aussprechen zu können.“ (S. 254).[1])

Gewifs ist eine Ausdehnung eines ursprünglich engeren mathematischen Begriffes oft von höchstem Nutzen (man denke z. B. an den Potenzbegriff oder an den sogenannten unendlich fernen Schnittpunkt zweier Parallelen), aber über die Zulässigkeit einer solchen Erweiterung entscheidet nicht blofs die Anzahl und Wichtigkeit der dadurch einheitlich zusammengefafsten Sätze, sondern vor allem die widerspruchslose Einfügung in den Rahmen derjenigen Gesetze, welche den engeren Begriff beherrschen. Herr Reye hat in seinem Lehrbuche (Geometrie der Lage, I, 4. Aufl., 1899, S. 197) die von Herrn Sturm vorgeschlagene Begriffserweiterung nicht angenommen; er bleibt dabei, dafs Hyperbeln mit derselben Durchmesser-Involution nur dann ähnlich sind, „wenn sie in demselben Asymptoten-Winkel liegen“. Übrigens hat an dieser Stelle das Wort homothetisch eine andere Bedeutung als bei den französischen Autoren, wodurch die Klarheit auf diesem Gebiete abermals erschwert wird.

Berlin, 19. Juni 1901.

1) In Anknüpfung an diese Bemerkung des Herrn Sturm ist es vielleicht am Platze, auf den Satz hinzuweisen: Parallele Ebenen schneiden eine Fläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten. Der Satz verlangt, dafs man den Begriff der Ähnlichkeit „im weiteren Sinne“ auffasse. Vielleicht hat gerade die „bequeme“ Fassung dieses viel gebrauchten Satzes dazu mitgewirkt, der von dem Herrn Verf. der vorliegenden Note mit Recht gerügten Ungenauigkeit des Ausdrucks Bürgerrecht in dem Sprachgebrauche der Mathematik zu verschaffen. Jedenfalls sollte aber stets auf die Erweiterung des Begriffes der Ähnlichkeit in ihm aufmerksam gemacht werden; so sind z. B. beim hyperbolischen Paraboloid $x^2/a - y^2/b = 2z$ die zur xy-Ebene parallelen ebenen Schnitte nur „im weiteren Sinne“ für positive und negative Abstände von der xy-Ebene als ähnlich zu bezeichnen. Um zwei der bekanntesten Werke anzuführen, in denen ein derartiger Hinweis fehlt, nennen wir Hagens Synopsis, Bd. II, S. 328 (1894) und Salmon-Fiedlers Analytische Geometrie des Raumes, 6. Aufl., I. Teil, S. 94 (1898).

O. Hesse dagegen drückt sich in seinen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung“ (Leipzig, 1861) S. 334 so aus: „Parallele Ebenen schneiden eine Oberfläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten. Wir verstehen nämlich unter ähnlichen Kegelschnitten solche, deren Hauptachsen dasselbe Verhältnis haben, und unter ähnlich liegenden Kegelschnitten solche, deren Hauptachsen parallele Richtung haben.“ Doch ist der Sinn des letzten Satzes in Bezug auf die vorliegende Frage nicht ganz klar. E. Lampe.

Rezensionen.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von **Gustav Eneström** in Stockholm. 3. Folge. 2. Band. 476 S. Mit dem Bildnisse von E. Beltrami als Titelbild, und den in den Text gedruckten Bildnissen von K. Peterson und O. Schlömilch, sowie 18 Textfiguren. 1901. Preis des Bandes M. 20.

Es ist eine nicht wegzuleugnende Thatsache, dafs vielen Mathematikern der Sinn für die Geschichte ihrer Wissenschaft abgeht, und dafs es so ist, kann man auch leicht begreifen. Wer eigne Ideen hat und Neues findet oder zu finden glaubt, der kümmert sich höchstens um das, was seine unmittelbaren Vorgänger geleistet haben, kommt aber nicht dazu, sich mit den Untersuchungen aus älteren Zeiten zu beschäftigen, von denen er sich doch keinen unmittelbaren Nutzen für seine eigenen Arbeiten versprechen kann. Es gehört in der That für den, der Neues produzieren kann, eine gewisse Aufopferung dazu, sich in den Ideenkreis einer längst entschwundenen Zeit zurückzuversetzen und mathematischen Entwickelungen nachzugehen, die vom heutigen Standpunkte aus vielfach sehr unvollkommen erscheinen, wenn sie auch vielleicht die Keime ausgedehnter Theorien enthalten, auf die wir jetzt mit Bewunderung blicken.

Niemand wird verlangen, dafs jeder Mathematiker sich selbst als Forscher mit der Geschichte der Mathematik beschäftige, aber es sollte doch wenigstens keiner sich der Erkenntnis verschliefsen, dafs die Geschichte der Mathematik auch wert ist, betrieben zu werden, ja dafs sie betrieben werden mufs, wenn nicht bei der eben so sehr in die Breite wie in die Tiefe gehenden Entwickelung der Mathematik die Übersicht über das Ganze und über den Einflufs der einzelnen Gebiete auf einander ganz verloren gehen soll. Und dann, wie viele der landläufigen Angaben über die Urheber der einzelnen Sätze erweisen sich bei genauerer Betrachtung als irrtümlich, obgleich sie immer ein Lehrbuch vom andern abschreibt. Sollten nicht gerade die Mathematiker, von denen man sagt, sie pflegten ihre Behauptungen auch zu beweisen, mehr als andere das Bedürfnis haben, auch in diesem Punkte nur solche Angaben zu machen, auf die man sich wirklich verlassen kann?

Erfreulicherweise ist aber doch die Erkenntnis der Wichtigkeit historischer Studien auf dem Gebiete der Mathematik heutzutage schon viel weiter verbreitet als noch vor wenigen Jahrzehnten. Ein deutlicher Beweis dafür sind die Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung mit ihren zum Teil ganz hervorragenden Referaten über die Entwickelung einzelner Gebiete, dann aber auch das grofsartige Unternehmen der „Ency-

klopädie der mathematischen Wissenschaften", das in Gestalt einer Kodifikation des gegenwärtigen Standes der Mathematik zugleich in gewissem Sinne eine Art Geschichte wenigstens der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts bietet. Unter diesen Umständen braucht eine ausschliefslich der Geschichte der mathematischen Wissenschaften gewidmete Zeitschrift, wie wir sie seit zwei Jahren in der *Bibliotheca Mathematica* besitzen, ihre Existenzberechtigung nicht erst zu beweisen, sondern erscheint vielmehr als eine geradezu unentbehrliche Ergänzung der übrigen mathematischen Zeitschriften, die ihrer ganzen Anlage nach historischen Arbeiten nur ausnahmsweise Aufnahme gewähren können.

Allerdings ist ja die Bibliotheca Mathematica an sich beträchtlich älter als diese zwei Jahre, aber in ihrer früheren Gestalt konnte sie wegen ihres äufserst beschränkten Umfangs und wegen ihrer geringen Verbreitung — gar mancher Mathematiker wufste kaum, dafs sie vorhanden war — dem bestehenden Bedürfnis nicht genügen. Die Mathematiker sind daher der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner entschieden zum gröfsten Danke verpflichtet, dafs sie es dem Gründer der Bibliotheca Mathematica, Herrn Eneström, ermöglicht hat, seine Zeitschrift so zu erweitern und ihr einen solchen Zuschnitt zu geben, dafs sie wirklich als Zentralstelle für Alles, was auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik geleistet wird, dienen kann. Möchte sich dieser Dank nun auch durch die That beweisen, indem recht viele Mathematiker die Bibliotheca Mathematica unterstützen, sowohl durch Beiträge als auch namentlich dadurch, dafs sie zu ihren Abonnenten werden.

Der zweite Band der Bibliotheca Mathematica, der jetzt nach dem Erscheinen des vierten Heftes vollständig vorliegt, ist ebenso wie der erste durch Reichhaltigkeit und Vielseitigkeit des Inhalts ausgezeichnet. Von gröfseren Aufsätzen ist vor allen Dingen zu nennen die ausführliche Darstellung, die Loria dem Leben und den mathematischen Leistungen Beltramis gewidmet hat, das beigegebene vortreffliche Bild Beltramis ist ein besonderer Schmuck des Bandes. Einen Nachruf an O. Schlömilch (mit Bildnis) hat M. Cantor beigesteuert und eine Würdigung der Arbeiten des viel zu wenig beachteten, russischen Mathematikers K. Peterson (1828—81) giebt Stäckel, ebenfalls mit einem Bildnisse. Sehr dankenswert ist auch ein vom Herausgeber bearbeitetes Verzeichnis der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker mit Angabe der über sie erschienenen Nekrologe. Die sonstigen Aufsätze alle aufzuzählen, geht hier nicht an, ich nenne daher nur einige: F. Hultsch giebt neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung, F. Schmidt handelt über Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz. M. Koppe schildert die Näherungsmethoden, die Huygens zur Kreis- und Logarithmenberechnung benutzt hat. M. Kutta handelt über elliptische und andere Integrale bei Wallis. G. Heinrich zeigt, dafs James Gregory in seiner „Vera circuli et hyperbolae quadratura" (1668) thatsächlich schon den Versuch gemacht hat, zu beweisen, dafs die Quadratur des Kreises nicht durch algebraische Hilfsmittel ausführbar ist. In drei Aufsätzen von v. Braunmühl, „Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation", „Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten Moivreschen Satzes", „Zur Geschichte der Trigonometrie im 18. Jahrhundert", werden verschiedene der landläufigen, in den

Lehrbüchern immer wiederkehrenden Angaben über diese Dinge als falsch nachgewiesen und berichtigt. In der Abhandlung: „Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im 18. Jahrhundert", zeigt Stäckel, daſs auch die hydrodynamischen Untersuchungen von Clairaut, d'Alembert, Euler und Lagrange eine ganze Reihe von Gedanken enthalten, die die moderne Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen vorbereitet haben. Eine nicht unwichtige praktische Frage erörtert derselbe in dem Aufsatze: „Wie sollen die Titel der mathematischen Zeitschriften abgekürzt werden?" Jedes Heft enthält eine Rubrik: „Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik", ein Verzeichnis neu erschienener Schriften und eine kurze wissenschaftliche Chronik. Auch mehrere interessante Rezensionen findet man; besonders erwähnenswert ist eine vom Herausgeber über die neue Auflage der dritten Abteilung des dritten Bandes der Cantorschen Geschichte, erwähnenswert namentlich deshalb, weil darin die Kritik mehr zur Geltung kommt, als in den bisher erschienenen Besprechungen. Daſs der Herausgeber durch Beifügung eines Autorenregisters, eines Sachregisters und eines Namenregisters das Zurechtfinden auf jede nur denkbare Weise erleichtert und die Benutzbarkeit des Bandes nach Möglichkeit gesteigert hat, war nicht anders zu erwarten, es muſs aber ausdrücklich erwähnt werden, denn es wäre nur zu wünschen, daſs recht viele Herausgeber von Zeitschriften und auch von Büchern sich daran ein Beispiel nähmen.

Möchten diese Zeilen dazu beitragen, recht viele Mathematiker auf die Bibliotheca Mathematica aufmerksam zu machen, und möchten dem vorliegenden Bande noch viele andere folgen. An Stoff fehlt es ja nicht.

Leipzig, im Januar 1902. F. Engel.

Vorreden und Einleitungen zu klassischen Werken der Mechanik: Galilei, Newton, D'Alembert, Lagrange, Kirchhoff, Hertz, Helmholtz. Übersetzt und herausgegeben von Mitgliedern der Philosophischen Gesellschaft an der Universität Wien. (II. Band der Veröffentlichungen der Philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien). Leipzig 1899, C. E. M. Pfeiffer. VII + 258 S.

Eine Sammlung von Vorreden? Diese etwas verwunderte Frage drängt sich vermutlich zuerst auf alle Lippen, wie wir sie selbst zu stellen uns nicht enthalten konnten. Eine Sammlung von Ansichtspostkarten ersetzt keine Reise, eine Sammlung von Speisefolgen keine Mahlzeit, eine Sammlung von Konzertzetteln kein Musikstück. So waren unsere ersten Gedanken; aber bald ergänzten sie sich dahin, daſs, wenn eine Sammlung von Ansichtspostkarten keine Reise ist, sie doch die Veranlassung bieten kann, die Schritte da oder dorthin zu richten. Eine Vorrede, gedankenreich und in anmutender Sprache verfaſst, hat nicht selten einem neuen Werke Leser verschafft. Um wie viel mehr mag das bei schon berühmten, aber darum doch keineswegs allgemein bekannten Werken der Fall sein, und wenn von denen, welche hier erstmalig die Darstellungsweisen der groſsen Förderer der Mechanik kennen lernen, einer oder der andere für das vollständige Studium ihrer Werke gewonnen wird, so liegt darin eine Rechtfertigung der Sammlung. Neben diesem mehr mittelbaren Nutzen bringt die Samm-

lung aber auch unmittelbar wertvolle Kenntnisse zum Bewufstsein des Lesers. Steckt doch in den in ihr mitgeteilten Vorreden und Einleitungen eine Fülle feiner Bemerkungen, teilweise schon weit und breit bekannt und fruchtbar geworden, teilweise vielleicht noch eines Entdeckers harrend, der den wahren Sinn ermittle. Ging es doch oft genug so, dafs unzählige Leser an einem Satze vorüber eilten, bis Zufall oder ähnlich geartete Geistesrichtung einen Leser gerade an der Stelle verweilen liefs, sodafs sie in ihm ihren Keim niederlegen konnte. Unter allen Umständen ist es aber lehrreicher, einen Gedanken unverfälscht und unverändert kennen zu lernen, wie sein Urheber ihn aussprach, als in absichtlicher oder unabsichtlicher Umformung. Darum haben die Herren Herausgeber sehr richtig gehandelt, indem sie hinter ihren Übersetzungen auch den ursprünglichen lateinischen oder französischen Wortlaut zum Abdruck bringen liefsen. Als Herausgeber sind genannt die Herren Zindler, v. Schmeidler, v. Sterneck, Höfler.

Heidelberg. M. Cantor.

H. Schubert. Mathematische Mufsestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Zweite, stark vermehrte Auflage. Leipzig 1900. G. J. Göschen.

Erster Band: Zahl-Probleme. 4 Mk.

Zweiter Band: Anordnungs- und Wahrscheinlichkeitsprobleme. 4 Mk.

Dritter Band: Reise-Probleme und geometrische Probleme. 4 Mk.

„Es handelt sich hier um kein streng wissenschaftliches Werk, sondern um ein Buch, in dem der Verfasser allerhand Gedanken über Dinge niedergelegt hat, die mit der Mathematik in Berührung stehen und mit denen sich jeder Gebildete oft und gern in seinen Mufsestunden beschäftigt. Es sind ungezwungene kritisch-historische Betrachtungen und unterhaltende Plaudereien über alle möglichen Probleme und Kunststücke, die in einer auch dem Laien leicht fafslichen Form vorgeführt, erklärt und ergänzt werden."

Es ist ein Werk, wie es die Franzosen in den Récréations mathématiques von E. Lucas und die Engländer in den Mathematical Recreations von R. Ball längst besitzen. Doch ist der bei weitem gröfste Teil der vorliegenden Sammlung aus eignen Studien des in Schulkreisen sowohl wie in der wissenschaftlichen Welt rühmlichst bekannten Verfassers hervorgegangen.

Das Werk wird übrigens auch mit Vorteil für den Unterricht zu verwerten sein, und zwar sowohl für das algebraische und arithmetische wie für das geometrische Pensum. Aus dem reichen Inhalt mögen einige Probleme hervorgehoben werden, welche nach dieser Richtung das Interesse der Schüler zu steigern geeignet sind.

Erster Band: Erraten gedachter Zahlen. Vorauswissen erhaltener Resultate. Über sehr grofse Zahlen. Neuner-Probe und Neunerkunststück. Pythagoreische und heronische Zahlen. Arithmetische Trugschlüsse.

Zweiter Band: Die Spaziergänge der Pensionatsdamen. Aufgaben der erschwerten Überfahrt. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Skatspiel.

Dritter Band: Gruppierung von Punkten, so dafs immer drei von ihnen in gerader Linie liegen. Der goldene Schnitt. Teilung des Kreises. Geo-

metrische Trugschlüsse. Die Quadratur des Kreises. Das delische Problem. Die Trisektion des Winkels. Die vierte Dimension.

Ref. schliefst mit dem Wunsche, dafs das interessante und anregende Werk von recht vielen Lehrern und Schülern gelesen werden, insbesondere in keiner Schulbibliothek fehlen möge.

Berlin. E. Jahnke.

K. Kuhn. Lehrbuch der Elementar-Arithmetik. I. Teil. Zweite verbesserte Auflage. Hildburghausen, 1900. O. Petzoldt. 48 S.

Das Lehrbuch handelt in dem Rahmen von 48 Seiten von den vier Grundoperationen und den linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten nebst zahlreichen Übungsaufgaben. An der Darstellung ist die knappe Ausdrucksweise und das Fehlen unnötigen Ballastes lobend zu erwähnen. Dem Verfasser ist ein Versehen untergelaufen, wenn er an Stelle des Ausdrucks „mehrgliedrige Gröfsen" den Ausdruck „komplexe Gröfsen" anwendet.

Berlin. E. Jahnke.

K. Schwering. Stereometrie für höhere Lehranstalten. Zweite Auflage. Freiburg i. B., 1900. Herder. 56 S. M. 1,10.

Das Buch ist mustergiltig für den stereometrischen Unterricht. Es zerfällt in zwei Teile. Im ersten giebt der Verfasser einen Lehrgang, wie er etwa für die Unter-Sekunda einer Berliner Realschule geeignet ist. Der zweite Teil enthält eine breitere Darstellung des gewöhnlichen stereometrischen Pensums. Hier geht der Verfasser in einem besonderen Paragraphen auf die Schnitte des geraden Kreiscylinders und des geraden Kreiskegels ein. Ein letzter Paragraph giebt einige Sätze der orthogonalen Projektion.

Jeder Paragraph schliefst mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben, die der Verfasser der „100 Aufgaben" interessant genug auszuwählen versteht.

Berlin. E. Jahnke.

K. Schwering. Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Zweite Auflage. Freiburg i. B., 1900. Herder. 53 S. M. 1,10.

Das Buch zerfällt in 3 Lehrgänge. „Den amtlichen Lehrvorschriften entsprechend erfolgt der wissenschaftliche Aufbau der Trigonometrie erst im dritten und letzten Lehrgange des vorliegenden Buches. Auf den beiden früheren Stufen werden die dem Auge des Lernenden am meisten auffallenden Umrisse des Lehrgebäudes nach und nach sichtbar."

Referent ist mit dieser Spaltung nicht einverstanden, weil sie nach seiner Meinung in das trigonometrische Pensum Schwierigkeiten hineinträgt, die ihm fremd sind. So bringt der Verfasser die zweite Definition der trigonometrischen Funktionen am Kreise vom Radius Eins erst im dritten Lehrgang und erschwert sich dadurch die Klarstellung der Thatsache, dafs der Sinus- und Cosinus-Satz auch für stumpfwinklige Dreiecke gelten. Aber auch Unklarheiten haften der Darstellung des Verfassers an, insofern die Additionstheoreme nur für spitze Winkel bewiesen, aber auch für stumpfe Winkel angewendet werden.

Im einzelnen bietet das Lehrbuch eine Fülle des Interessanten und Brauchbaren, insbesondere was die Übungsaufgaben anbetrifft, weshalb das Studium des Buches den Fachgenossen nur angelegentlichst empfohlen werden kann.

Berlin. E. Jahnke.

H. Ganter und **F. Rudio.** **Die analytische Geometrie der Ebene.** IV. Auflage. Leipzig 1900, B. G. Teubner. VIII, 180 S.

Bei der Beliebtheit des in der Überschrift genannten Buches dürfen wir uns mit einigen Daten begnügen. Im 35. Bande der Zeitschrift f. Math. u. Phys. freuten wir uns das 1888 erschienene Werkchen unseren Lesern empfehlen zu können. Februar 1894 ist die Bezeichnung der Vorrede zur 2. Auflage, November 1896 die der Vorrede zur 3. Auflage, welche in einer größeren Anzahl von Exemplaren als die vorhergehenden gedruckt wurde. Trotzdem durften die Verfasser schon im September 1899 die Vorrede zu einer 4. Auflage fertigstellen. Das der neuen Auflage beigegebene alphabetische Sachregister wird gewifs den meisten Benutzern sehr willkommen sein.

Heidelberg. M. Cantor.

P. L. Tschebyscheff. **P. L. Tschebyscheff und seine wissenschaftlichen Leistungen von A. Wassilief. Die Tschebyscheffschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen von N. Delaunay.** Leipzig 1900, B. G. Teubner. 70 S.

In dem 44. Bande der Zeitschrift f. Math. u. Phys., Hist. Litter. Abtlg. S. 62 ist ein in französischer Sprache verfafstes Lebensbild von Tschebyscheff besprochen. Ebendort S. 101—111 findet sich eine Darstellung der Tschebyscheffschen Arbeiten über Gelenkmechanismen. Eine deutsche Übersetzung jenes Lebensbildes, der Abdruck jener Abhandlung sind zu einer kleinen Schrift vereinigt worden, welche uns heute in hübscher Ausstattung vorliegt. Auch das der französischen Ausgabe angeheftete Bildnis Tschebyscheffs in Heliogravüre ist der deutschen Bearbeitung beigegeben.

Heidelberg. M. Cantor.

Adolf Klas. **Die Dreiteilung und Fünfteilung des Winkels** auf dem Wege der elementaren Geometrie allein mit Lineal und Zirkel gelöst und dargelegt. Wiesbaden 1900, Hermann Ferger. 14 S. 9 Figurentafeln.

Der Verfasser kennt den Beschlufs der Pariser Akademie der Wissenschaften von 1775, Trisektionsversuche ohne weitere Prüfung zurückzuweisen. Nichtsdestoweniger hat er seiner Überzeugung nach die Aufgabe gelöst. Wohlwollende Freunde scheint er auch zu besitzen, welche ihm bedeuteten, ein von ihm als gleichschenklig angenommenes Dreieck sei thatsächlich nicht gleichschenklig. Dieser besondere Einwand fruchtete bei Herrn Klas nicht mehr als der allgemein gehaltene alte Pariser Beschlufs. Wir unterlassen weitere Bemühung ihn eines Besseren zu belehren.

Heidelberg. M. Cantor.

F. Bohnert. Ebene und sphärische Trigonometrie. VIII + 160 Seiten mit 47 Textfiguren. Leipzig 1900, Göschen.

Im vorliegenden Bande III der „Sammlung Schubert" giebt Herr Bohnert in Hamburg möglichst parallelgehende Behandlungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie in der üblichen Anordnung und klarer, leicht faſslicher Darstellung. Gegenüber sonstigen Lehrbüchern der Trigonometrie, welche in der Regel direkt als Schulbücher gelten, tritt hier der Übungsstoff etwas zurück. Der Verfasser hat neben die ursprüngliche Definition der trigonometrischen Funktionen im Abschnitt I auch deren Deutung durch Kurven auf Grund eines rechtwinkligen Koordinatensystems gesetzt. Es kann zweifelhaft sein, ob dies pädagogisch glücklich ist. Ausführlicheres über Koordinatensysteme wird erst später (Abschnitt III) erörtert. Erschwerend wirkt auch noch die Unabhängigkeit der Maſseinheiten für Abscissen- und Ordinatenachse. Man könnte es für vorteilhafter halten, diese Betrachtung erst später im Verein mit der Besprechung des Bogenmaſses der Winkel (S. 142, wo übrigens der Druckfehler stehen geblieben ist, daſs der Winkel $0^0\,0'\,0''$ in Bogenmaſs gleich 0,000005 sein soll) zu bringen. Hier wäre es dann zugleich leicht, dieselbe Maſseinheit für beide Achsen zu Grunde zu legen, die Kurven für die trigonometrischen Funktionen würden dabei noch etwas bestimmter und deshalb leichter faſsbar herauskommen. Für den allerersten Anfang aber hätte der Leser allein mit der Deutung der Funktionen am rechtwinkligen Dreieck, bez. am Kreise des Radius 1 zu arbeiten. Immerhin läſst sich über solche Fragen streiten. Dagegen glaube ich, daſs eine Bemerkung zu S. 108 keinen Widerspruch finden wird. Die Nepersche Regel wird hier unter Zugrundelegung eines regelmäſsigen Fünfecks in äuſserlicher Weise gefaſst. Bei Neper selbst und in Gauſs' „Pentagramma mirificum" wird auf organischem Wege aus irgend einem ersten rechtwinkligen Dreieck ein sphärisches Fünfeck gewonnen, umgeben von fünf rechtwinkligen Dreiecken, bei denen die fünf Bestimmungsstücke gerade auf alle Arten cyklisch permutiert erscheinen. In dieser Neperschen Konstruktion liegt der Hauptreiz der Lehre von den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken, und sie wäre dieserhalb wirklich wert, ihrer Vergessenheit entrissen und zum eisernen Bestand der sphärischen Trigonometrie gemacht zu werden. Natürlich betrifft diese Bemerkung in keiner Weise die Brauchbarkeit des vorliegenden Buches, welches sich namentlich durch groſse Vollständigkeit des analytischen Aufbaus vorteilhaft auszeichnet.

Braunschweig. FRICKE.

Max Simon. Analytische Geometrie der Ebene. VII + 372 Seiten mit 96 Textfiguren. Leipzig 1900, Göschen.

Wenn mit dem Bande VIII der „Sammlung Schubert", analytische Geometrie der Ebene, auch nicht gerade eine Lücke der mathematischen Litteratur ausgefüllt wird, so wird man eine Darstellung der analytischen Geometrie aus der Feder des hochverehrten Verfassers doch gerne entgegennehmen, zumal derselbe in der Abfassung von Lehrbüchern über analytische Geometrie nachgerade die nötige Übung besitzt. Zur Charakteristik des Buches diene vor allem die Angabe, daſs Herr Simon die projektive Be-

trachtungsweise stark in den Vordergrund rückt. Dies geht so weit, daſs nach Absolvierung des Kreises sogleich die projektive Behandlung der allgemeinen Kurve zweiten Grades als Punkt- und als Tangentengebilde gegeben wird. Daran reiht sich die projektive Erzeugung der Kegelschnitte, die Betrachtung der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittreihen, und erst nun folgt last, not least die spezielle Behandlung der „eigentlichen" Kegelschnitte. Die systematische Behandlung erstreckt sich in der Hauptsache nur auf Gerade und Kegelschnitte. Von höheren Kurven kommen, abgesehen von einigen wenigen allgemeinen Bemerkungen, nur einige besonders wichtige Typen zur Behandlung, nämlich die Cissoide, die Kardioide, die Astroide, die dreispitzige Hypocykloide, die Lemniskaten, die Spirale des Archimedes und die Cykloide. Das Buch ist aufs reichste mit Übungsaufgaben ausgestattet; hierin liegt sogar ein Hauptwert desselben.

Braunschweig. FRICKE.

Emil Haentzschel. Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin. Ostern 1900. Mit 4 Figuren. 31 S. 4°. Berlin 1900, B. Gaertner's Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). Programm No. 58.

In der Trigonometrie werden gewisse Winkelfunktionen spitzer Winkel als Quotienten gewisser Strecken erklärt, und dann muſs man später den Übergang zu den früher der Erklärung nicht unterworfenen Winkelfunktionen nichtspitzer Winkel machen. Irgendwo ist dazu eine Erweiterung des Begriffes der Winkelfunktion vorzunehmen, bei welcher die sogenannte Permanenz der formalen Gesetze gewahrt bleibt. An welcher Stelle diese Erweiterung eintritt, dürfte an und für sich gleichgültig sein. Man könnte z. B. die für spitze Winkel α, β, $\alpha + \beta$ bewiesenen Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ als allgemeingültig aussprechen und daraus den Wert der Winkelfunktionen nichtspitzer Winkel entnehmen. Herr Haentzschel hat die Erweiterung an eine andere Stelle verlegt. Er zeigt geometrisch, daſs für spitze Winkel α die vier Sätze stattfinden:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha = 1.$$

Er zeigt auſserdem wiederum geometrisch, daſs in dem gleichen Winkelbereiche

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.$$

Dadurch nimmt die Gleichung für den $\cos\alpha$ die Gestalt an:

$$\cos\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1.$$

Jetzt werden die gewonnenen Sätze als Definitionen der Winkelfunktionen benutzt, und mit ihrer Hilfe findet man die Bedeutung der Funktionen nichtspitzer Winkel.

Heidelberg. M. CANTOR.

Das Stiftungsfest der Kaiser Wilhelm-Universität Strafsburg am 1. Mai 1900. Strafsburg 1900. Universitäts-Buchdruckerei von J. H. Ed. Heitz (Heitz & Mündel). 55 S.

Eingeschlossen zwischen der kurzen Abschiedsrede des scheidenden Rektors, Professor Dr. Th. Ziegler, und einigen Gedächnisworten des Professors Dr. Windelband auf den am 17. März 1900 bestatteten Elwin Bruno Christoffel bietet die Programmschrift eine hochinteressante Antrittsrede des neuen Rektors, Professor Dr. Heinrich Weber: *Über die Entwickelung unserer mechanischen Naturanschauung im 19. Jahrhundert.* Auf 20 Druckseiten hat der Redner eine fast übergrofse Fülle von Thatsachen und von Gedanken zusammenzudrängen gewufst, dem Laien einen Einblick in die Aufgaben der heutigen mathematischen Physik gestattend, dem Fachmanne geistvolle Winke bietend, wohin er etwa zu streben habe, falls die Beschaffenheit seiner Geisteskräfte ihn nach philosophisch-mathematischen Bahnen führt. Aus einem Extrakte, wie Herr Weber ihn bereitete, durch nochmaliges Ausziehen des Allerwesentlichsten einen Bericht zu fertigen, scheint uns unmöglich. Wir beschränken uns darauf, unseren Lesern dringend zu empfehlen, sich mit Webers Rede bekannt zu machen. Eine schönere Darstellung der geschichtlichen Entwicklung, welche der Satz von der Erhaltung der Energie im 19. Jahrhundert durchgemacht hat, eine schärfere Fassung der von Heinrich Hertz teils neu aufgeworfenen, teils schon beantworteten Fragen, eine feinere Würdigung der Genügsamkeit, welche der Aufgabe der Erklärung von Fernwirkungen sich nachgrade beigemengt hat, wird auf dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft kaum gegeben werden können, als Herr Weber sie in formvollendeter Sprache geschaffen hat.

Heidelberg. M. Cantor.

M. Schuster. Stereometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht in den oberen Klassen höherer Schulen. Mit besonderer Berücksichtigung der Methoden der darstellenden Geometrie. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1901. Fortführung von des Verfassers früher erschienenen geometrischen Aufgaben.

Eine neue geometrische Aufgabensammlung bildet, wenn sie wie die vorliegende sich nicht auf ausgetretenen Pfaden bewegt, sondern neue Richtungen einzuschlagen strebt, immer ein Ereignis für den mathematischen Schulunterricht. Gerade für diesen sind gute Lehrbücher eine absolute Notwendigkeit, während sie andererseits doch nur das Material liefern können und die Auswahl und Verwertung desselben stets dem Lehrer überlassen bleiben mufs. Geometrische Begriffe können die Schüler nicht aus toten Buchstaben, sondern nur aus lebendiger, klarer Anschauung gewinnen, und diese Anschauung zu wecken und auszubilden, ist eben die Aufgabe des Lehrers. Freilich wird er gerade hierin bei einer grofsen Anzahl seiner Schüler ein unübersteigbares Hindernis finden. So lange es sich um endliche Körper handelt, die sie wirklich vor Augen haben oder wenigstens gehabt haben, kann ihr Verständnis folgen, aber das abstrakt räumliche Anschauungsvermögen ist ihnen verschlossen, bei allem Fleifs und aller Mühe können sie nicht dazu gelangen, sich Ebenen und gerade Linien an und für sich,

in ihrer unbegrenzten Ausdehnung vorzustellen. Wo für den mathematisch begabten Schüler das eigentliche Interesse erst anfängt, da stirbt es für die übrigen völlig ab. Diese brauchen etwas Handliches, Greifbares, das Reich der reinen Formen ist ihnen unzugänglich. Es ist der Gletscherwelt des Hochgebirges vergleichbar, in die sich nur der kühne Bergsteiger hinaufwagt, während sich der grofse Haufe unter den grünen Wiesen und Wäldern wohlfühlt und die Freude an der starren, strengen Schönheit jener Höhen nicht verstehen kann. Er verlangt einen Platz, auf dem etwas wächst, eine Beziehung auf das reale, praktische Leben. Eine mathematische Erkenntnis ist ihm wertlos, wenn er sie nicht in die Wirklichkeit umsetzen kann. So findet er grofses Interesse an der Trigonometrie und gerade an Fragen, über die der Mathematiker rasch hinweggleitet. Es wird immer sein Erstaunen erregen, wenn er erfährt, wie man die Höhe eines Berges bestimmt, ohne ihn zu besteigen, oder wie man die Entfernung zweier Orte messen kann, die jenseits eines unüberschreitbaren Flusses liegen, u. a. m. Es ist eine alte Überlieferung, die jedermann aus dem Schillerschen Epigramme kennt, dafs Archimedes wegen seiner technischen Erfindungen allgemein angestaunt und bewundert wurde, während er selbst sie gegenüber seinen wissenschaftlichen Arbeiten für wertlos hielt. „Wer um die Göttin freit, suche in ihr nicht das Weib!“ Aber wie viele wollen denn um die Göttin freien? Es kann schliefslich auch kein billig denkender Lehrer erwarten, dafs sich aus jedem Schüler ein kleiner Archimedes machen lasse. Es mufs vielmehr seine Aufgabe sein, das vorgeschriebene, im grofsen und ganzen nicht zu schwierige und umfangreiche Pensum so darzustellen und einzuüben, dafs es auch von dem mathematisch Unbegabten, mit blofser Hülfe des vielgerühmten bon sens, bewältigt werden kann, und den Schüler nicht vor Aufgaben zu setzen, an denen er sich nutzlos stundenlang abmüht, weil sie seine Kräfte hoffnungslos übersteigen.

In diesem Sinne ist es sehr erfreulich, dafs die vorliegende Aufgabensammlung wirklich die Möglichkeit bietet, den geometrischen Unterricht in einer Weise zu gestalten, die auch den schwächsten Schülern gerecht wird, indem sie alle Hülfsmittel, die sich hierfür darbieten, das Zeichnen und Ausrechnen von Zahlbeispielen auf der einen Seite und andererseits alle möglichen praktischen, sozusagen materiellen Anwendungen energisch heranzieht. Die Mehrzahl der Schüler wird, um irgend einen Fall herauszugreifen, eine viel lebendigere Vorstellung von einem Cylinder bekommen, wenn sie ihn sich nach und nach aus den verschiedensten Materialien hergestellt denkt, einmal als hölzerne Walze (Aufg. IV, 10 und 13a), dann als einen Goldbarren (IV, 11a), eine Münze (11b), weiter als cylindrisches Hohlmafs (8), als Cylinder einer Pumpe, als Röhre (9) u. s. w. Ein Eimer ist immer etwas Anschaulicheres als ein abgestumpfter Kegel. Den Begriff des Volumens eines Körpers macht man sich klarer, wenn ein Hohlraum von seiner Gestalt mit irgend einem Stoffe angefüllt werden soll, wie z. B. wenn die Frage lautet, welche Gasmenge zur Füllung eines kugelförmigen Ballons von gegebenem Durchmesser erforderlich ist (Aufg. VI, 11a). So sind auch die in grofser Zahl gegebenen Aufgaben, welche das Verhältnis von Gewicht und Ausdehnung betreffen, also mit dem spezifischen Gewichte zusammenhängen, von grofsem didaktischen Werte. Zu den ausgezeichnetsten mathematischen Aufgaben gehören diejenigen, bei denen es sich um ein

Gröfstes oder Kleinstes handelt. Auch hier wird man eine gute Auswahl getroffen finden. Es ist z. B. recht hübsch und anschaulich, wenn ein vorgelegtes, viereckiges Stück Pappe zu einem möglichst grofsen, offenen Kasten zusammengebogen werden soll (IX, 86), wenn der Kegel von gröfstem Volumen bei kleinster Mantelfläche als Regenmesser eingeführt wird (IX, 90) u. s. f.

Es liegt in Plan und Methode des Buches begründet, wenn der Verfasser mit konkreten Beispielen beginnt. Die allgemeinen Definitionen und Lehrsätze gehen nicht den Aufgaben vorauf, sondern sind, nachdem sie an diesen erst entwickelt worden, in besonderen Abschnitten, welche die Überschrift „Zusammenfassung“ tragen, systematisch zusammengestellt. Diesem durchaus auf der modellmäfsigen Anschauung und der zeichnerischen Darstellung basierten Verfahren entspricht es auch, wenn z. B. die Ebene durch die bekannte Eigenschaft eingeführt wird, dafs sich in ihr durch jeden Punkt unendlich viele gerade Linien ziehen lassen. Denn den Beweis, den diese Definition erfordert, dafs es solche Flächen überhaupt giebt, denkt sich der Verfasser offenbar induktiv so geführt, dafs sich thatsächlich die Schneide eines Lineals auf einer ebenen Fläche nach beliebiger Richtung auflegen und nach Willkür verschieben läfst. Sonst hätte er unbedingt eine einwandfreie Definition, wie die als 6. Lehrsatz im 1. Abschnitte mitgeteilte, wonach die Ebene der Ort aller, von zwei festen Punkten gleichweit entfernten Punkten ist, bevorzugt. Indessen ist das deduktive Verfahren keineswegs aufgegeben. Im Gegenteil wird es dem Lehrer an der Hand des Buches mühelos gelingen, Glied für Glied zu einer lückenlosen Kette zusammenzufügen. Einzelnes, wie das Cavalierische Prinzip und seine Notwendigkeit zur Herleitung der Volumenformel für die Pyramide, überhaupt die Natur der Infinitesimalbetrachtung, z. B. gelegentlich der gegen Ende gegebenen Guldinschen Regel, hätte vielleicht etwas stärker betont werden können. Neu und originell ist die Zerlegung des Würfels in drei kongruente vierseitige Pyramiden mit quadratischer Basis an Stelle der bekannten Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei volumengleiche, aber nicht sämtlich kongruente Tetraeder. Recht nett ist die Erläuterung des Reihenbegriffes durch Reihen von stereometrischen Körpern, von denen jeder aus dem vorhergehenden in bestimmter Weise hervorgeht. Praktisch sind die Tabellen am Schlufs und die zum Herausklappen eingerichtete Figurentafel. Ob die für dieselbe angewandte Zentralprojektion wirklich den Vorzug gröfserer Deutlichkeit besitzt, darüber liefse sich noch streiten. Einzelne Ausdrücke, wie Inkugel und Umkugel, empfehlen sich durch ihre Kürze.

Überhaupt giebt das Buch auf sehr beschränktem Raume sehr viel, und es ist wirklich, wie der Verfasser in der Vorrede sagt, nicht blofs eine Aufgabensammlung, sondern ein richtiges Lehrbuch, das sich hoffentlich recht bald in weiteren Kreisen einbürgern wird. So wertvoll jede Verbesserung auf diesem Gebiete ist, so notwendig ist es auch, dafs die Herren Kollegen sich dieselbe zu Nutze machen und das Gute dem Besseren weichen lassen.

Strafsburg. H. E. Timerding.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

37. Werden durch einen festen Punkt (Q) in der Ebene einer (allgemeinen) Lemniscate 2 Geraden gezogen, welche die Kurve beziehungsweise in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 und p_1, p_2, p_3, p_4 treffen, so ist $QP_1 \cdot QP_2 \cdot QP_3 \cdot QP_4 = Qp_1 \cdot Qp_2 \cdot Qp_3 \cdot Qp_4$. Dabei sind die Strecken QP_1, QP_2 etc. von gleichem oder ungleichem Vorzeichen, je nachdem sie von Q aus gleich oder ungleich gerichtet sind.

Der Satz kann ausgedehnt werden auf jede Kurve $2n$ten Grades, deren Gleichung $f(x, y) = 0$ in rechtwinkligen Koordinaten xy als Glieder der höchsten $2n$ten Ordnung nur den Term $(x^2 + y^2)^n$ enthält.

Darmstadt, den 7. Mai 1901. S. Gundelfinger.

---

38. Nach der Maskelyneschen Regel der Trigonometrie ist für kleine Bogen x näherungsweise: $\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}$. Es soll mittels des Restgliedes der Maclaurinschen Reihe gezeigt werden, dafs, wenn x ein Bogen der ersten Quadranten ist, die Ungleichungen gelten:

$$\sin x - x\sqrt[3]{\cos x} < \frac{x^5}{3 \cdot 5!}(8 + 20 \operatorname{tg}^2 x + 15 \operatorname{tg}^4 x),$$

$$\sin^3 x - x^3 \cos x < \frac{x^7}{15}.$$

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

---

39. Es bedeute $l_i x$ den i-mal iterierten natürlichen Logarithmus von x. Man bilde die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{n^{\sigma_0} l_1 n^{\sigma_1} l_2 n^{\sigma_2} \ldots l_i n^{\sigma_i}}$, wo die $\sigma_\varkappa = \sigma_\varkappa(n)$ beliebig vorgegebene zahlentheoretische Funktionen von n sind, die für $\lim n = \infty$ — sei es von unten, sei es von oben her — gegen den Grenzwert 1 konvergieren. Wann konvergiert und wann divergiert die Reihe?

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

---

40. Errichtet man in jedem Punkte M einer stetigen und rektifizierbaren Raumkurve die Normalebene derselben und beschreibt darin von M aus einen Kreis mit dem festen Radius r, wovon ein beliebiger Punkt mit m bezeichnet sei, so erhält man eine Fläche. Damit sie einfach sei, ist notwendig und hinreichend, dafs der Krümmungsradius in keinem Punkte der gegebenen Kurve verschwindet und r das Minimum desselben, welches eine positive Zahl sein soll, nicht überschreitet. Je nachdem die Kurve geschlossen ist oder nicht, entsteht ein Ring oder ein durch zwei auf dieselbe senkrechte Kreisflächen und eine Mantelfläche begrenzter Schlauch. *„Der Inhalt der Oberfläche des Ringes und der der Mantelfläche des Schlauches ist das Produkt aus $2r\pi$ in die Länge λ der Leitkurve, der Inhalt beider Körper das Produkt aus $r^2\pi$ in diese Länge."* [1])

Innsbruck. O. Stolz.

---

41. Von der Spitze O einer Kardioide ziehe man den Radius OP nach einem beliebigen Punkte P derselben und beschreibe über OP als Durchmesser in einer zur Ebene der Kurve senkrechten Ebene den Kreis. Welches ist die Gleichung der krummen Oberfläche, die durch alle so konstruierten Kreise erzeugt wird? Welches ist das Volumen dieser Oberfläche?

Berlin. E. Lampe.

B. Lösungen.

Zu **19** (Bd. I, S. 371) (Ed. Janisch). *Erste Lösung.* In der im folgenden Beweise benutzten Figur liegt s' zwischen AC und AB, s'' aufserhalb; ferner ist $AB' < AB''$.

Beweis: Es sei $\sphericalangle BAB'' = \varphi$; die Mitten von BC und CA seien D und E; der Schnittpunkt der durch B_1' und B_1'' zu s'' und s' gezogenen Parallelen sei P.

Da AB' gleich und parallel BB'' ist, so ist $AB_1' = CB_1''$ und auch $EB_1' = EB_1''$. Nun erhält man aus Dreieck $AB'B_1'$ nach dem Sinussatze

$$AB_1' = \frac{AB' \cdot \sin AB'B_1'}{\sin AB_1'B'}.$$

Es ist aber: $\sphericalangle AB_1'B' = \gamma$; $\sin AB'B_1' = \sin(AB_1'B' + B'AB_1') =$ $= \sin(\gamma + \alpha + \varphi - 90^0) = \cos(\beta - \varphi)$; $AB' = AB \sin\varphi = 2r \sin\gamma \sin\varphi$.

Also: $AB_1' = 2r \sin\varphi \cos(\beta - \varphi)$; $EB_1' = EA - AB_1' = r\sin\beta -$ $- 2r\sin\varphi\cos(\beta-\varphi) = r[\sin\beta - (\sin\beta - \sin[\beta - 2\varphi])] = r\sin(\beta - 2\varphi)$. Da $\sphericalangle B_1'PB_1'' = 90^0$ und $EB_1' = EB_1''$, so ist $EP = EB_1' = r\sin(\beta - 2\varphi)$

---

1) Umgekehrt ist die Länge der erzeugenden Kurve gleich dem Quotienten des in Rede stehenden Körperinhaltes durch den Querschnitt $r^2\pi$, braucht also nicht durch den Grenzwert dieses Quotienten bei $\lim r = 0$ erklärt zu werden, wie es in der That geschehen ist (vgl. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1892, S. 649).

Bemerkenswerte Formeln erhält man auch noch, wenn man den Radius des in M auf die Leitkurve senkrechten Kreises eine Funktion ihres Bogens σ sein läfst.

und $\sphericalangle PEB_1' = 2\,PB_1''B_1' = 2\,B'AB_1' = 2(\alpha + \varphi - 90^0)$. Man hat nun im Dreieck PDE nach dem Sinussatze

$$\frac{\sin(DEP + DPE)}{\sin DPE} = \frac{PE}{ED} = \frac{r \sin(\beta - 2\varphi)}{r \sin\gamma} = \frac{\sin(\beta - 2\varphi)}{\sin\gamma}$$

oder: $$\sin DEP \cdot \cot DPE + \cos DEP = \frac{\sin(\beta - 2\varphi)}{\sin\gamma};$$

mithin: $$\cot DPE = \frac{\sin(\beta - 2\varphi) - \sin\gamma \cdot \cos DEP}{\sin\gamma \cdot \sin DEP}.$$

Es ist aber

$$\sphericalangle DEP = AED + PEB_1' = 180^0 - \alpha + 2(\alpha + \varphi - 90^0) = \alpha + 2\varphi.$$

Also: $$\cot DPE = \frac{\sin(\beta - 2\varphi) - \sin\gamma \cdot \cos(\alpha + 2\varphi)}{\sin\gamma \cdot \sin(\alpha + 2\varphi)}.$$

Als Zähler dieses Bruches ergiebt sich durch Umformung

$$\sin\beta\cos 2\varphi - \cos\beta\sin 2\varphi - \sin\gamma\cos\alpha\cos 2\varphi + \sin\gamma\sin\alpha\sin 2\varphi =$$
$$= (\sin\beta - \sin\gamma\cos\alpha)\cos 2\varphi + (\sin\gamma\sin\alpha - \cos\beta)\sin 2\varphi =$$
$$= \sin\alpha\cos\gamma\cos 2\varphi + \cos\alpha\cos\gamma\sin 2\varphi = \cos\gamma\sin(\alpha + 2\varphi).$$

Es ergiebt sich demnach:

$$\cot DPE = \frac{\cos\gamma\sin(\alpha + 2\varphi)}{\sin\gamma\sin(\alpha + 2\varphi)} = \cot\gamma; \quad \sphericalangle DPE = \gamma.$$

Hiernach ist der Winkel DPE von φ unabhängig und hat die konstante Gröfse γ; folglich liegt Punkt P auf dem Kreise, der über CD als Sehne ven Peripheriewinkel γ fafst, d. h. auf dem Feuerbachschen Kreise.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zu **19** (Bd. I, S. 371) (Ed. Janisch). *Zweite Lösung.* Es läfst sich zeigen, dafs der gefundene Punkt — er sei mit O bezeichnet — der Mittelpunkt einer dem Dreieck ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbel ist, deren Asymptoten die Linien OB_1', OB_1'' sind. Bezeichnen wir A mit 3, B mit 1, C mit 2, den unendlich fernen Punkt s' mit 4_∞ und den unendlich fernen Punkt von s'' mit 5_∞ und 6_∞, so konstruieren wir nach Pascal die zu s'' parallele Asymptote der durch die Punkte 1, 2, 3, 4_∞, 5_∞ bestimmten gleichseitigen Hyperbel. Wir erhalten als Schnittpunkt von $\overline{12}$ und $\overline{4_\infty 5_\infty}$ den unendlich fernen Punkt III_∞ von BC, als Schnittpunkt von $\overline{34}$ und $\overline{6_\infty 1}$, oder also von s' mit dem Lote auf s' aus B, den Punkt B' als Punkt II und die Pascallinie II III_∞, d. i. die Parallele durch B' zu BC trifft die $\overline{23}$ (CA) im Punkte I (B_1'), durch den die $\overline{5_\infty 6_\infty}$ (die zu s'' parallele Asymptote unserer Hyperbel) geht.

Prag. Ed. Janisch.

---

2. Anfragen und Antworten.

Zu **3** (Bd. I, S. 343) (W. Veltmann). Es konvergieren zwar die Geraden MP und XA, MQ und YB, nicht aber die Ebenen $XYAB$ und

MPQ. Vielmehr *schneiden sich dieselben* in der zu XA und YB gemeinsamen Parallelen, die auch zu MP und MQ parallel ist. Um dies einzusehen, fälle man das Lot MU auf XY und lasse den Strahl MP um dasselbe rotieren. Er beschreibt einen Kegel, dessen Mantellinien alle zur Ebene $XYAB$ parallel sind. Die Ebene MPQ liegt im Innern desselben, mufs daher $XYAB$ schneiden.

In der Schwierigkeit, sich dies vorzustellen, liegt das aufserordentlich Frappante an Herrn Veltmanns Betrachtung. Die Fehler derartiger Schlüsse sind trotzdem sehr leicht aufzudecken, wenn man das projektivische Bild des nichteuklidischen Raumes im Innern einer Kugel betrachtet. Die den unendlich fernen Punkten der Geraden XA, MP u. s. w. entsprechenden Bildpunkte e, f, g liegen auf der Kugelfläche, die Ebenen $xayb$, mpq im Bilde schneiden sich in ef; diese Gerade liegt im Innern der Kugel, also schneiden sich in Wirklichkeit die Ebenen $XAYB$ und MPQ im Endlichen.

Charlottenburg. G. Hessenberg.

---

3. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Zu I B 1b: Rationale Funktionen mehrerer Veränderlichen.

I. S. 257, Zeile 18 und 17 von unten mufs es heifsen $x^{-m}y^{-n}$ und $t^{\mu}t_1^{\nu}$ statt $x^{-\mu}y^{-\nu}$, $t^m t_1^n$.

München. A. v. Braunmühl.

Zu I B 2: Invariantentheorie.

I. S. 328, Footnote (38); for „de Presle, Par. Soc. math. Bull. **15** (1857)" read „de Presle, Par. Soc. math. Bull. **15** (1887)".
Same footnote; for „Hensel, J. f. Math. **113** (1894) p. 113" read „Hensel, J. f. Math. **113** (1894) p. 303".

I. S. 328, Footnote (41). In the reference to Kronecker's papers in the Berlin Academy Berichte, delete the date 1891.

I. S. 329, Footnote (42); for „Hermite, J. f. Math. **83** (1877)" read „Hermite, J. f. Math. **78** (1874)".

I. S. 329, Footnote (43); for „Cayley, Phil. Mag. **96**, (1853)" read „Cayley, Phil. Mag. (4) **6**, (1853)".

I. S. 329, Footnote (49). The reference to Brioschi, Annali di Mat. **1**, seems erroneous; there is a paper by this author Giornale di Mat. **1** (1866) p. 26.

I. S. 331, Footnote (56). Kneser's work is really covered by Weierstrass's 1858 paper; for Kneser finds an *orthogonal* substitution to reduce a quadratic form, and this is equivalent to reducing a family of quadratic forms of which one is *definite*, as done by Weierstrass.

I. S. 333, Footnote (68), for „Frobenius, J. f. Math. **85**" read „Frobenius, J. f. Math. **84**".

Cambridge (England). T. J. I'A. Bromwich.

Zu I B 3a: Separation und Approximation der Wurzeln.

I. Zu Nr. 4. Es wäre wünschenswert, wenn hier die Litteratur über die Beweise von Descartes' Zeichenregel zusammengestellt wäre. Ferner sollte der Satz von Rolle angeführt sein. Bei Nr. 10 ist die Arbeit zu Newtons Methode von S. Spitzer, Wien 1851, unerwähnt geblieben. Bei Nr. 14, wo die Gräffesche Methode auseinandergesetzt wird, dürfte sich ein Hinweis auf die in der bekannten „Sammlung von Beispielen zur Arithmetik und Algebra" von E. Heis (50. Aufl. S. 359—364) mit dieser Methode vollständig durchgerechneten Beispiele als nützlich erweisen. Ferner ist das von demselben Heis herstammende Verfahren der Gleichungsauflösung mittelst „Teilbruchreihen" nicht erwähnt (ebenda S. 358—59). Zu Anmerk. 41 auf S. 446, woselbst die Auflösung der trinomischen Gleichungen erwähnt wird, ist noch zu bemerken: Stern, Theorie der Kettenbrüche, Berlin 1834; S. Günther, Bericht über die 34. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Trier 1880 S. 190; K E. Hoffmann, Archiv der Math. u. Ph. **66**, 1881, S. 33; Netto, Mathem. Annalen **29**, 1887, S. 141 und 148 und Isenkrahe, ebenda **31**, 1888, S. 309.

München. A. v. Braunmühl.

Zu I D 3: Interpolation.

I. S. 817, Note 27. Statt Bord. Mém. 11 lies Prag Archiv 1.

Zürich. H. Burkhardt.

Zu I D 3: Interpolation und I E: Differenzenrechnung.

I. S. 800 und S. 918. Die Litteratur ist zu ergänzen durch: Herbert L. Rice, the theory and practice of interpolation, including mechanical quadrature and other important problems concerned with the tabular values of functions. Lynn, Mass., 1899.

Zürich. H. Burkhardt.

Zu II A 3: Bestimmte Integrale.

II. S. 158. In der semikonvergenten Entwicklung von $Q(a)$ mufs der Faktor vor der Klammer $e^{-\omega}$ statt $\log \omega$ heifsen.

Innsbruck. W. Wirtinger.

Aus Anlafs eines Nekrologes auf Schlömilch, der sich im letzten Bande der Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig befindet, bin ich zu einigen Bemerkungen in Bezug auf das Referat von Herrn Brunel über bestimmte Integrale gekommen, von denen ich mir erlaube, die folgenden auf die Schlömilchschen Arbeiten bezüglichen hier mitzuteilen.

(1) Bei Aufzählung der allgemeinen Lehrbücher pag. 134 fehlt der zweite Band des Kompendiums der höheren Analysis, auf welchen in den einzelnen Noten mehrfach hingewiesen wird, so Seite 158, 167 etc. Bei

den Hinweisen fehlt die Angabe der Ausgabe. Es dürfte als wünschenswert erscheinen, dafs hierbei eine Übereinstimmung mit Herrn Vofs herbeigeführt wird. Letzterer zitiert die vierte Auflage, Herr Brunel thatsächlich eine andere.

(2) Bei der Aufzählung der Monographien pag. 136 fehlt die Monographie von Schlömilch: Analytische Studien. Erste Abteilung. Leipzig 1848, auf welche in dem Referat mehrfach ohne Angabe des genauen Titels hingewiesen wird, so pag. 163, 164 etc.

(3) Die Bemerkung pag. 158: „O. Schlömilch nennt $P(a)$ 'unvollständige Gammafunktion' und giebt für sie eine für kleine Werte von ω brauchbare Entwickelung" ist in ihrem letzten Teile inkorrekt. Schlömilch giebt zwar zunächst mit ganz kurzen Worten eine derartige Entwickelung — dieselbe, die sich kurz vor dem zitierten Satze in dem Brunelschen Referat findet und schon vor Schlömilch bekannt war, — bemerkt dann aber, dafs diese Formel für einigermafsen grofse x unbequem wird und leitet in ausführlicher Weise eine andere Reihe ab, die für grofse Werte von x gilt. Hočevar bemerkt diesen Umstand in der von Herrn Brunel zitierten Arbeit ganz ausdrücklich.

(4) In der Note 58, pag. 163 mufs es heifsen Studien 1 § 6 statt Studien 1 p. 6.

(5) In der Note 61, pag. 164 mufs es heifsen Studien 1 p. 49 statt Studien 1 p. 4.

(6) Die Note 66, pag. 65 giebt zu zwei Bemerkungen Anlafs. Die zitierte Arbeit von Schlömilch stammt aus dem Jahre 1848, aus demselben Jahre, in welches nach Herrn Brunel die Arbeit von Newman fällt. Unter solchen Umständen dürfte der Ausdruck „wiederfinden", der bei Schlömilch gebraucht wird, besser durch einen anderen zu ersetzen sein.

Die Bemerkung „die von Schlömilch von der Gaufsschen Definition aus wiedergefunden wurde" ist unverständlich, da nicht angegeben wird, was unter einer solchen Definition verstanden wird. Thatsächlich geht Schlömilch von einer Integraldarstellung des Differentialquotienten des Logarithmus der Gammafunktion aus, die Gaufs nicht als Verfasser hat.

(7) pag. 174, Nr. 14. Hier dürfte es sich empfehlen, den von Schlömilch eingeführten Integralsinus und Integralcosinus zu erwähnen, zwei Integrale, die eine ähnliche Struktur wie der Integrallogarithmus besitzen und sich auch von Bedeutung gezeigt haben.

(8) pag. 180, Nr. 17. Von den Arbeiten von Schlömilch über die Beziehungen zwischen den bestimmten Integralen und der Reihenlehre wird aufser dem Kompendium nur eine kurze Notiz im dritten Bande der Zeitschrift für Mathematik zitiert, die lediglich eine Ergänzung einer früheren sehr ausführlichen Arbeit im zwölften Bande des Archivs der Mathematik und Physik enthält. Diese Arbeit fehlt, obgleich das in Betracht kommende Resultat in ihr schon vorkommt. Ebenso fehlen weitere ausführlichere Arbeiten im ersten und vierten Bande der Schlömilchschen Zeitschrift, sowie im vierten Bande des Archivs.

(9) pag. 184, Note 163. Die independente Darstellung der Bernoullischen Zahlen wird in expliziter Weise nicht betrachtet, vielmehr werden nur einige Arbeiten zitiert, in denen dieselbe thatsächlich behandelt wird.

Dieser Umstand ist schon von Herrn Saalschütz hervorgehoben worden. Unter den zitierten Arbeiten fehlt die Arbeit von Schlömilch im 16. Bande des Archivs, die in dem zitierten Werke von Herrn Saalschütz ebenso ausführlich besprochen wird, wie die Arbeiten von Laplace, Eytelwein etc., die Herr Brunel zitiert, und die auch dieselbe Bedeutung für die Entwickelung der Theorie besitzen dürfte.

Dresden. M. Krause.

Zu II A 4a: Gewöhnliche Differentialgleichungen.

II. S. 212, Z. 1—11. Bei der Zusammenstellung der verschiedenen Fälle, die eintreten können, wenn längs der Diskriminantenkurve $G = 0$ nur zwei Werte von y' zusammenfallen, ist noch ein Fall hinzuzufügen. Ist nämlich für $y = g$, $y' = h$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \equiv 0$$

und aufserdem noch

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \equiv 0,$$

aber $y = g(x)$ keine Lösung, so ist diese Kurve entweder der Ort für Punkte, in denen Integralkurven einander von höherer als 1. Ordnung berühren oder der Ort von Spitzen mit Aufsentangenten (Spitzen 2. Art, Schnäbel).

II. S. 214, Fufsnote 90. Es mufs dort heifsen statt „M. Schmidt, Diss. Giefsen 1885" „Carl Schmidt, Diss. Giefsen 1884". Diese Dissertation behandelt auch nicht nur, wie in Fufsnote 90 angegeben ist, spezielle Gleichungen 1. Ordnung, sondern enthält allgemeine Untersuchungen über singuläre Lösungen, insbesondere zum ersten Male die vollständige analytische Behandlung des allgemeinen Falles, wo längs der Diskriminantenkurve $G = 0$ k Werte von y' zusammenfallen, aber $\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} \not\equiv 0$ ist.

Mainz. Carl Schmidt.

Zu IV. Bd., 2. Teil: Geometrische Grundbegriffe.

IV. S. 13, Zeile 13/14 v. o. Es heifst da: Diesen (Vektor) nennt Maxwell[23]) „rotation", später [23a]) „curl" des Vektors.

Die mit 23a) bezeichnete Abhandlung aus dem Jahre 1871 ist wohl früher als der mit 23) bezeichnete Treatise. An beiden Orten wendet aber Maxwell den Ausdruck „curl or version" an, und lehnt rotation in dem Aufsatz 23a) ausdrücklich ab mit den Worten: „I have sought for a word, which shall neither like Rotation, Whirl or Twirl connote motion etc.".

Freiburg i/B. J. Lüroth.

SITZUNGSBERICHTE
DER BERLINER MATHEMATISCHEN
GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT.

ERSTER JAHRGANG.

BG

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.



Inhaltsverzeichnis.

Continued in next volume

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

1. Sitzung am 31. Oktober 1901.

Anwesend sind die Herren Adler, Börsch, Budde, Caratheodory, Cwojdziński, Dziobek, Färber, R. Fuchs, Fürle, Hamburger, Haenlein, Haentzschel, Hensel, Hessenberg, Heun, Jahnke, Jolles, Kiehl, Kneser, Knoblauch, Koppe, Krohs, Landau, Lewent, Michaëlis, F. Müller, R. Müller, Opitz, Peters, Reichel, Rothe, Schafheitlin, J. Schur, Skutsch, Steinitz, Vogler, Wallenberg, Weingarten.

Durch Zuruf gewählt werden zum Vorsitzenden Herr Weingarten, zum Schriftführer Herr Kneser (Berlin W, Schaperstr. 30), zum Stellvertreter des Schriftführers Herr Jahnke.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Weingarten: Über einen neuen Beweis des Lagrangeschen Satzes in der Theorie der Wirbelbewegungen (s. u.).

Herr Kneser: Über die Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre in der Elementargeometrie unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurabeln (s. u.).

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Dziobek, Färber, Hessenberg, Kneser, Weingarten,

2. Sitzung am 27. November 1901.

Vorsitz: Herr Weingarten.

Die Anzahl der Mitglieder der Gesellschaft beträgt 56; anwesend 51 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Lampe: Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte (s. u.).

Herr Jahnke: Über Lemoines Bestimmung der Achsenrichtungen eines Kegelschnitts (Bull. de la Soc. Math. de France **29**, 217; Nouv. Ann. de Math. (4) **1**, septembre 1901).

Herr Landau: Über den casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen.

Herr Börsch legt das neuherausgegebene wissenschaftliche Tagebuch von Gauss vor.

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Hensel, Heun, Hessenberg, Jahnke, F. Kötter, Lampe, Landau, Steinitz

3. Sitzung am 18. Dezember 1901.

Vorsitz: Herr Weingarten.

Anwesend 40 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr F. Kötter: Elementarer Beweis des Jacobischen Kreiseltheorems (s. u.).

Herr Heun: Über die Hertzsche Mechanik (s. u.).

Herr Hermes: Zur Herstellung der Vielflache.

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Heun, Kneser, Knoblauch, F. Kötter, Reissner.

Über einen Satz der Hydrodynamik.

Von J. Weingarten.

Der Helmholtzsche Satz, dafs ein Teilchen einer reibungslosen Flüssigkeit, die unter dem Einflufs von Potentialkräften in Bewegung ist, zu keiner Zeit eine Rotation erlangt, wenn es zu irgend einer Zeit eine solche nicht besafs, ist von Helmholtz nicht einwandfrei abgeleitet worden. Spätere Autoren wie Kirchhoff, H. Weber haben für seine Ableitung anstatt der von Helmholtz zum Ausgang gewählten Eulerschen Gleichungen die Lagrangeschen Gleichungen der Hydrodynamik zum Ausgangspunkte gewählt. Der Satz selbst ist aber einfach auch aus den Eulerschen Gleichungen zu gewinnen.

Bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten des bewegten Teilchens, aufgefafst als Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z desselben und der von einem beliebigen Anfangspunkte gezählten Zeit t, und bildet man das Differential $d\varphi$ einer willkürlichen Funktion φ der Variablen x, y, z, t in Beziehung auf das bewegte Teilchen während eines Zeitelements dt, so erhält man die Bestimmung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Sind ferner p, q, r die doppelten Rotationskomponenten desselben Teilchens, nämlich

$$p = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad r = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

so ergeben die Eulerschen Grundgleichungen zufolge der Helmholtzschen Entwickelung die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = p\dfrac{\partial u}{\partial x} + q\dfrac{\partial u}{\partial y} + r\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{dq}{dt} = p\dfrac{\partial v}{\partial x} + q\dfrac{\partial v}{\partial y} + r\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{dr}{dt} = p\dfrac{\partial w}{\partial x} + q\dfrac{\partial w}{\partial y} + r\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Führt man noch die abkürzende Bezeichnung ein:

$$\delta\varphi = p\frac{\partial\varphi}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + r\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

so ergiebt sich ohne Weiteres durch Differentiation in Beziehung auf das bewegte Teilchen:

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = \frac{dp}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{dq}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{dr}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\partial t} + q\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{dt} + r\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{dt}$$

und durch Benutzung der Gleichungen (1) nach einfacher Umformung:

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = \delta\frac{d\varphi}{dt}. \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung, die auch als eine einfache Folgerung einer bekannten Jacobischen Untersuchung angesehen werden kann[1]), zieht man sofort den folgenden Schlufs:

Ist φ eine Funktion der vier Variablen x, y, z, t, welche der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

identisch genügt, d. h. bleibt φ in Beziehung auf das bewegte Teilchen mit der Zeit konstant, so bleibt auch die Funktion $\delta\varphi$ derselben vier Variablen für das bewegte Teilchen mit der Zeit konstant.

Drei unter einander unabhängige Funktionen, welche mit der Zeit für das betreffende Teilchen ihren Wert beibehalten, sind sicher die drei Anfangskoordinaten a, b, c dieses Teilchens zu dem als Anfangszeit gewählten beliebigen Zeitpunkt Null.

Es stellen daher die drei Funktionen

$$\delta a = p\frac{\partial a}{\partial x} + q\frac{\partial a}{\partial y} + r\frac{\partial a}{\partial z} = p_0,$$

$$\delta b = p\frac{\partial b}{\partial x} + q\frac{\partial b}{\partial y} + r\frac{\partial b}{\partial z} = q_0,$$

$$\delta c = p\frac{\partial c}{\partial x} + q\frac{\partial c}{\partial y} + r\frac{\partial c}{\partial z} = r_0$$

drei mit der Zeit unveränderliche Gröfsen für das betreffende Teilchen dar. Sind diese Gröfsen, die offenbar die doppelten Komponenten der Anfangsrotation darstellen, zur Anfangszeit Null, so bleiben die Rotationskomponenten Null, da die Funktionaldeterminante der Funktionen a, b, c nicht verschwinden kann. Dies ist der Helmholtzsche Satz.

Verschwinden für einen gewissen Raum in allen Punkten diese Komponenten im Anfange, so verschwinden in dem korrespondierenden Raum die Rotationskomponenten zu jeder Zeit, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten können aus einem Geschwindigkeitspotential abgeleitet werden. Dies ist der Lagrangesche Satz.

1) Jacobi Werke, Bd. 5, p. 39—43.

Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurabeln.

Von A. Kneser.

I. Die elementare Ähnlichkeitslehre.

1. Wir sagen, zwischen vier Strecken a, b, c, d besteht die Proportion

$$a : b = c : d, \tag{1}$$

wenn das mit den Katheten a und b gebildete rechtwinklige Dreieck dieselben spitzen Winkel hat, wie das mit den Katheten c und d gebildete, und zwar so, dafs den Katheten a und c gleiche Winkel gegenüber liegen. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dafs die aufgestellte Proportion (1) mit den folgenden gleichbedeutend ist:

$$c : d = a : b, \quad b : a = d : c, \quad d : c = b : a.$$

Ferner ist klar, dafs aus den Proportionen

$$a : b = c : d, \quad a_1 : b_1 = c : d$$

die weitere

$$a : b = a_1 : b_1$$

folgt.

Ebenso leicht sieht man, dafs durch drei Glieder einer Proportion das vierte unzweideutig bestimmt ist; denn z. B. aus den Proportionen

$$a : b = c : d, \quad a : b = c : d_1$$

würde folgen

$$c : d = c : d_1;$$

also wären die rechtwinkligen Dreiecke mit den Kathetenpaaren c, d und c, d_1 gleichwinklig, was nach dem zweiten Kongruenzsatze $d = d_1$ ergiebt. Endlich ist unmittelbar ersichtlich, dafs zu drei willkürlich gegebenen unter den Strecken a, b, c, d eine vierte so gefunden werden kann, dafs die Proportion (1) besteht.

2. Es gelte die Proportion (1) und sei OAB ein mit den Katheten a, b gebildetes rechtwinkliges Dreieck, sodafs

$$a = OA, \quad b = OB.$$

Man trage auf der Verlängerung von OA über O hinaus die Strecke

$$OD = d$$

ab und ebenso auf der Verlängerung von OB über O hinaus die Strecke

$$OC = c;$$

dann ist der Voraussetzung (1) zufolge

$$\sphericalangle\, OBA = \sphericalangle\, ODC;$$

da man nun setzen kann

$$\sphericalangle\, OBA = \sphericalangle\, CBA, \quad \sphericalangle\, ODC = \sphericalangle\, ADC,$$

so folgt

$$\sphericalangle\, CBA = \sphericalangle\, ADC.$$

Die Strecke AC erscheint also von den Punkten B und D aus, welche auf derselben Seite der Geraden AC liegen, unter gleichem Winkel, und die vier Punkte A, B, C, D liegen nach einem aus den Kongruenzsätzen folgenden Theorem auf einem Kreise. Daraus folgt dann weiter

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle CBD;$$

mithin sind auch die Dreiecke DOB und AOC in der Weise gleichwinklig, daſs den Katheten OC und OD dieselben Winkel gegenüber liegen. Das bedeutet nach Nr. 1 aber, daſs die Proportion

$$OD : OB = OC : OA, \quad d : b = c : a$$

besteht, oder auch, was nach Nr. 1 dasselbe ist,

$$a : c = b : d.$$

In der Proportion (1) darf man also die inneren Glieder vertauschen. Schreibt man dieselbe in der Form

$$b : a = d : c,$$

so sieht man unmittelbar, daſs auch die äuſseren Glieder vertauscht werden dürfen.

3. Sind O, A, C irgend drei Punkte einer Geraden und liegt A zwischen O und C, so nennen wir die Strecke OC die Summe der Strecken OA und AC und setzen demgemäſs

$$OC = OA + AC. \tag{2}$$

Speziell sei

$$OA = a, \quad OB = b, \; AC = c, \quad \sphericalangle AOB = 90^0,$$

und werde die Strecke

$$AD = d$$

an die Gerade OAC unter einem rechten Winkel nach derselben Seite angetragen, auf welcher OB liegt. Wenn dann wieder die Proportion

$$a : b = c : d \tag{3}$$

vorausgesetzt wird, so sind die Geraden AB und CD parallel, und der Schnittpunkt der letzteren mit OB, welcher E sei, liegt auſserhalb der Strecke OB, sodaſs

$$OE = OB + BE$$

gesetzt werden kann. Nun ist offenbar

$$BE = AD = d,$$

also

$$OE = b + d,$$

und der Gleichung (2) zufolge

$$OC = a + c.$$

Die Dreiecke OCE, OAB sind ferner winkelgleich, und den Seiten OC, OA liegen gleiche Winkel gegenüber, somit folgt

$$OC : OE = OA : OB$$

oder

$$a + c : b + d = a : b, \tag{4}$$

eine Proportion, die somit als Folge der Proportion (3) erwiesen ist. Umgekehrt folgt diese, wie die Figur unmittelbar lehrt, aus der Voraussetzung (4).

4. Jetzt seien zwei beliebige gleichwinklige Dreiecke gegeben; zwei Winkel in einem von ihnen mögen halbiert werden und die Halbierungslinien sich in einem Punkte Q schneiden, der von allen drei Seiten den Abstand r hat. Eine Seite dieses Dreiecks sei a; sie werde durch das vom Punkte Q gefällte Lot in die Abschnitte a_1 und a_2 zerlegt. Die analoge Konstruktion am zweiten Dreieck ergebe den Punkt Q', der von den Seiten den Abstand r' hat; die Seite a' liege dem gleichen Winkel wie a gegenüber und werde in die Abschnitte a'_1 und a'_2 zerlegt, von denen a'_1 im Scheitel eines gleichen Dreieckswinkels wie a_1 endige. Dann hat das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten r und a_1 denselben der Strecke r gegenüberliegenden Winkel wie das mit den Katheten r' und a'_1 gebildete gegenüber der Strecke r'; also folgt nach Nr. **1**

$$r : a_1 = r' : a'_1$$

oder nach Nr. **2**

$$r : r' = a_1 : a'_1.$$

Ebenso ergiebt sich

$$r : r' = a_2 : a'_2,$$

also

$$a_1 : a'_1 = a_2 : a'_2$$

und nach Nr. **3**

$$a_1 + a_2 : a'_1 + a'_2 = a_1 : a'_1 = r : r'$$

oder, da offenbar die Gleichungen

$$a = a_1 + a_2, \quad a' = a'_1 + a'_2$$

gelten,

$$a : a' = r : r'.$$

Sind die übrigen Paare gleichen Winkeln gegenüberliegender Seiten b, b' und c, c', so ergiebt sich ebenso

$$b : b' = r : r', \quad c : c' = r : r',$$

und hieraus folgt

$$a : a' = b : b', \quad a : a' = c : c';$$

$$a : b = a' : b', \quad a : c = a' : c'.$$

In winkelgleichen Dreiecken sind also irgend zwei Seiten des einen Dreiecks denjenigen Seiten des andern, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, proportional.

5. Speziell folgt aus dem erhaltenen Resultat, dafs auf den Schenkeln eines Winkels durch Parallele proportionale Strecken abgeschnitten werden. Trägt man umgekehrt bei der Voraussetzung

$$a : b = c : d$$

auf dem einen Schenkel eines Winkels die Strecken

$$a = OA, \quad c = OC,$$

nach einer und derselben Seite ab, ebenso auf dem anderen Schenkel nach einer Seite die Strecken

$$b = OB, \quad d = OD$$

und zieht durch C eine Parallele zu AB, welche den Schenkel OB in D^0 schneide, so liegt dieser von O aus in der Richtung OB, und es ergiebt sich nach Nr. **4**

$$a : b = c : OD^0,$$

also

$$c : d = c : OD^0,$$

woraus nach Nr. **1** folgt

$$OD = d = OD^0;$$

da nun die Punkte D und D^0 von O aus nach derselben Seite hin liegen, so müssen sie zusammenfallen; die Geraden AB und CD sind somit parallel.

Hiermit sind die Grundlagen gegeben, auf denen die gesamte Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke und Vielecke in der gewöhnlichen Weise entwickelt werden kann, ohne dafs der Zahlbegriff, das Inkommensurable oder das Archimedische Axiom benutzt würden.

II. Die Streckenrechnung.

6. Eine beliebige Strecke werde durch 1 bezeichnet; gilt dann die Proportion

$$a : 1 = x : b, \tag{5}$$

so nennen wir die Strecke x das Produkt aus a und b und setzen

$$x = ab.$$

Nach Nr. **2** folgt nun aus der angesetzten Proportion

$$a : x = 1 : b,$$

und hieraus nach Nr. **1**

$$b : 1 = x : a;$$

man hat also die Gleichungen

$$x = ba, \quad ab = ba,$$

und die definierte Multiplikation zweier Strecken ist kommutativ.

Es sei ferner

$$y = xc = (ab)c, \quad z = bc, \quad u = az = a(bc);$$

dann gelten die Proportionen

$$b : 1 = z : c, \quad x : 1 = y : c, \quad a : 1 = u : z, \tag{6}$$

oder nach Nr. **2**

$$b : z = 1 : c, \quad x : y = 1 : c,$$

also nach Nr. **1** und **2**

$$b : z = x : y, \quad b : x = z : y$$

oder endlich

$$x : b = y : z.$$

Kombiniert man hiermit die Proportion (5), so folgt

$$a : 1 = y : z,$$

also zufolge der dritten Proportion (6)

$$y : z = u : z,$$

und dies ergiebt nach Nr. **1** das gewünschte Resultat

$$y = u, \quad (ab)c = a(bc).$$

Die Multiplikation der Strecken ist also auch assoziativ.

Endlich folgen nach Nr. **2** und **3** aus den Proportionen

$$a_1 : 1 = x_1 : b, \quad a_2 : 1 = x_2 : b$$

die Resultate

$$a_1 : x_1 = a_2 : x_2, \quad a_1 : x_1 = 1 : b,$$

$$a_1 + a_2 : x_1 + x_2 = a_1 : x_1, \quad a_1 + a_2 : 1 = x_1 + x_2 : b;$$

da nun

$$x_1 = a_1 b, \quad x_2 = a_2 b,$$

so zeigt die letzterhaltene Proportion

$$b(a_1 + a_2) = a_1 b + a_2 b,$$

und die Multiplikation ist als zur Addition distributiv erwiesen. Für beide Operationen gelten also bei den festgesetzten Definitionen dieselben formalen Rechnungsregeln wie in der Arithmetik.

7. Es ist nach den bisherigen Entwicklungen noch nicht selbstverständlich, aber leicht zu zeigen, dafs aus der Proportion

$$a : b = c : d \tag{7}$$

die Gleichung

$$ad = bc$$

folgt. Setzt man nämlich

$$x = ad, \quad y = bc,$$

sodafs die Proportionen

$$a : 1 = x : d, \quad b : 1 = y : c \tag{8}$$

bestehen, so kann eine Strecke m durch die Proportion

$$b : 1 = m : d \tag{9}$$

definiert werden; dann ist

$$b : m = 1 : d,$$

und da der ersten Proportion (8) zufolge

$$a : x = 1 : d,$$

so folgt

$$a : x = b : m, \quad a : b = x : m. \tag{10}$$

Andrerseits ergiebt die Definition von m kombiniert mit der zweiten Proportion (8)

$$y : c = m : d,$$

also auch

$$y : m = c : d \tag{11}$$

oder der Voraussetzung (7) zufolge

$$y : m = a : b;$$

also nach der zweiten Proportion (10)

$$y : m = x : m,$$

woraus nach Nr. **1** folgt

$$x = y, \quad ad = bc. \tag{12}$$

Geht man umgekehrt von dieser Gleichung aus und definiert m wie bisher durch die Proportion (9), so ergeben sich wie oben die Resultate (10), (11) und aus ihnen die Proportion (7), welche somit als Folge der Voraussetzung (12) erscheint.

Hiermit sind genügende Hilfsmittel gegeben, um alle in der algebraischen Geometrie vorkommenden Rechnungen mit Strecken unabhängig vom Archimedischen Axiom sowie von den Begriffen der Zahl, des Inkommensurabeln und des Flächeninhalts vollständig durchzuführen.

Literatur: Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844, Rein geometrische Darstellung der Proportionen in der Geometrie, §§ 75—79.

Hoppe, Rein geometrische Proportionslehre. Archiv der Math. u. Phys. (1) **62**, S. 153—164. 1878.

Kupffer, Die Darstellung einiger Kapitel der Elementarmathematik, Sitzungsberichte der Naturforschergesellschaft zu Dorpat, **10**, Heft II, S. 359—385. 1893.

Hilbert, Grundlagen der Geometrie (Festschrift), §§ 14—17. 1899.

Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte.

Von E. Lampe.

Aufgabe. — Den Mittelwert der Krümmungsradien aller Normalschnitte in einem Punkte B einer positiv gekrümmten Oberfläche zu finden.

Lösung. — Man beschreibe in der Tangentialebene der Oberfläche für den betrachteten Punkt B um den Berührungspunkt B als Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius a (von beliebiger Länge), errichte in jedem Punkte P der Peripherie dieses Kreises das Lot auf der Tangentialebene und gebe dem Lote die Länge r desjenigen Krümmungsradius, welcher dem durch BP gehenden Normalschnitte der Oberfläche angehört. Die Gesamtheit der so errichteten Lote gehört dem Mantel des Kreiscylinders an, der den Kreis vom Radius a als senkrechten Querschnitt besitzt. Das von den Strecken r beschriebene Stück des Mantels des Cylinders werde längs des einen Hauptkrümmungsradius r_1 aufgeschnitten und in eine Ebene ausgebreitet, so erhält man ein ebenes Flächenstück von der Basis $2a\pi$ und dem Inhalte

$$F = \int_0^{2\pi} r \cdot a d\varphi.$$

Nun ist bekanntlich $r = r_1 r_2/(r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi)$, wenn r_1 und r_2 die beiden Hauptkrümmungsradien sind. Mithin ist

$$F = a r_1 r_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi} = a r_1 r_2 \cdot \frac{4}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

oder $F = 2a\pi\sqrt{r_1 r_2}$. Hieraus ergiebt sich die mittlere Höhe dieser Fläche nach Division durch die Basis $2a\pi$ als $r_m = \sqrt{r_1 r_2}$. Setzt man die Krümmung der Oberfläche in B gleich dem reziproken Werte des mittleren Krümmungsradius, so wird die auf diese Weise definierte Krümmung gleich der Quadratwurzel aus dem Gaufsschen Krümmungsmafs.

Verfährt man in gleicher Weise mit der Krümmung $1/r$ jedes Normalschnittes, trägt man also im Punkte P senkrecht zur Tangentialebene $1/r$ als lineare Gröfse nach einem beliebig gewählten Mafse auf, so erhält man nach Abwickelung des auf solche Weise entstandenen Mantelstückes F_1 für die Gröfse desselben den Ausdruck:

$$F_1 = \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\varphi}{r} = a\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}\right) = a\pi\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Bezeichnet man den Mittelwert der Krümmung aller Normalschnitte durch $1/r_0$, so erhält man also

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

die Hälfte der sogenannten mittleren Krümmung, in Übereinstimmung mit den Ansichten von Sophie Germain.

Wie alle Fragen aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte, so hat auch die unsrige je nach der Annahme der unabhängigen Variable (in unserem Falle φ) unendlich viele andere Lösungen. Beschreibt man in der Tangentialebene eine beliebige geschlossene Kurve, welche B einschliefst, so kann man diese Kurve als Basis eines Cylinders benutzen und auf dessen zur Tangentialebene senkrechten Erzeugenden die Werte von r nach derselben Weise wie oben beim Kreiscylinder auftragen. Jede solche Kurve ergiebt im allgemeinen einen anderen Mittelwert. Aufser dem oben benutzten Kreise um B als Zentrum empfiehlt sich die Dupinsche Indikatrix, die auf elliptische Integrale führt. Als Kuriosum, das auch ohne Durchführung der Rechnung leicht verständlich ist, möge folgender Fall erwähnt werden. In der Tangentialebene von B zeichne man beiderseitig von B den Radius r_1 in dem Schnitte der zugehörigen Normalebene, also $BR_1 = BR_1' = r_1$ und ziehe durch R_1 und R_1' Senkrechte zu BR_1 und BR_1'. Diese beiden Parallelen können als geschlossene Kurve um B betrachtet werden. Für sie folgt als Mittelwert aller Radien r der Wert r_2.

Eine von der vorigen Lösung verschiedene erhält man, wenn man in der Tangentialebene jeden Wert von r längs des Schnittes der zugehörigen Normalebene aufträgt. Die Endpunkte der Radien bilden eine Kurve mit der Polargleichung

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi}.$$

Der Inhalt dieser Kurve ist

$$F = 2 \cdot r_1^2 r_2^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi)^2},$$

oder wie man leicht findet

$$F = \tfrac{1}{2} \sqrt{r_1 r_2}(r_1 + r_2) \cdot \pi.$$

Setzt man diesen Flächeninhalt gleich dem eines Kreises vom Radius ϱ, so kann man ϱ als Mittelwert aller Radien r definieren. Da nun

$$\varrho^2 = \sqrt{r_1 r_2} \cdot \frac{(r_1 + r_2)}{2}$$

ist, so ergiebt sich hier ϱ als geometrisches Mittel zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel aus den beiden Hauptkrümmungsradien.

Ein Beweis des Jacobischen Theorems von der Zusammensetzbarkeit einer Kreiselbewegung aus den Inversionen zweier Poinsotbewegungen.

Von Fritz Kötter.

Das bekannte Theorem von Jacobi, dafs sich jede Kreiselbewegung aus den Umkehrungen zweier konjugierten Poinsotbewegungen zusammensetzen lasse, steht zwar nicht in der ersten Reihe der zahlreichen Entdeckungen dieses Forschers, wenn es sich um die Fruchtbarkeit und den Folgereichtum handelt; es rückt aber sofort an diesen Platz, wenn es sich um die Eleganz und die überraschende Einfachheit des Zusammenhangs scheinbar weit von einander entfernt liegender Dinge handelt.

Für dieses Theorem hat man verschiedene Beweise gegeben. Einige dieser Beweise, welche die Übereinstimmung der formelmäfsigen Darstellung der beiden zu vergleichenden Bewegungen als Hauptstück enthalten, führen zwar die Richtigkeit des Theorems unmittelbar vor Augen, bleiben aber dennoch unbefriedigend, weil sie die inneren Ursachen der Übereinstimmung nicht berühren.

Ohne die endgültige Darstellung durch elliptische Funktionen zu benutzen, haben Darboux und Routh das Theorem bewiesen, indem sie zeigten, dafs die Geschwindigkeitsgröfsen bei den beiden verglichenen Bewegungen in derselben Weise von der gegenseitigen Lage abhängen. Während aber bei Routh mehr die formelmäfsige Übereinstimmung betont wird, hebt Darboux hervor, dafs der Ausdruck für das Quadrat der Geschwindigkeit bei der zusammengesetzten Bewegung unmittelbar die Übereinstimmung mit dem Satz von der lebendigen Kraft bei der Bewegung des Kugelkreisels erkennen lasse, und so in Verbindung mit dem Umstande, dafs die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Hauptachsen der beiden gegen einander bewegten Räume konstant sind, das Theorem zur Evidenz bringe.

Von allen Beweisen, welche bisher für das Theorem gegeben wurden, erscheint mir daher derjenige von Darboux als der natürlichste. Man

kann jedoch noch einen Schritt weiter gehen. Der Beweis von Darboux fordert für die Erkenntnis seiner Richtigkeit noch immer die Bildung der ersten Integrale des Kreiselproblems. Und wenn jene Integrale auch sämtlich eine weitgehende, allgemein giltige Bedeutung haben, müfste ein Beweis als einfacher gelten, bei welchem unmittelbar gezeigt würde, dafs die zusammengesetzte Bewegung die Eigenschaft hat, welche in dem Ansatz für die Differentialgleichungen der Bewegung des Kugelkreisels zum Ausdruck kommt.

Ein solcher Beweis wurde in dem Vortrage mitgeteilt.

Über die Hertzsche Mechanik.

Von Karl Heun.

In Rücksicht auf die zunehmende Bedeutung der Mechanik gebundener Systeme sollen hier einige Entwicklungen aus den Hertzschen „Principien" wiedergegeben werden, welche hiermit in der engsten Beziehung stehen.

Wir knüpfen an Abschnitt 7 des ersten Buches an, in welchem die kinematischen Grundbegriffe in Bezug auf ein System definiert sind. Hertz bezeichnet hier die einfachen kinematischen Vektoren, insofern sie durch Strecken im Euklidischen Raume dargestellt sind und ihren Ausgang von bestimmten Massenpunkten des Systems nehmen, als *Elementarvektoren*. Solche sind z. B. das Moment der Geschwindigkeit sowie der Beschleunigung eines Punktes mit der Masse m. Bezeichnen wir die Komponenten der Elementargeschwindigkeit mit $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ und diejenigen der Beschleunigung mit $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{x}_3$, dann kann man zunächst die skalaren auf das ganze System bezogenen Gröfsen

$$\mathfrak{V}_v = \Sigma m (\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 + \dot{x}_3 x_3), \quad \mathfrak{V}_w = \Sigma m (\ddot{x}_1 x_1 + \ddot{x}_2 x_2 + \ddot{x}_3 x_3)$$

bilden und als *Viriale* der Momente der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen bezeichnen. Von einer bestimmten Lage und Konfiguration und dem entsprechenden Zeitmomente ausgehend, werden sich diese Systemgröfsen in doppelter Weise ändern: einmal indem jeder Massenpunkt m seine Geschwindigkeit und Beschleunigung wechselt, dann aber auch indem seine Lage im Raume eine andere wird. Die Entwicklung der Reduktionsmethoden für die kinematischen Elementarvektoren ist nun unter den Händen von Johann Bernoulli und Lagrange thatsächlich so vor sich gegangen, dafs man die erstgenannten Änderungen gänzlich ausgeschlossen und das zweite System der Änderungen insofern als willkürlich angenommen hat, als es die Beschränkung auf unendlich kleine mit dem geometrischen Zusammenhange des materiellen Systems verträgliche Verschiebungen gestattet. Das System der kinematischen Elementarvektoren wird also infolge der ersten Festsetzung zu einem *stationären* in dem Sinne, in welchem die Astatik bei ihren Betrachtungen die Kräftesysteme für — beliebige — Verschiebungen auffafst. Die entsprechenden Virialänderungen des Geschwindigkeits- und Beschleunigungssystems sind:

$$\delta_x \mathfrak{V}_v = \Sigma m (\dot{x}_1 \delta x_1 + \dot{x}_2 \delta x_2 + \dot{x}_3 \delta x_3), \quad \delta_x \mathfrak{V}_w = \Sigma m (\ddot{x}_1 \delta x_1 + \ddot{x}_2 \delta x_2 + \ddot{x}_3 \delta x_3).$$

Die Einführung der Lagrangeschen Systemkoordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_n$ an Stelle der Cartesischen Koordinaten ergiebt Ausdrücke von der Form:

$$\delta_x \mathfrak{V}_v = V_1 \delta q_1 + V_2 \delta q_2 + \cdots + V_n \delta q_n, \quad \delta_x \mathfrak{V}_w = W_1 \delta q_1 + W_2 \delta q_2 + \cdots + W_n \delta q_n,$$

worin

$$V_\nu = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad W_\nu = \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial E}{\partial q_\nu}$$

bedeutet. Die kinetische Energie des Systems ist definiert durch die Gleichung

$$E = \tfrac{1}{2} \Sigma m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2).$$

Hertz nennt die Gröfsen $V_1, V_2, \cdots, V_n$ die Komponenten des Momentes der Geschwindigkeit in Bezug auf das ganze materielle System und bezeichnet den entsprechenden Vektor — im Gegensatz zu den Elementarvektoren — als einen Lagrangeschen[1]) Vektor. Diese Bezeichnung überträgt sich ohne weiteres auf Beschleunigungen und Kräfte.

Wirkt also auf die Masse m eine Elementarkraft mit den Komponenten k_1, k_2, k_3, welche eine Elementarreaktion mit den Komponenten r_1, r_2, r_3 hervorruft, so ist für jeden Massenpunkt

$$k_1 = m\ddot{x}_1 + r_1, \quad k_2 = m\ddot{x}_2 + r_2, \quad k_3 = m\ddot{x}_3 + r_3;$$

und man hat nach dem d'Alembertschen Prinzip die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\delta_x \mathfrak{V}_r = 0,$$

wenn

$$\mathfrak{V}_r = \Sigma (r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3)$$

das Virial der Elementarreaktionen in Bezug auf das ganze System bedeutet. Setzt man nach Einführung der Lagrangeschen Koordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_n$ noch

$$\delta_x \mathfrak{V}_k = K_1 \delta q_1 + K_2 \delta q_2 + \cdots + K_n \delta q_n,$$

so kann man die *Bewegungsgleichungen* des Systems auch schreiben:

$$W_1 = K_1, \quad W_2 = K_2, \quad \cdots, \quad W_n = K_n.$$

Für ein ungekoppeltes System wäre nach der Auffassung von Hertz natürlich

$$K_1 = K_2 = \cdots = K_n = 0.$$

Da diese besondere Voraussetzung für die Anwendungen der Mechanik — wenigstens vorläufig — unbequem erscheinen könnte, so behalten wir im folgenden die äufseren Kräfte bei, indem wir den Hertzschen Begriff der Koppelung der einzelnen Teilsysteme ohne weiteres auf dynamisch beeinflufste materielle Systeme ausdehnen. Genau genommen ist diese ganze Unterscheidung gerade in der technischen Mechanik häufig belanglos. Denn

1) Eigentlich führt Hertz diese Benennung erst in Nr. 476 bei Erörterung der dynamischen Verhältnisse ein. Es liegt jedoch kein Grund vor, in der Kinematik eine andere Terminologie zu benutzen.

nehmen wir etwa den Kurbelmechanismus (Fig. 1) der Dampfmaschine, so sehen wir, dafs die Welle A mit der Arbeitsmaschine, der Kreuzkopf D mit dem System der Dampfmoleküle und dafs der ganze Mechanismus mit der Unterlage gekoppelt ist. Diesen Verbindungen entsprechen der Widerstand der Arbeitsmaschine, die treibende Kraft des Kesseldampfes und die Schwerkraft.

Wir betrachten jetzt einen beliebigen Mechanismus von n Graden der Freiheit und trennen denselben durch einen oder mehrere Schnitte in zwei Teile.[1]) Die freien Koordinaten des *ersten* Teilsystems seien q_1', q_2', $\cdots$, $q_{n'}'$, diejenigen des *zweiten* q_1'', q_2'', $\cdots$, $q_{n''}''$ und nennen die zugehörigen kinetischen Energien E' und E''. Bei analoger Bezeichnung der übrigen korrespondierenden Gröfsen heifsen die Bewegungsgleichungen der beiden Teilsysteme

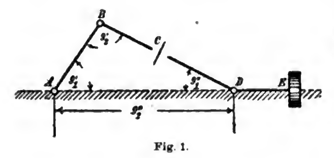


Fig. 1.

$$W_1' = K_1', \quad W_2' = K_2', \quad \cdots, \quad W_{n'}' = K_{n'}';$$
$$W_1'' = K_1'', \quad W_2'' = K_2'', \quad \cdots, \quad W_{n''}'' = K_{n''}''.$$

Alle Elementarkräfte haften bei dieser Auffassung an ihren ursprünglichen Angriffspunkten und dürfen deshalb *vor* Ausführung des Trennschnittes keineswegs nach den Regeln der Statik reduziert werden. Die hier zulässigen Reduktionen werden ohnedies durch Bildung der Lagrangeschen Komponenten K_1', $\cdots$, $K_{n'}'$, K_1'', $\cdots$, $K_{n''}''$ ausgeführt.

Koppeln wir nun beide Teilsysteme durch die Gleichungen der Maschine (Hertz Nr. 531):

$$(1) \qquad F_1(q', q'') = 0, \quad F_2(q', q'') = 0, \quad \cdots, \quad F_m(q', q'') = 0,$$

dann können die obigen $n' + n''$ Bewegungsgleichungen nicht mehr bestehen. Es ist vielmehr jetzt nach dem d'Alembertschen Prinzip

$$(2) \qquad \delta_x \mathfrak{B}_r' + \delta_x \mathfrak{B}_r'' = 0, \quad \text{(cf. Hertz Nr. 535)}$$

worin

$$\delta_x \mathfrak{B}_r' = R_1' \delta q_1' + R_2' \delta q_2' + \cdots + R_{n'}' \delta q_{n'}',$$
$$\delta_x \mathfrak{B}_r'' = R_1'' \delta q_1'' + R_2'' \delta q_2'' + \cdots + R_{n''}'' \delta q_{n''}''$$

zu setzen ist. Die Lagrangeschen Gleichungen nehmen also die Form an:

$$(3) \qquad \begin{cases} W_1' = K_1' + R_1', & W_2' = K_2' + R_2', \quad \cdots, \quad W_{n'}' = K_{n'}' + R_{n'}'; \\ W_1'' = K_1'' + R_1'', & W_2'' = K_2'' + R_2'', \quad \cdots, \quad W_{n''}'' = K_{n''}'' + R_{n''}''. \end{cases}$$

Sie eignen sich nicht zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Systems Sind die freien Koordinaten desselben q_1, q_2, $\cdots$, q_n, dann besteht die Beziehung

$$n' + n'' - m = n,$$

1) Im obigen Beispiele möge der Schnitt etwa bei C durch die Lenkstange geführt sein. Es ist dann $n = 1$, $n' = 2$, $n'' = 2$, $m = 3$.

und die Bewegungsgleichungen haben die Form:

$$W_1 = K_1,\ W_2 = K_2,\ \cdots,\ W_n = K_n. \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) dienen lediglich zur Bestimmung der beiden Lagrangeschen Vektoren $(R'_1, R'_2, \cdots, R'_{n'})$ und $(R''_1, R''_2, \cdots, R''_{n''})$.

Setzt man nun in der Gleichung (2) oder

$$R'_1 \delta q'_1 + \cdots + R'_{n'} \delta q'_{n'} + R''_1 \delta q''_1 + \cdots + R''_{n''} \delta q''_{n''} = 0$$

nach den Gleichungen (1) die Werte der Variationen der Koordinaten als Funktionen der Gröfsen $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n$ ein, so mufs nach dem d'Alembertschen Prinzip für das gekoppelte System

$$\delta_x \mathfrak{B}_r = 0$$

sein. Die resultierende Gleichung zerfällt also in ein System von n homogenen linearen Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda'_{11} R'_1 + \cdots + \lambda'_{n'1} R'_{n'} + \lambda''_{11} R''_1 + \cdots + \lambda''_{n''1} R''_{n''} = 0, \\ \lambda'_{12} R'_1 + \cdots + \lambda'_{n'2} R'_{n'} + \lambda''_{12} R''_1 + \cdots + \lambda''_{n''2} R''_{n''} = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \lambda'_{1n} R'_1 + \cdots + \lambda'_{n'n} R'_{n'} + \lambda''_{1n} R''_1 + \cdots + \lambda''_{n''n} R''_{n''} = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Dies sind die Gleichungen „zwischen den Komponenten der auf eine Maschine wirkenden Kräfte nach ihren Koordinaten“, auf welche Hertz in Nr. 533 seiner Prinzipien hinweist. Sie sind von grofser Bedeutung für die technische Kinetostatik, indem sie die Abhängigkeit der Komponenten der *Schnittreaktionen* von einander ausdrücken. Führt man den Schnitt durch ein Lager, so ergeben sich in derselben Weise die Komponenten der *Zapfenreaktionen* für den betreffenden Mechanismus.

Das kinetostatische Problem der *Auflagerreaktionen*, welches eigentlich eine Variante der vorstehend behandelten Aufgabe ist, wollen wir nur für den einfachen Kurbelmechanismus betrachten und uns hierbei auf die notwendigsten Andeutungen beschränken.

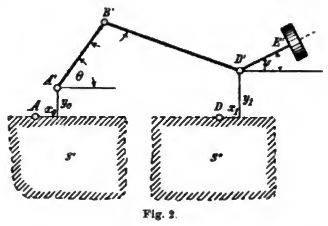


Fig. 2.

Um den Mechanismus (Fig. 2) in den erforderlichen Freiheitszustand zu versetzen, verschieben wir die Wellenmitte A nach A' entsprechend den Koordinaten x_0, y_0, ferner den Kreuzkopfzapfen von D nach D' entsprechend den Koordinaten x_1, y_1 und drehen die Kolbenstange in die Lage $D'E'$, so dafs sie mit der Horizontalen den Winkel ψ bildet.

Das in dieser Weise frei gemachte System ist bestimmt durch die sechs Koordinaten $x_0, y_0, \theta, x_1, y_1, \psi$. Seine Bewegung würde also durch die sechs Lagrangeschen Gleichungen

$$W_\nu = K_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, 6) \tag{6}$$

insofern bestimmt sein, als dies ohne Angabe der Anfangslage und der Anfangsgeschwindigkeiten möglich ist.

Koppeln wir aber das Kurbelsystem mit dem gesamten Auflagergerüst, so kann dies im vorliegenden Falle nur durch fünf Gleichungen:

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \cdots,\ F_5 = 0$$

zwischen den Koordinaten geschehen, und an Stelle der Gleichungen (6) treten die folgenden:

$$W_\nu = K_\nu + R_\nu. \qquad (7) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

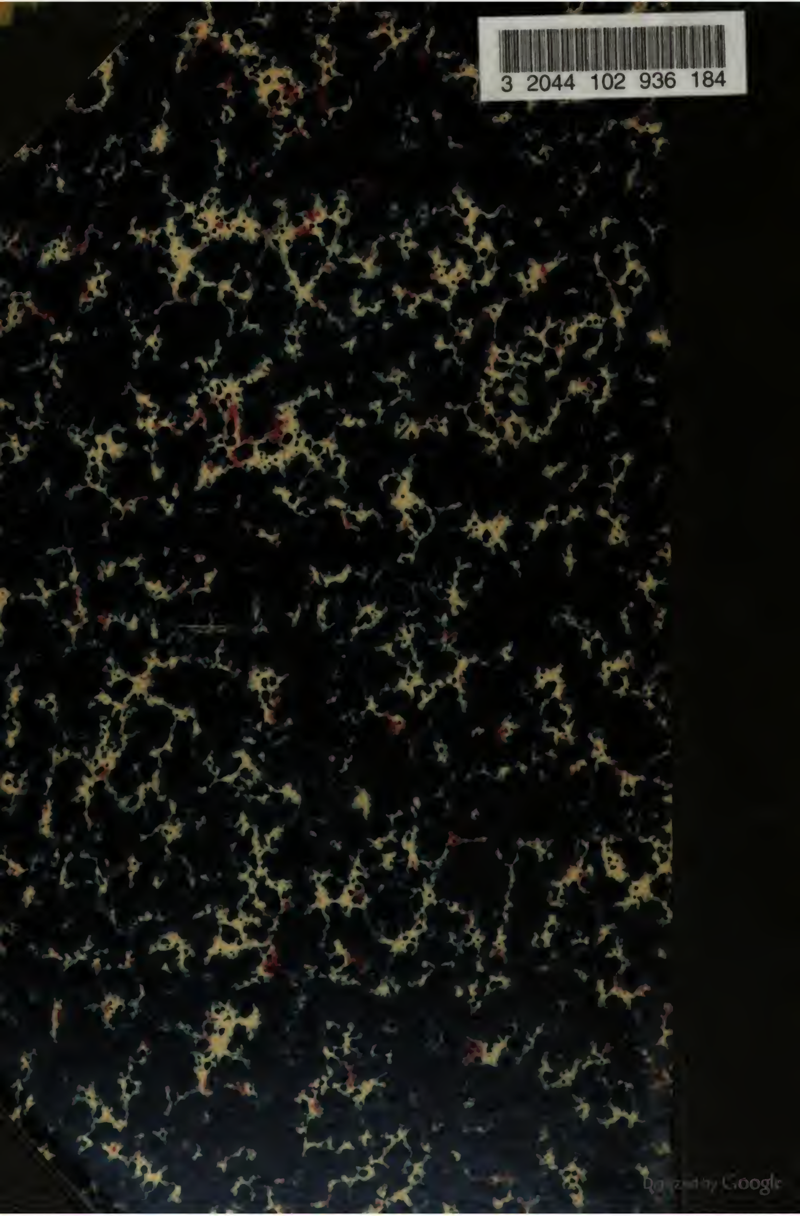
Hierdurch sind die beiden Reaktionsvektoren ($R_1 = R_{x0}$, $R_2 = R_{y0}$) und $R_4 = R_{x1}$, $R_5 = R_{y1}$, $R_6 = R_\psi$) bestimmt. Die Hertzschen Gleichungen (5) reduzieren sich auf eine einzige.

Es erscheint kaum nötig hervorzuheben, dafs der hier entwickelte Rechnungsgang auch ohne weiteres aus den allgemeinen Ansätzen von Lagrange folgt, wie er sie in der *Mécanique analytique* entwickelt hat. Hier kam es nur darauf an, zu zeigen, dafs Hertz den kinetostatischen Betrachtungen eine wesentlich gröfsere Aufmerksamkeit geschenkt hat, als es in den meisten systematischen Darstellungen der theoretischen Mechanik zu geschehen pflegt, indem diese — namentlich nach dem Vorgange von Jacobi — den Schwerpunkt allzu einseitig in die Bewegungsgleichungen legen.

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
E. N. Barisien, Chr. Beyel, K. Cwodjzinski, Fr. Daniëls, F. Fitting, S. Gundelfinger, H. Guradze, E. Haentzschel, J. Hatzidakis, T. Hayashi, L. Heffter, G. Hessenberg, J. Horn, Ed. Janisch, K. Isenkrahe, C. Köhler, P. Kokott, H. Kühne, E. Lampe, G. Landsberg, E. Lemoine, W. Ludwig, G. Majcen, L. Matthiessen, C. Moreau, E. Naetsch, J. Neuberg, N. Nielsen, M. d'Ocagne, H. Opitz, B. Oster, L. Ripert, A. Rotth, L. Saalschütz, L. Schlesinger, R. v. Sterneck, G. Teixeira, W. Thienemann, Th. Vahlen, W. Veltmann, J. Weingarten, J. Wellstein, A. Wendler, E. Wölffing, H. Worm, G. Zemplén, H. Züge.






3 2044 102 936 184